# Статистическая радиофизика

## Тема 4

# Модели случайных процессов

# Общий план курса

1. **Случайные процессы и методы их описания.**
2. **Модели случайных процессов.**
3. **Шумовые колебания в линейных системах.**
4. **Шумовые колебания в нелинейных системах.**
5. **Фильтры.**
6. **Основы теории передачи информации по каналам связи**

# <u>Модели случайных процессов</u> (план)

**см [1]. Глава 2**

- Спектральный анализ сигналов
- Гауссовский случайный процесс
- Узкополосный стационарный шум
- Узкополосный гауссовский шум
- Узкополосный негауссовский шум
- Диффузионный (винеровский) процесс
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

# Спектральный анализ сигналов

1) Периодические сигналы

$$\Phi(t) = \Phi(t + nT); \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Где ω - круговая частота, *n - любое положительное целое число*

$$\Phi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

# Коэффициенты разложения ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\omega t)d\omega t;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\omega t)\cos(k\omega t)d\omega t;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\omega t)\sin(k\omega t)d\omega t.$$

# Формы представления ряда Фурье

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = C_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

$$C_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}, \quad \varphi_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

---

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right); \;\; \sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \frac{1}{2}\left[a_k\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) - ib_k\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_k - ib_k)e^{i\omega t} + (a_k + ib_k)e^{-i\omega t}\right].$$

# Формы представления ряда Фурье

$$\Phi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

---

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\Big[\big(a_k - ib_k\big)\exp(ik\omega t) + \big(a_k + ib_k\big)\exp(-ik\omega t)\Big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\big[c_k \exp(ik\omega t) + c_{-k}\exp(-ik\omega t)\big] =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ik\omega t).$$

здесь $c_k = \frac{1}{2}\big(a_k - ib_k\big)$. $\quad c_{-k} = c_k{}^* = \frac{1}{2}\big(a_k + ib_k\big)$. $\qquad \geq 0$

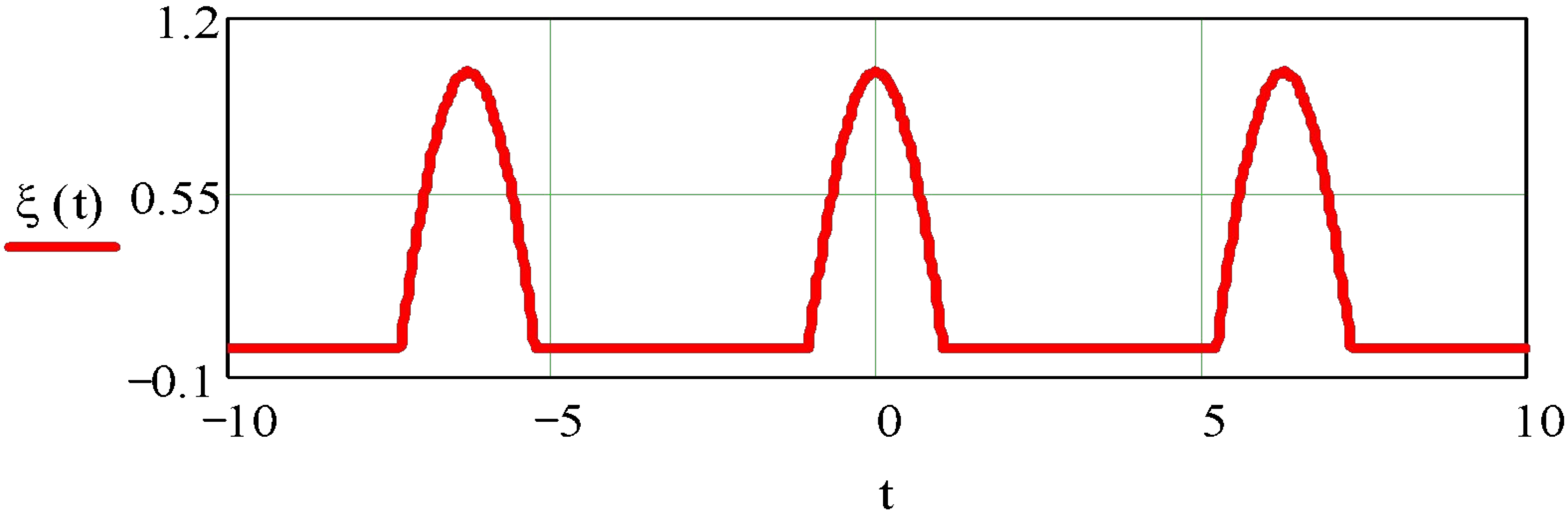
здесь $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t)\exp(-ik\omega t)dt$. $\qquad \geq \quad \geq - \quad , \quad \geq 0.$

Пример 1. Периодическая последовательность косинусоидальных импульсов.

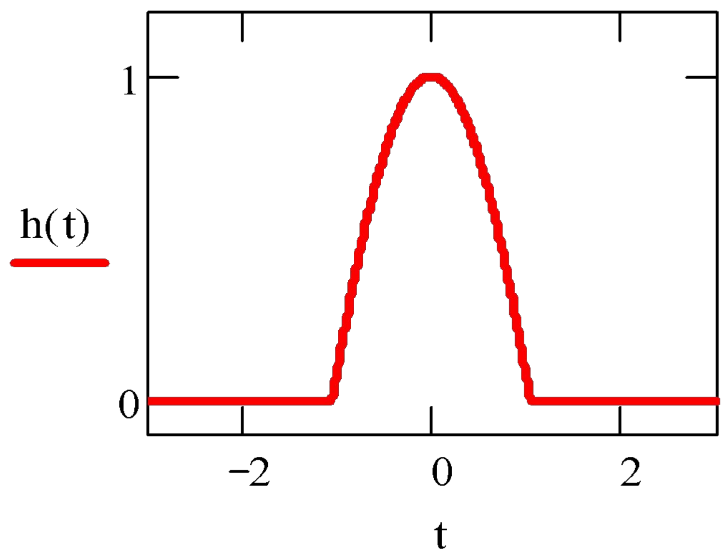
Угол отсечки $\Theta$ = 60 deg. Период T=$2\pi$

$$\Theta := 60\cdot \mathrm{deg} \qquad \Theta = 1.047 \qquad AM := 1$$

$$\xi(t) := AM\cdot \max\left(\frac{\cos(t)-\cos(\Theta)}{1-\cos(\Theta)},0\right)$$



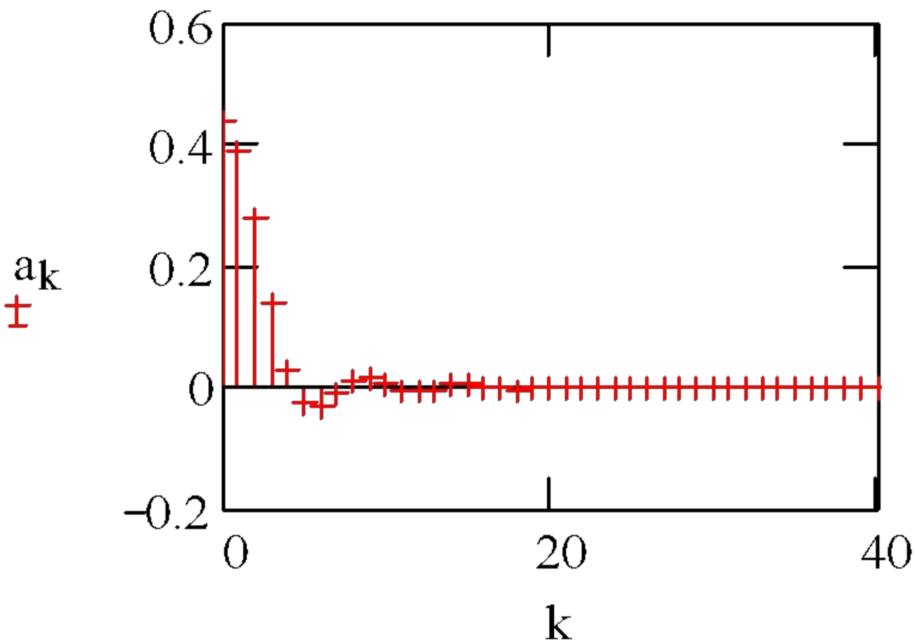

$$h(t) := \begin{vmatrix} \xi(t) & \text{if } |t| \le \Theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

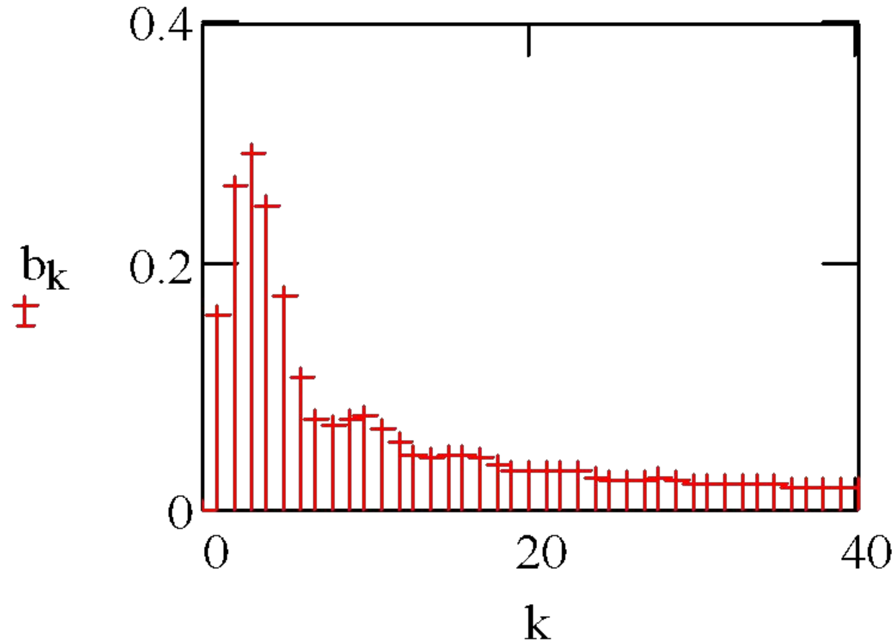


$$k := 0 .. 10$$

$$a_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} h(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt \qquad a_0 := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} h(t)\, dt$$

$$b_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt$$


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0
20
40
k
$a_k$


0.4
0.2
0
0
20
40
k
$b_k$

$a =$

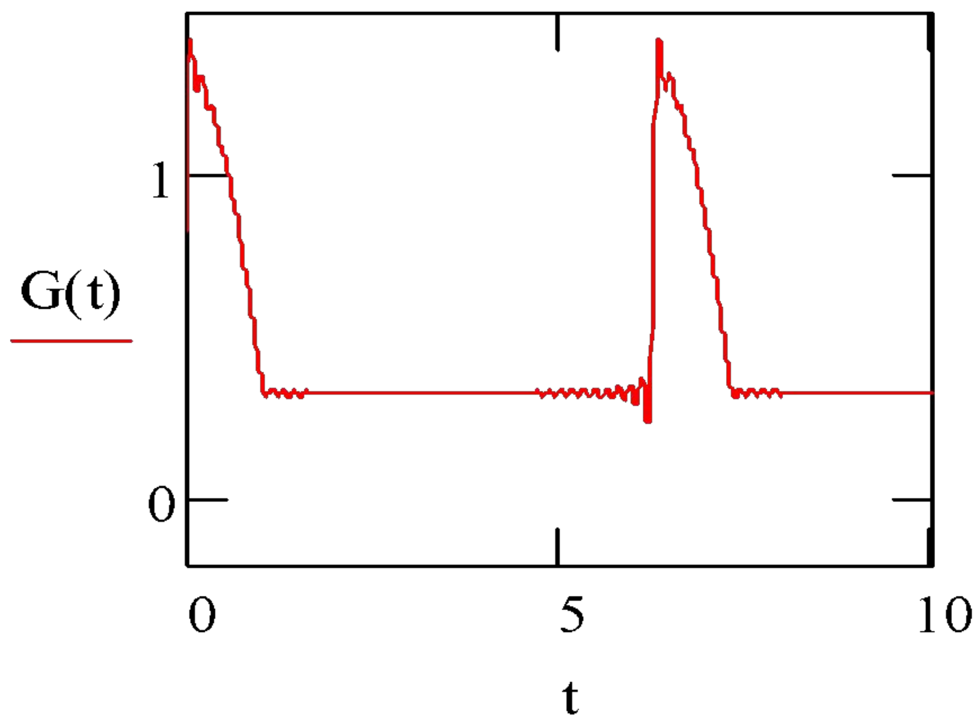
| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0.436 |
| 1 | 0.391 |
| 2 | 0.276 |
| 3 | 0.138 |
| 4 | 0.028 |
| 5 | -0.028 |
| 6 | -0.032 |
| 7 | $-9.845 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | $9.844 \cdot 10^{-3}$ |
| 9 | 0.014 |
| 10 | $5.012 \cdot 10^{-3}$ |
| 11 | $-5.011 \cdot 10^{-3}$ |
| 12 | $-7.711 \cdot 10^{-3}$ |
| 13 | $-3.029 \cdot 10^{-3}$ |
| 14 | $3.028 \cdot 10^{-3}$ |
| 15 | $4.923 \cdot 10^{-3}$ |

$b =$

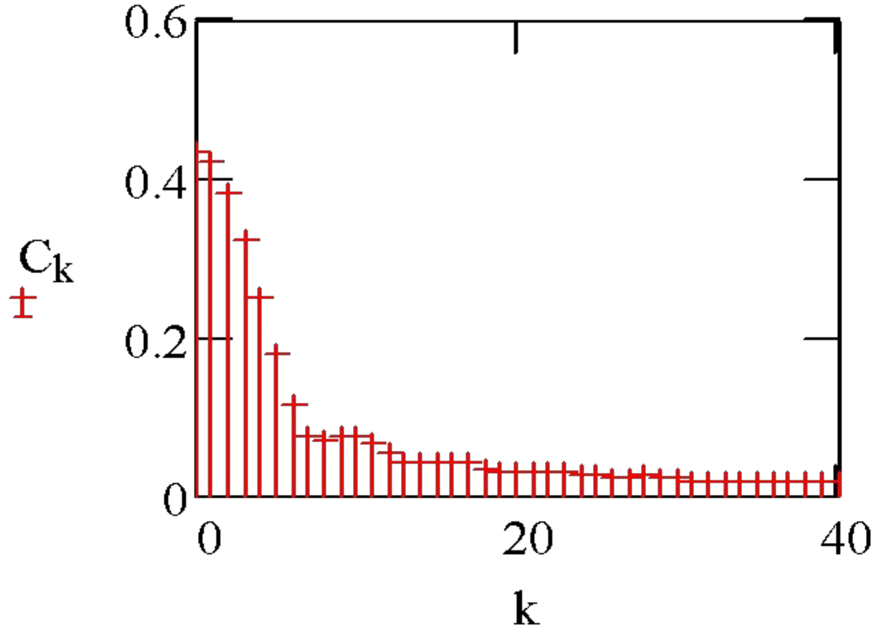
| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.159 |
| 2 | 0.265 |
| 3 | 0.292 |
| 4 | 0.249 |
| 5 | 0.175 |
| 6 | 0.109 |
| 7 | 0.074 |
| 8 | 0.068 |
| 9 | 0.073 |
| 10 | 0.075 |
| 11 | 0.067 |
| 12 | 0.053 |
| 13 | 0.044 |
| 14 | 0.041 |
| 15 | 0.043 |

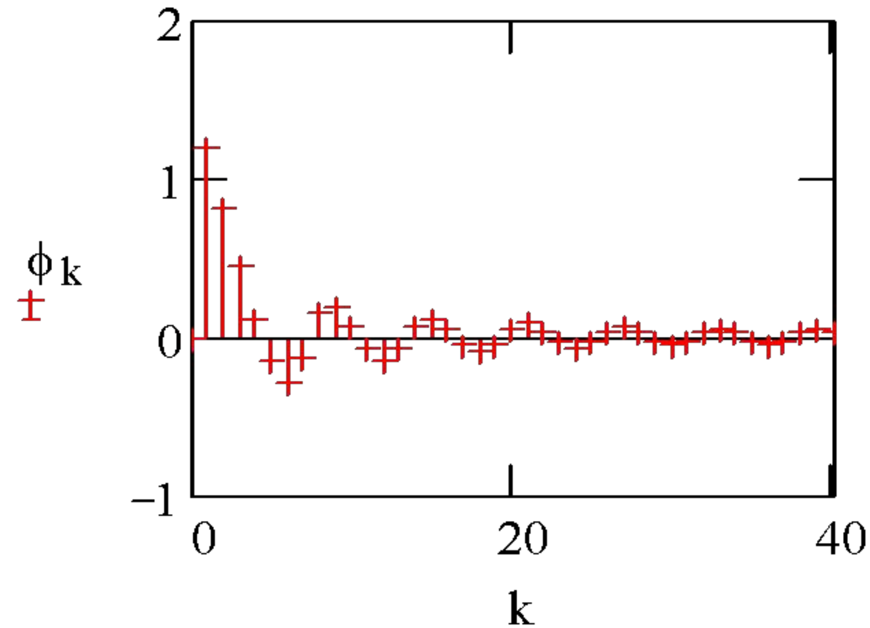
# После представления в виде ряда Фурье

$$G(t) := \sum_{k=0}^{40} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)\right)$$



$$C_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \qquad \phi_k := \begin{vmatrix} \operatorname{atan}\left(\dfrac{a_k}{b_k}\right) & \text{if } k > 0 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{vmatrix}$$



$$c_k := \frac{1}{2}\left(a_k - i \cdot b_k\right)$$

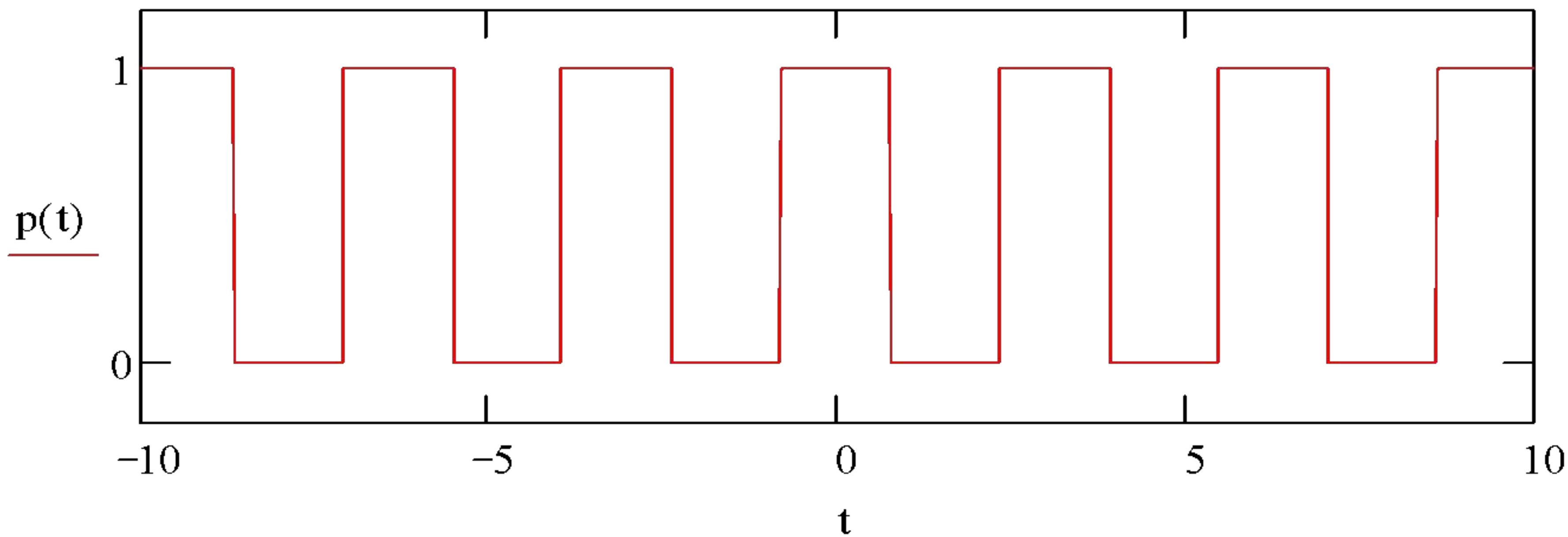
$c_k =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0.218 |
| 1 | 0.1960.08i |
| 2 | 0.1380.133i |
| 3 | 0.0690.146i |
| 4 | 0.0140.125i |
| 5 | -0.0140.088i |
| 6 | -0.0160.055i |
| 7 | $-4.922 \cdot 10^{-3}$0.037i |
| 8 | $4.922 \cdot 10^{-3}$0.034i |
| 9 | $6.892 \cdot 10^{-3}$0.037i |
| 10 | $2.506 \cdot 10^{-3}$0.037i |
| 11 | $-2.505 \cdot 10^{-3}$0.033i |
| 12 | $-3.855 \cdot 10^{-3}$0.027i |
| 13 | $-1.514 \cdot 10^{-3}$0.022i |
| 14 | $1.514 \cdot 10^{-3}$0.021i |
| 15 | $2.461 \cdot 10^{-3}$0.022i |

# Пример 2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

$\alpha := 0.5 \qquad N := 20 \qquad AM := 1 \qquad b := 0.5 \cdot \pi \cdot \alpha \qquad b = 0.785$

$$p(t) := AM \cdot \max\left(\operatorname{sign}\left(\cos\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right), 0\right)$$

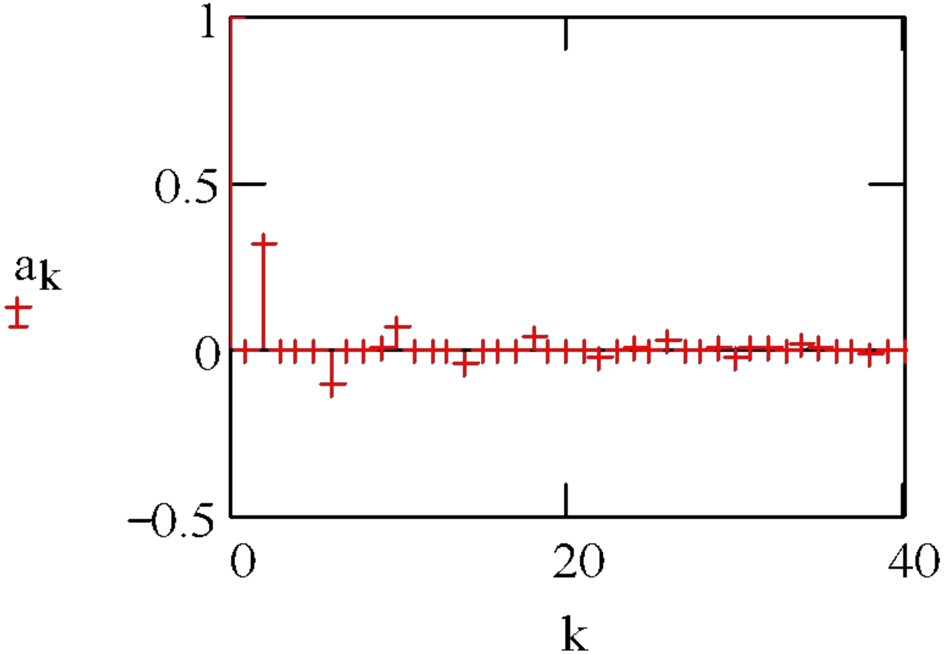


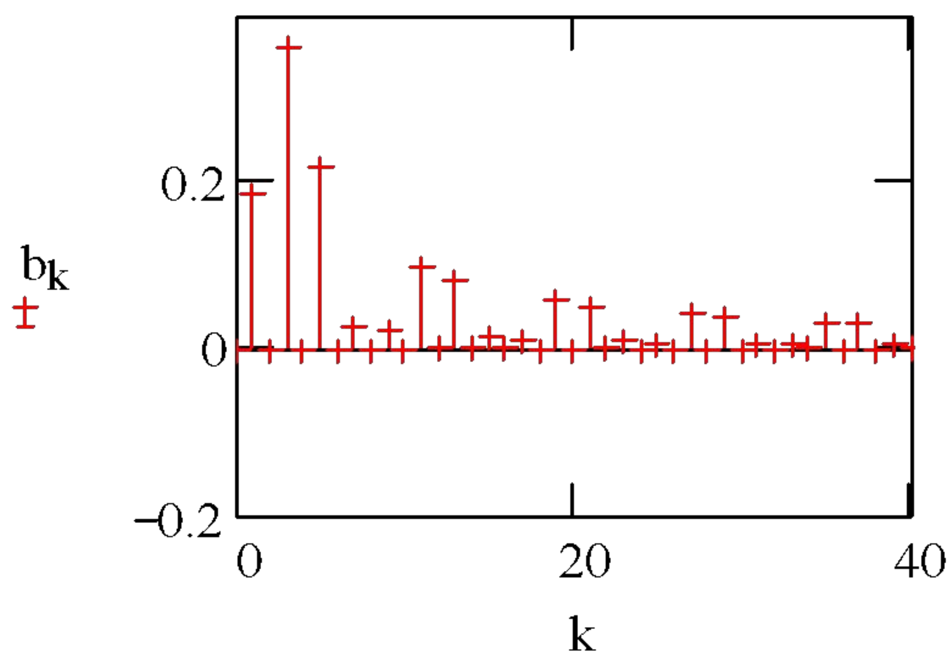
$$k := 0 .. 40$$

$$v_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} p(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt \qquad v_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} p(t)\, dt$$

$$w_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} p(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt$$

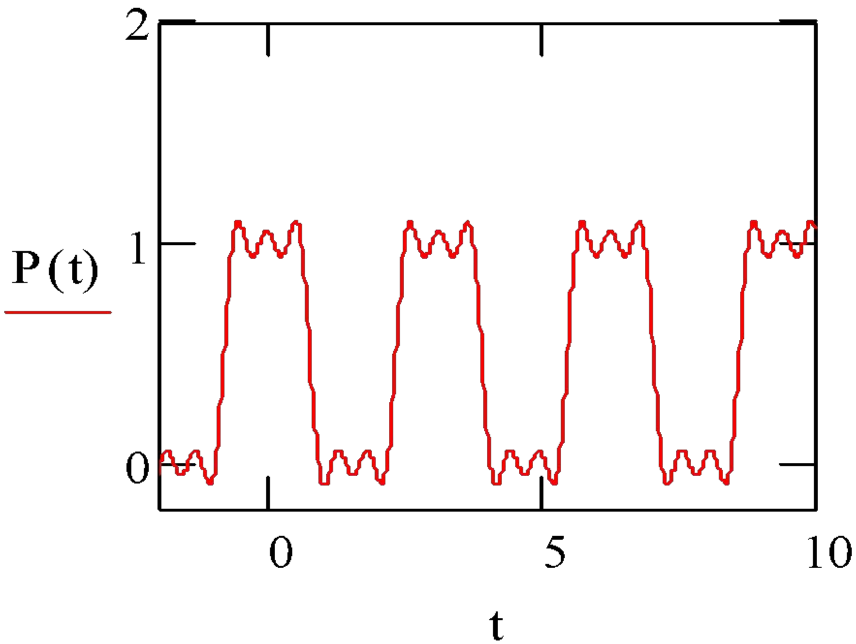
$$v_0 = 0.5$$

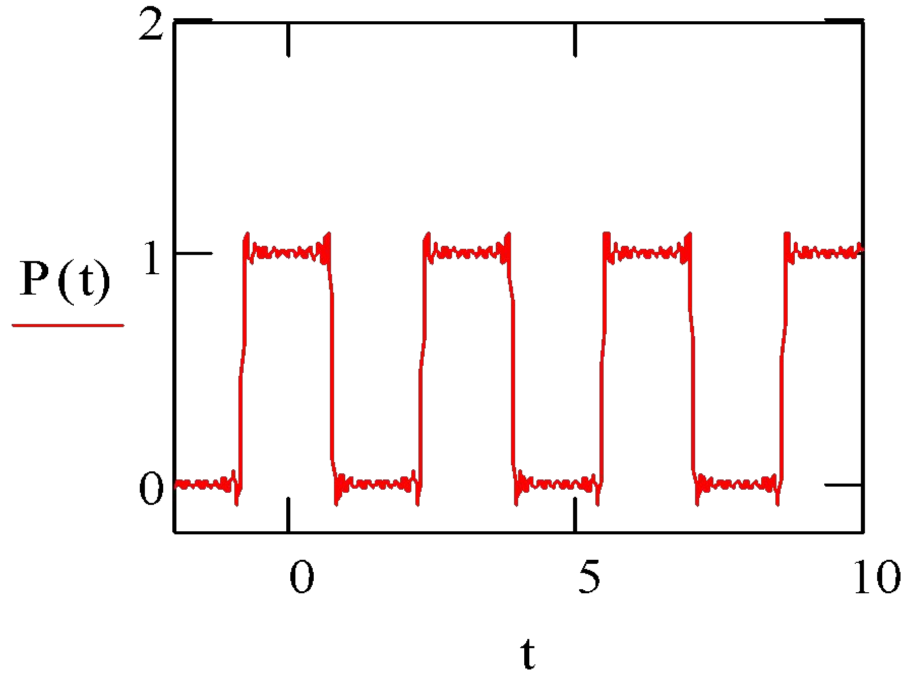

1
0.5
0
−0.5
0
20
40
k
$a_k$


0.2
0
−0.2
0
20
40
k
$b_k$

$$P(t) := v_0 + \sum_{k=1}^{10} \left(v_k \cdot \cos(k \cdot t)\right)$$

$$P(t) := v_0 + \sum_{k=1}^{40} \left(v_k \cdot \cos(k \cdot t)\right)$$



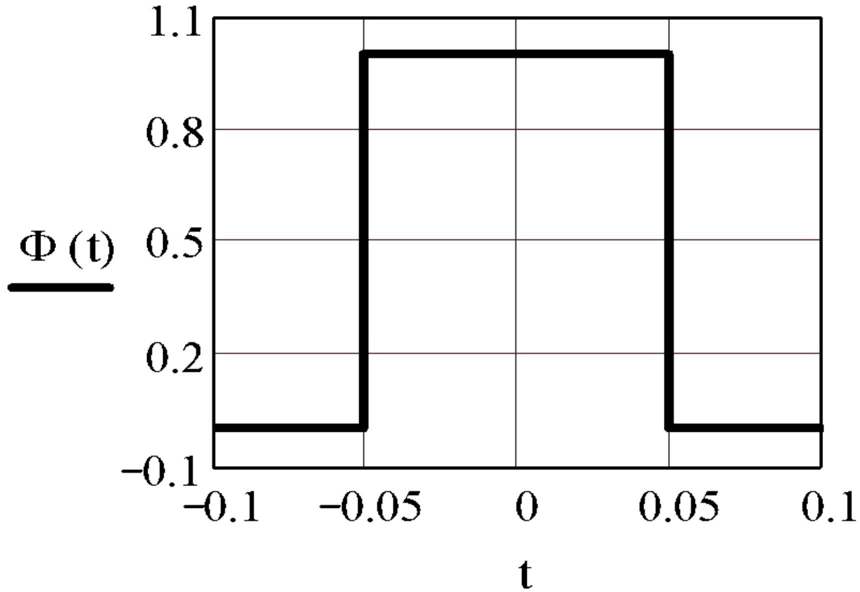



# Интегральное преобразование Фурье

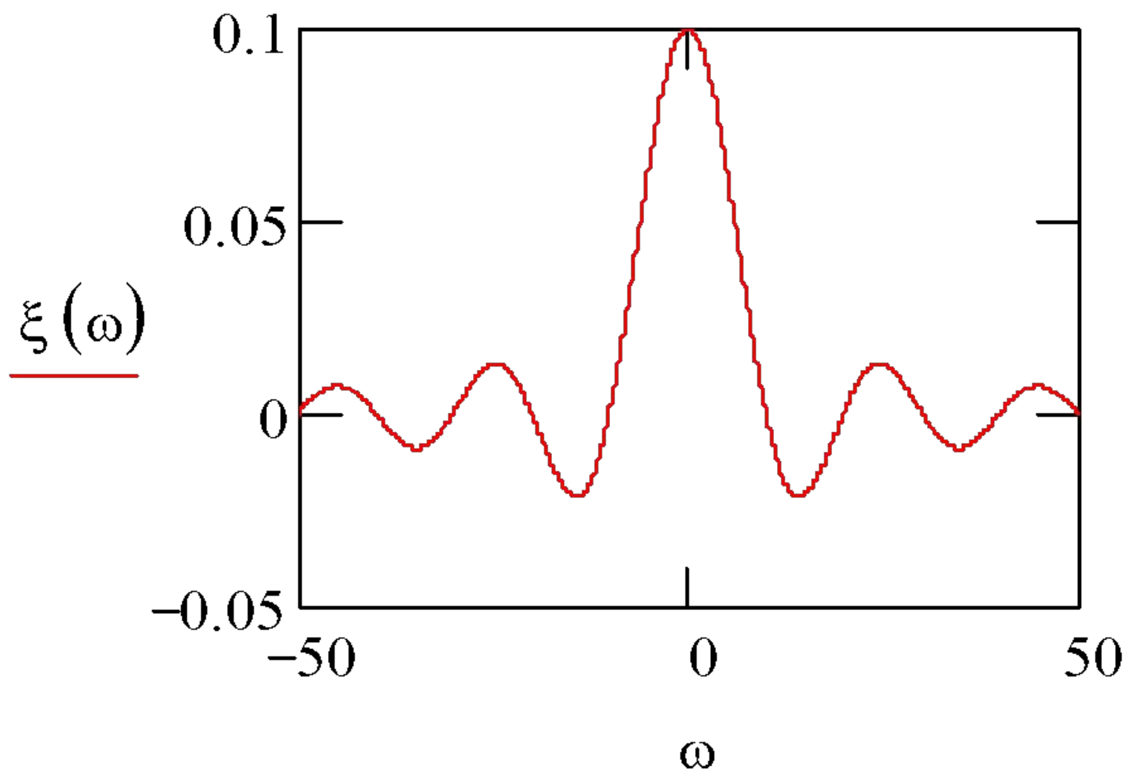
## Пример. Одиночный прямоугольный импульс

$\tau := 0.1$

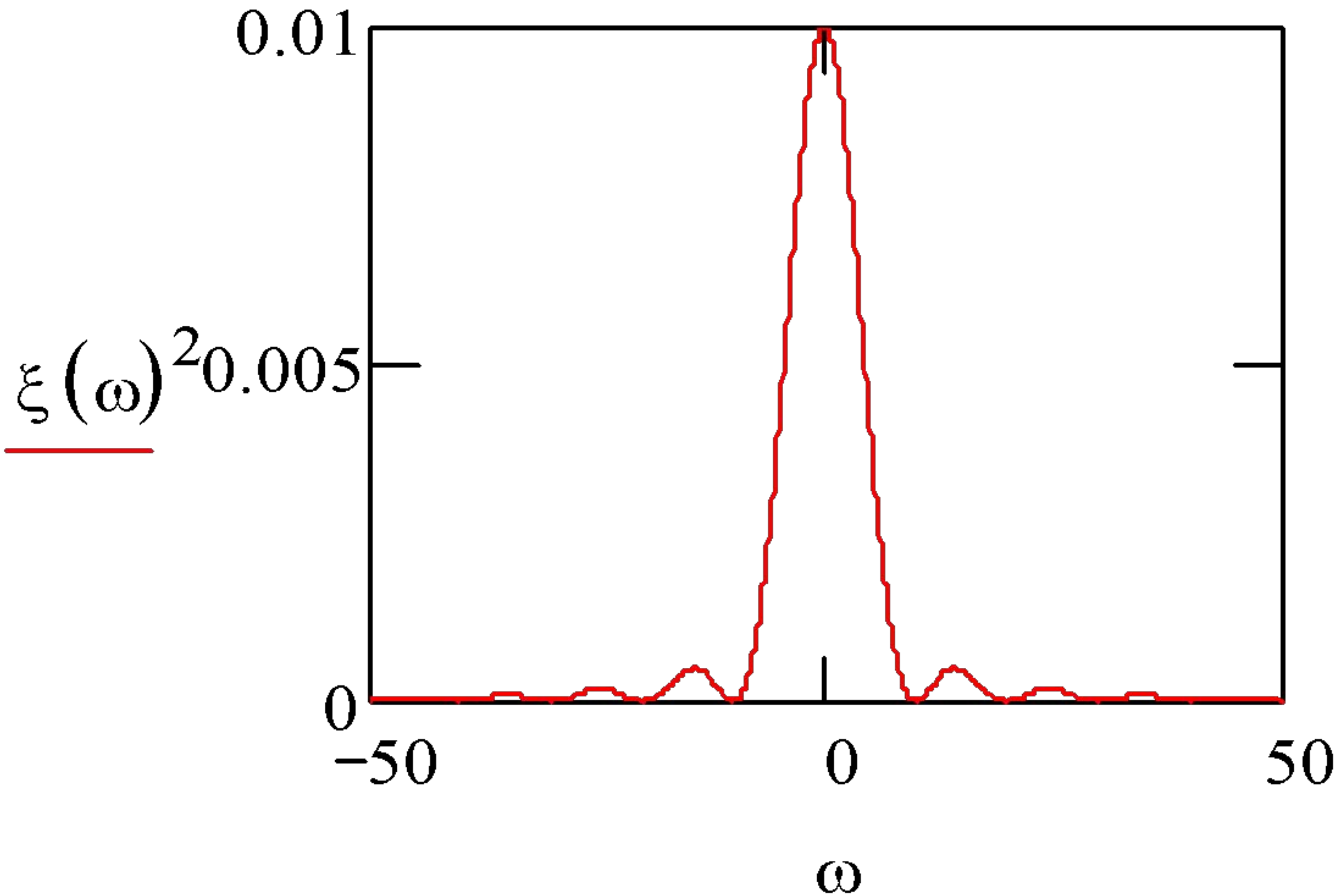
$$\Phi(t) := \begin{cases} AM & \text{if } 0 \le |t| \le 0.5 \cdot \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\xi(\omega) := \int_{-0.5\cdot\tau}^{0.5\cdot\tau} \Phi(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot\omega\cdot t)\,dt$$



# Спектральная плотность прямоугольного импульса



# <u>Модели случайных процессов</u> (план)

**см [1]. Глава 2**

- Спектральный анализ сигналов
- <u>Гауссовский случайный процесс</u>
- Узкополосный стационарный шум
- Узкополосный гауссовский шум
- Узкополосный негауссовский шум
- Диффузионный (винеровский) процесс
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

# Гауссовский случайный процесс

## Многомерная гауссовская плотность вероятности

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_N) =$$

$$= A \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}\cdot(x_k - \mu_k)\cdot(x_j - \mu_j)\right\};$$

$$A = \frac{\sqrt{det(\beta)}}{(2\cdot\pi)^{N/2}}.$$

Смысл параметров гауссовской плотности вероятности:

$$\overline{x_k} = \mu_k;$$

$$K_{k,j} = (\beta^{-1})_{k,j}.$$

# Гауссовский случайный процесс-2

Одномерная плотность вероятности

$$w(x_1) =$$

$$= A \cdot exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \beta(x_1 - \mu_1) \cdot (x_1 - \mu_1)\right\};$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma^2} \qquad A = \frac{\sqrt{det(\beta)}}{(2 \cdot \pi)^{N/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}$$

# Гауссовский случайный процесс-3

Одномерная плотность вероятности примет вид:

$$w(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2}\left(x_1 - \overline{x_1}\right)^2\right\}.$$

В этой формуле все параметры выражены через экспериментально измеримые величины.

# Гауссовский случайный процесс-4

## Свойства одномерного распределения.

Отличны от нуля лишь <u>четные</u> центральные моменты

$$\overline{(x-\overline{x})^n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)\sigma^n; \quad (n - \text{четное})$$

$$\overline{(x-\overline{x})^n} = 0; \quad (n - \text{нечетное})$$

$$\overline{(x-\overline{x})^1} = 0; \qquad \overline{(x-\overline{x})^2} = \sigma^2;$$

$$\overline{(x-\overline{x})^3} = 0; \qquad \overline{(x-\overline{x})^4} = 3\sigma^4;$$

$$\overline{(x-\overline{x})^5} = 0; \qquad \overline{(x-\overline{x})^6} = 3 \cdot 5\sigma^6.$$

# Гауссовский случайный процесс-5

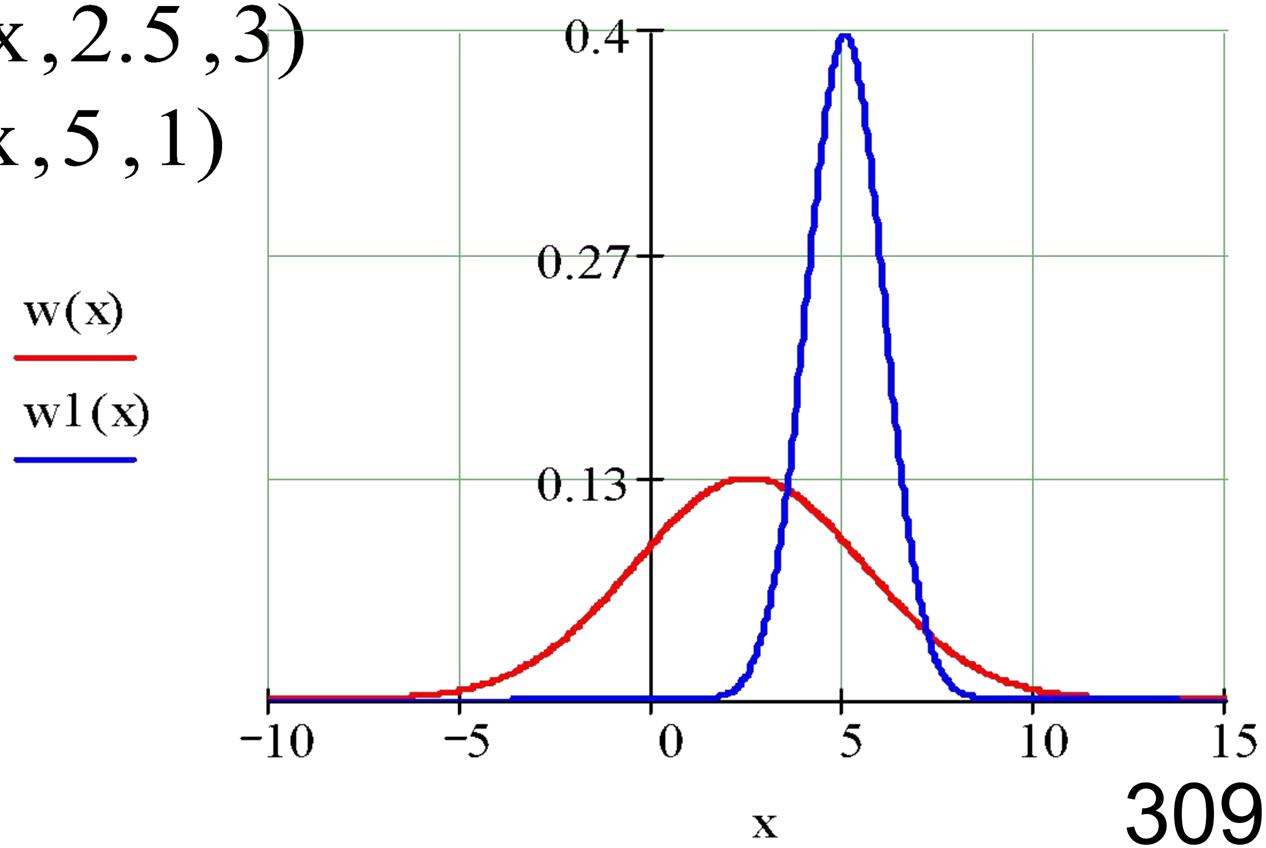
Реализация в Mathcad.

dnorm(x, mu, sigma)

Returns the probability density for the normal distribution with mean mu and standard deviation sigma.

$$w(x) := \mathrm{dnorm}(x, 2.5, 3)$$

$$w1(x) := \mathrm{dnorm}(x, 5, 1)$$



# Гауссовский случайный процесс-6

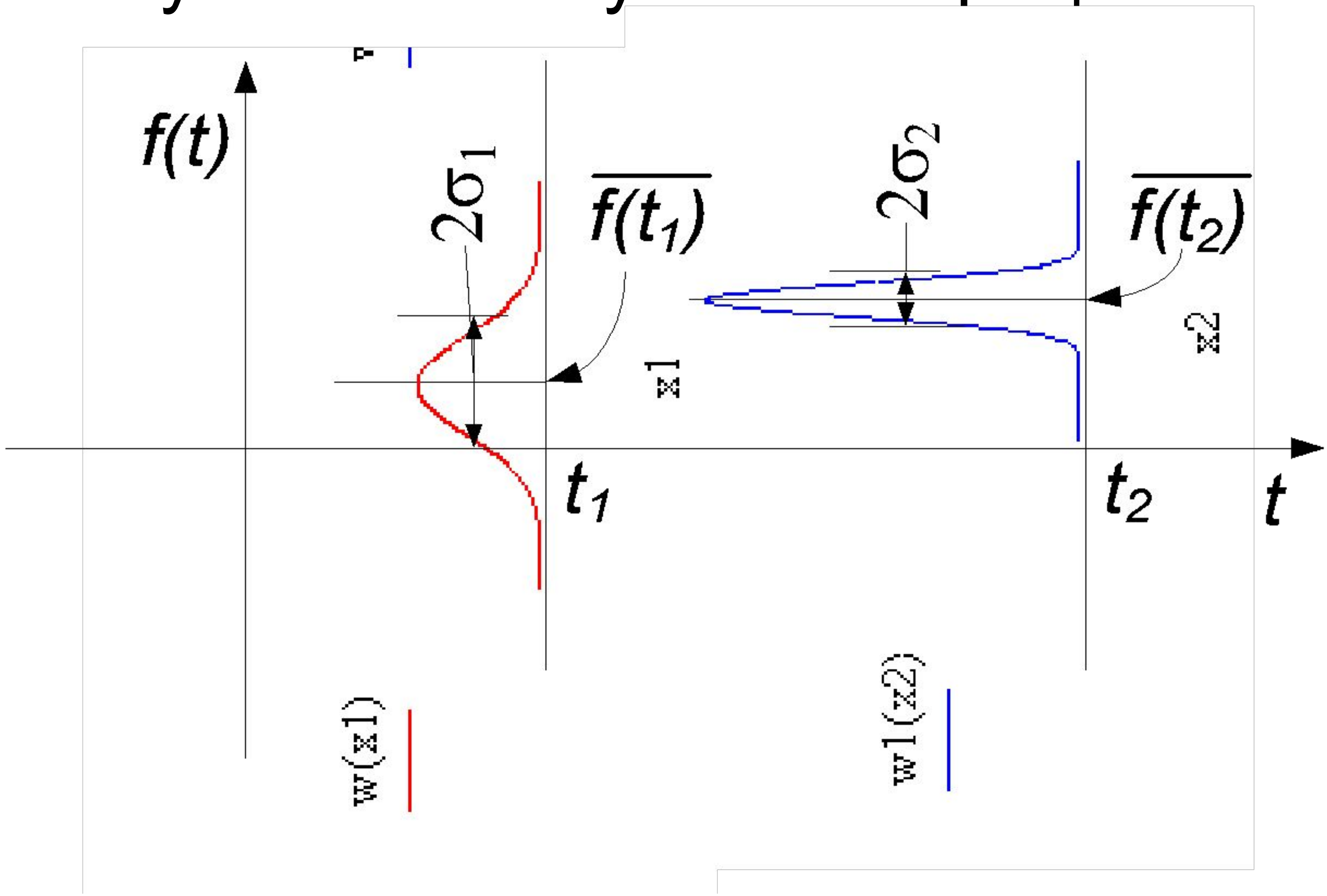
## Применение для случайных процессов

$$1)\quad x = f(t)$$

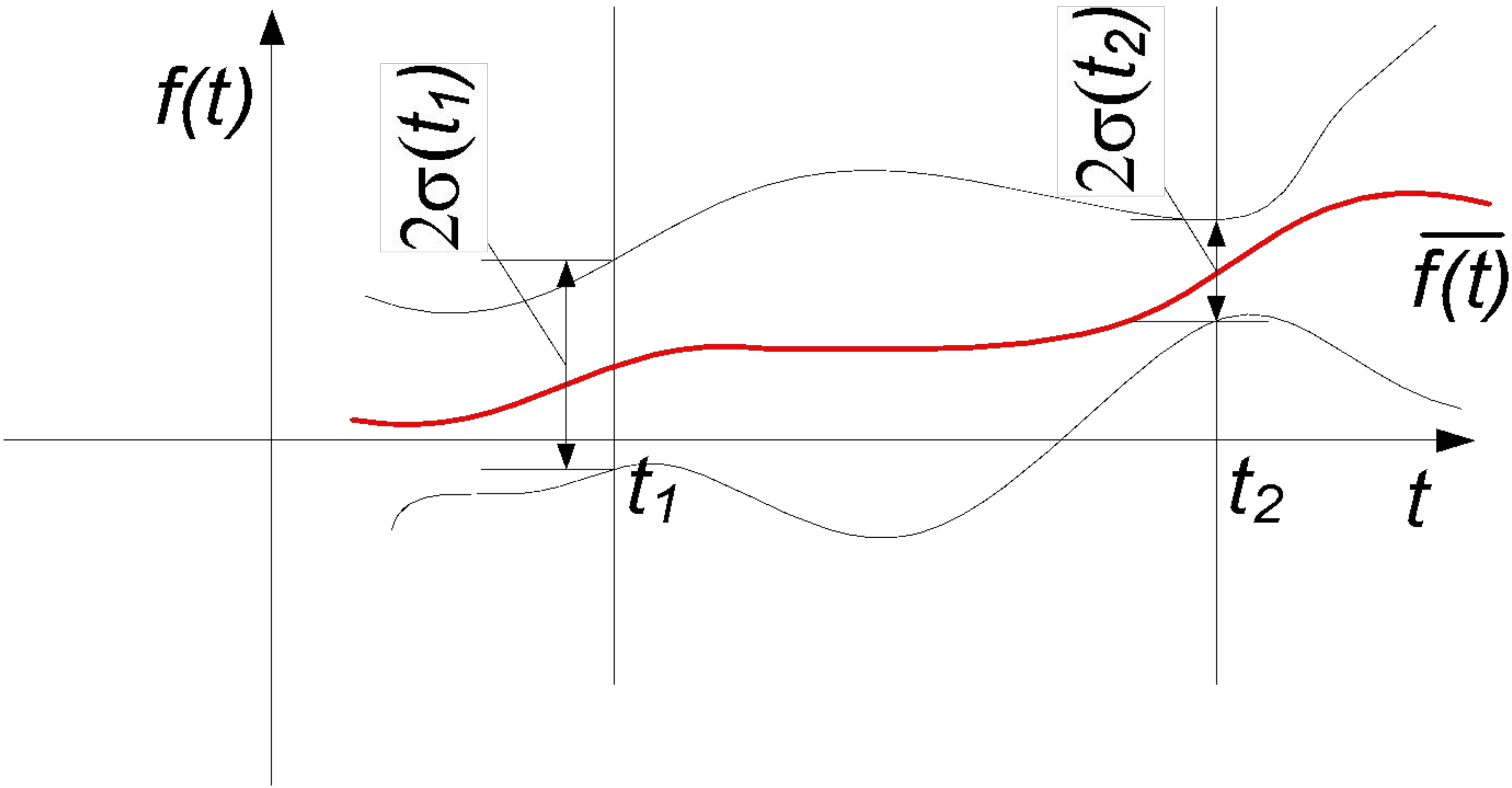
$$2)\quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\left(x-\overline{x}\right)^2\right\}.$$

$$3)\quad w(f,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma(t)^2}\left(f(t)-\overline{f(t)}\right)^2\right\}$$

# Гауссовский случайный процесс-7



# Гауссовский случайный процесс-8



# Гауссовский случайный процесс-9

Для вычисления корреляционного момента достаточно парной (для 2-х переменных) плотности вероятности

$$1)\ w(x_1,\ x_2) =$$

$$= A \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\beta_{11}(x_1-\mu_1)^2 + 2\beta_{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \beta_{22}(x_2-\mu_2)^2\right)\right\};$$

$$2)\ A = \frac{\sqrt{det(\beta)}}{(2\cdot\pi)}. \quad det(\beta) = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}{}^2,$$

$$3)\ K_{12} = \overline{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)} = (\beta^{-1})_{12};$$

$$4)\ K_{11} = \sigma_1{}^2 = (\beta^{-1})_{11}; \quad K_{2,2} = \sigma_2{}^2 = (\beta^{-1})_{22};$$

$$5)\ K = \beta^{-1}.$$

Наша цель – выразить все параметры через экспериментально измеримые данные

# Гауссовский процесс-10

$$1)\ \hat{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix},\quad det(\hat{\beta})=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}$$

$$2)\ \hat{K}=\hat{\beta}^{-1}$$

$$3)\ \hat{\beta}^{-1}=\frac{1}{det(\hat{\beta})}\begin{pmatrix}\beta_{22} & -\beta_{12}\\ -\beta_{21} & \beta_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1 & K\\ K & D_2\end{pmatrix}.$$

$$4)\ K_{11}=\frac{\beta_{22}}{det(\hat{\beta})}=D_1,\quad K_{22}=\frac{\beta_{11}}{det(\hat{\beta})}=D_2,\quad K_{12}=\frac{-\beta_{12}}{det(\hat{\beta})}=K$$

$$5)\ det(\hat{\beta}^{-1})=\frac{1}{det(\hat{\beta})}=D_1D_2-K^2=D_1D_2(1-R^2),\quad 6)\ R^2=\frac{K^2}{D_1D_2};\ R=\frac{K}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$7)\ det(\hat{\beta})=\frac{1}{\sigma_1^{\,2}\sigma_2^{\,2}(1-R^2)};\qquad 8)\ D_1=\sigma_1^{\,2};\ \ D_2=\sigma_2^{\,2}$$

$$9)\ \beta=det(\hat{\beta})\begin{pmatrix}D_2 & -K\\ -K & D_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma_1^{\,2}\sigma_2^{\,2}(1-R^2)}\begin{pmatrix}\sigma_2^{\,2} & -K\\ -K & \sigma_1^{\,2}\end{pmatrix}=\frac{1}{(1-R^2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^{\,2}} & -\frac{R}{\sigma_1\sigma_2}\\ -\frac{R}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^{\,2}}\end{pmatrix}$$

# Гауссовский процесс-11

Таким образом, плотность вероятности может быть выражена через экспериментально измеримые величины:

$$w(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \cdot$$

$$\cdot\, exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)} \cdot \left(\frac{\left(x_1-\overline{x_1}\right)^2}{\sigma_1^{\,2}} - 2R\frac{\left(x_1-\overline{x_1}\right)\left(x_2-\overline{x_2}\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\left(x_2-\overline{x_2}\right)^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)\right\};$$

Рассмотрим применение распределения для описания случайных процессов

$$x_1 = f(t_1), \quad x_2 = f(t_2)$$

# Гауссовский процесс-12

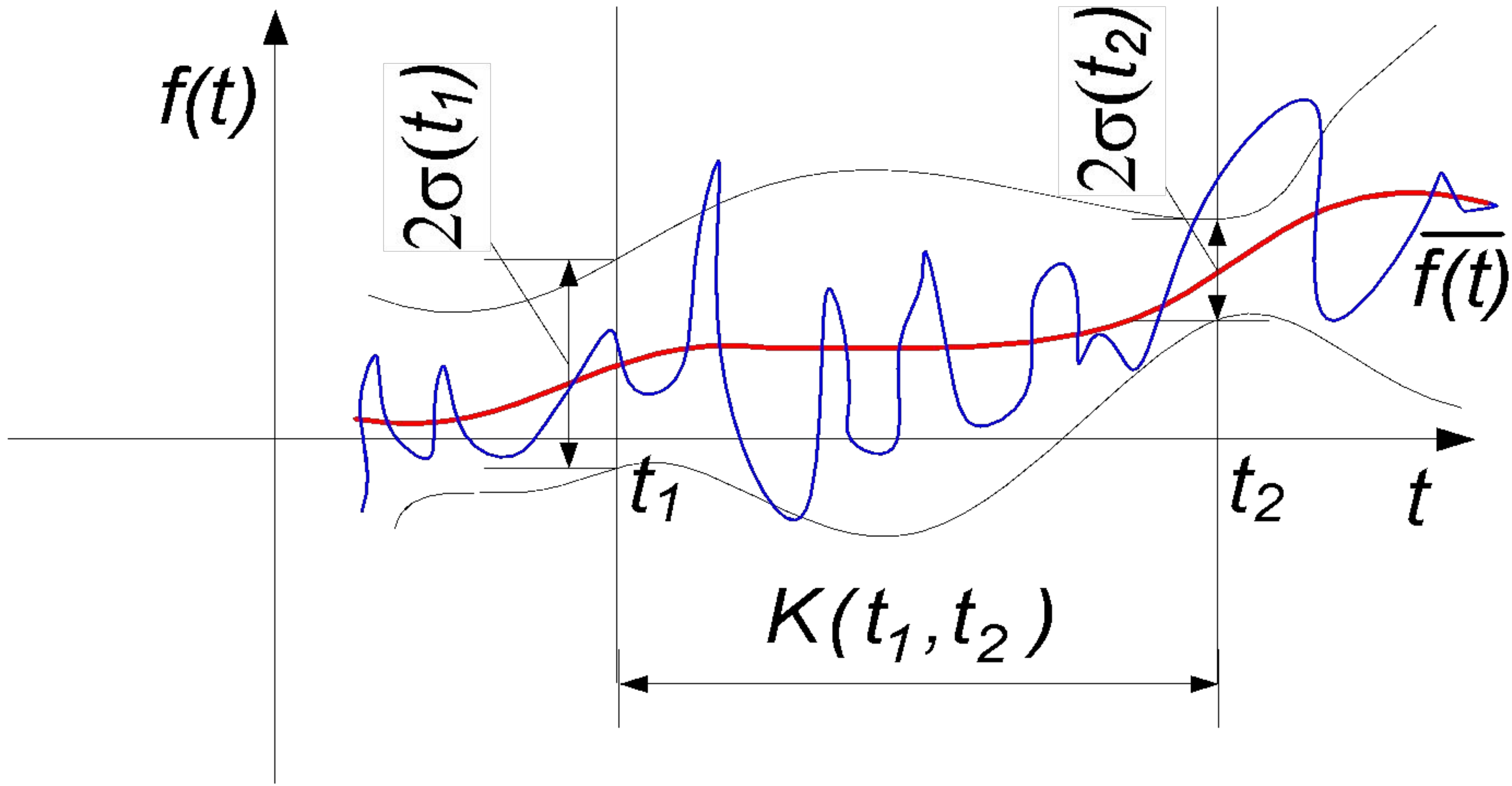
$$\overline{x_1} = \overline{f(t_1)}, \quad \overline{x_2} = \overline{f(t_2)};$$

$$D(t_1) = \overline{\left(f(t_1) - \overline{f(t_1)}\right)^2}; \quad D(t_2) = \overline{\left(f(t_2) - \overline{f(t_2)}\right)^2}$$

$$K_{12} = \overline{(x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})};$$

$$K(t_1, t_2) = \overline{\left(f(t_1) - \overline{f(t_1)}\right)\left(f(t_2) - \overline{f(t_2)}\right)}.$$

# Гауссовский процесс-13



# Гауссовский случайный процесс-14

Выводы:

1. Если процесс гауссовский, то все его характеристики можно вычислить. Любые моменты (средние) выражаются через параметры $\mu$ и $\beta$.
2. Для стационарного гауссовского процесса параметры $\mu$ и $\beta$ не зависят от времени.

# <u>Модели случайных процессов</u> (план)

**см [1]. Глава 2**

- Спектральный анализ сигналов
- Гауссовский случайный процесс
- <u>Узкополосный стационарный шум</u>
- Узкополосный гауссовский шум
- Узкополосный негауссовский шум
- Диффузионный (винеровский) процесс
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

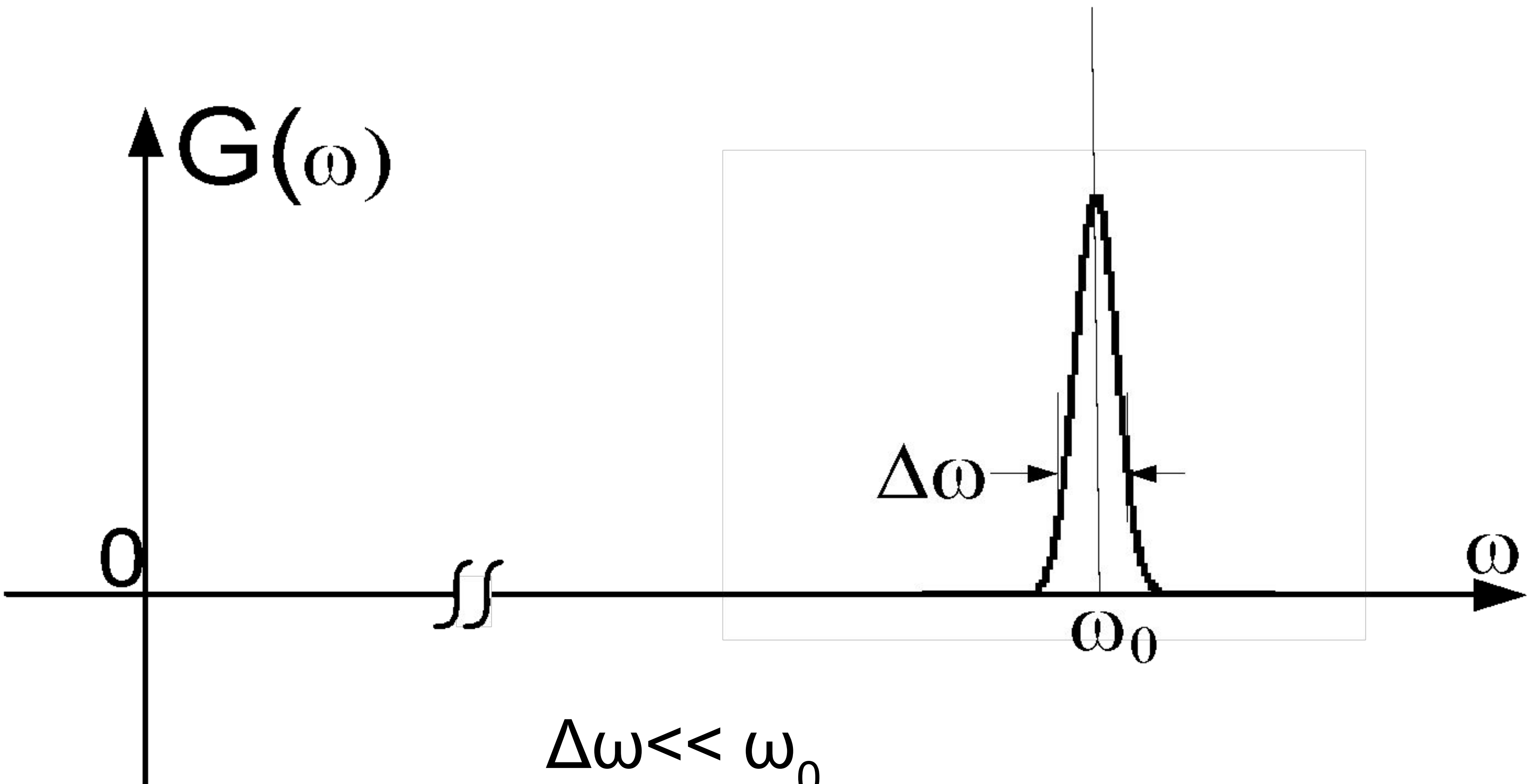
# Узкополосный стационарный шум

Шум узкополосный, если спектральная плотность $G(\omega)$ отлична от нуля в узкой области частот $\Delta\omega$ вблизи некоторой частоты $\omega_0$:

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

в виде колебаний, близких к гармоническим

# Узкополосный стационарный шум -2




$\Delta\omega << \omega_0$

# Узкополосный стационарный шум -2

Флуктуационную компоненту представим в виде (модель узкополосного шума):

$$\xi(t) = \rho(t)\ \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right],$$

где

*ρ(t) – огибающая (амплитуда).*

*ϕ(t) – фаза.*

Вместо огибающей и фазы также вводят квадратурные компоненты *a(t), b(t)*

$$\xi(t) = a(t)\ \cos\left[\omega_0 t\right] - b(t)\ \sin\left[\omega_0 t\right]$$

*Таким образом, мы выделяем функции времени* $\cos\left[\omega_0 t\right],\ \sin\left[\omega_0 t\right]$

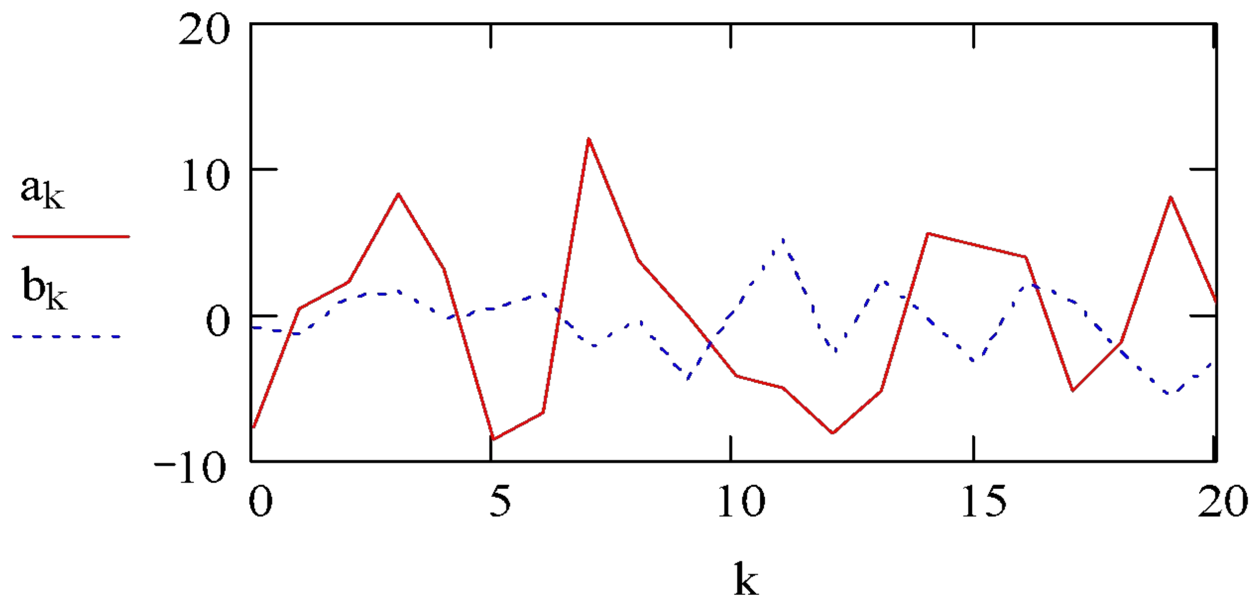
- *быстрые*
- *медленные a(t), b(t) или ρ(t), ϕ(t)*

# Пример реализации узкополосного шума-1

Используем генератор гауссовского шума

$k := 0 .. 20$

$a := \mathrm{rnorm}(21, 0, 5)$ $\qquad$ $b := \mathrm{rnorm}(21, 0, 3)$



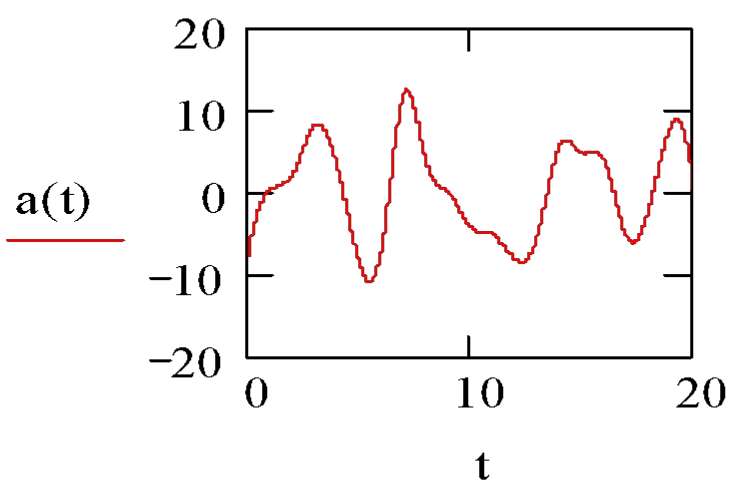
# Пример реализации узкополосного шума-2

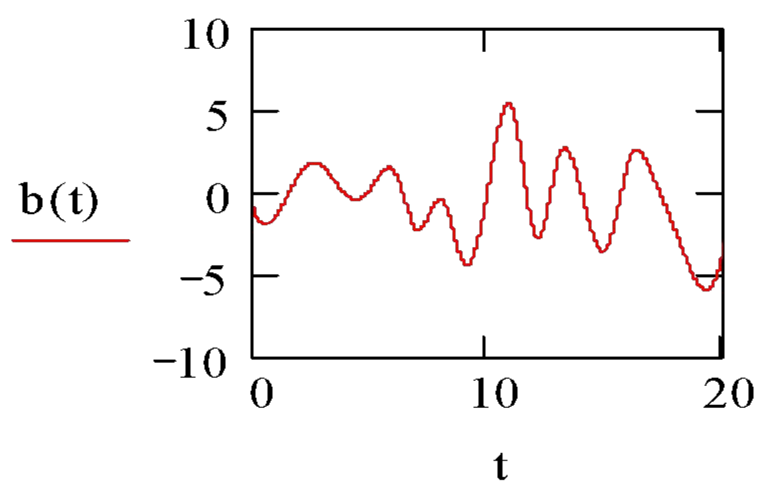
Сгладим полученные случайные зависимости, используя кубическую интерполяцию

$$x_k := k$$

$$s := \mathrm{cspline}(x, a) \qquad s1 := \mathrm{cspline}(x, b)$$

$$a(t) := \mathrm{interp}(s, x, a, t) \qquad b(t) := \mathrm{interp}(s1, x, b, t)$$

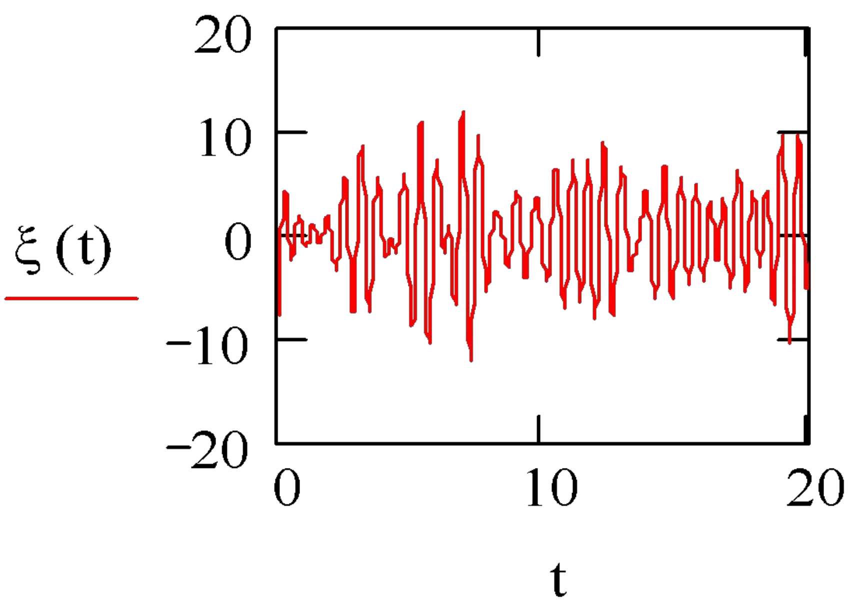


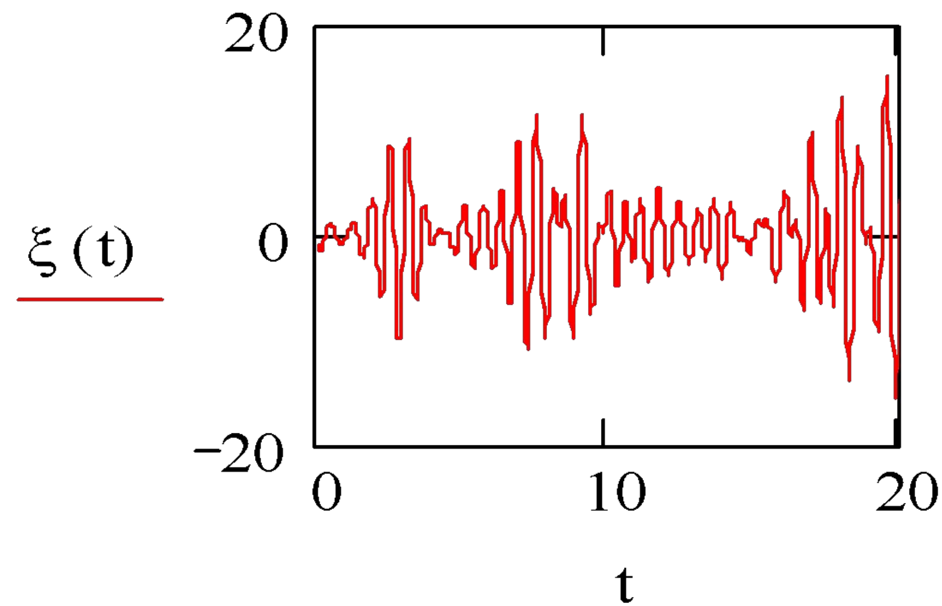



# Пример реализации узкополосного шума-3

Скомбинируем модельную узкополосную случайную функцию и построим несколько ее реализаций

$$\xi(t) := a(t) \cdot \cos(10 \cdot t) - b(t) \cdot \sin(10 \cdot t)$$



# Постановка задачи:

*Задача: зная свойства шума ξ(t) найти статистические характеристики огибающей и фазы или квадратурных компонент.*

*Все рассматриваемые случайные процессы*

- *Сам шум*
- *Его амплитуда и фаза*
- *Квадратурные компоненты*

*Считаются стационарными случайными функциями времени.*

# Корреляционные и спектральные характеристики квадратурных компонент

- Предполагаем, что $\langle \xi \rangle \mp 0$
- *Так как*

$$\xi(t) = a(t)\,\cos\left(\omega_0 t\right) - b(t)\,\sin\left(\omega_0 t\right)$$

*то* $\langle a \rangle = 0, \quad \langle b \rangle = 0$

*Переходим к анализу корреляционной функции*

Считаем известной корреляционную функцию

$$K(\tau) = \left\langle \xi\, \xi_\tau \right\rangle$$

Подставим в эту формулу представление $\xi(t)$ через квадратурные компоненты

$$K(\tau) = \left\langle \xi\, \xi_\tau \right\rangle =$$

$$= \overline{\left[a(t)\,\cos\left(\omega_0 t\right) - b(t)\,\sin\left(\omega_0 t\right)\right]\left[a(t+\tau)\,\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right) - b(t+\tau)\,\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right)\right]} =$$

$$= \overline{\left[a\cos\left(\omega_0 t\right) - b\,\sin\left(\omega_0 t\right)\right]\left[a_\tau\,\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right) - b_\tau\,\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right)\right]} =$$

$$= \overline{aa_\tau}\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right) + \overline{bb_\tau}\sin\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right) -$$

$$-\overline{ba_\tau}\,\sin\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right) - \overline{a\,b_\tau}\cos\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right).$$

$$\overline{aa_\tau} = \overline{a(t)a(t+\tau)}; \qquad \overline{bb_\tau} = \overline{b(t)b(t+\tau)};$$

$$\overline{ab_\tau} = \overline{a(t)b(t+\tau)}; \qquad \overline{ba_\tau} = \overline{b(t)a(t+\tau)}.$$

Учтем известные тригонометрические формулы

$$\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_0\tau)+\cos(\omega_0(2t+\tau)\right];$$

$$\sin\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_0\tau)-\cos(\omega_0(2t+\tau)\right];$$

$$\sin\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau)\right)=\frac{1}{2}\left[-\sin(\omega_0\tau)+\sin(\omega_0(2t+\tau)\right];$$

$$\cos\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0 (t+\tau)\right)=\frac{1}{2}\left[\sin(\omega_0\tau)+\sin(\omega_0(2t+\tau)\right];$$

Подставим эти выражения в приведенное выше выражение $K(\tau)$

$$K(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\overline{aa_\tau}+\overline{bb_\tau}\right)\cos\left(\omega_0\tau\right)+\left(\overline{ba_\tau}-\overline{ab_\tau}\right)\sin\left(\omega_0\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\overline{aa_\tau}-\overline{bb_\tau}\right)\cos\left(\omega_0(2t+\tau)\right)+\left(\overline{ba_\tau}+\overline{ab_\tau}\right)\sin\left(\omega_0(2t+\tau)\right)\right\}$$

В силу стационарности здесь не должно быть явной зависимости от времени, поэтому

1) $\overline{aa_\tau}=\overline{bb_\tau}=\sigma^2 p(\tau);$

$\overline{aa}=\overline{bb}=\sigma^2=\overline{\xi\xi}.$ Это следует из равноправности амплитуд

2) $\overline{ab_\tau}=-\overline{ba_\tau}=\sigma^2 q(\tau)$

Здесь $p(\tau)$ и $q(\tau)$ некоторые пока неизвестные функции.

$p(\tau)$ Чётная функция аргумента τ

$q(\tau)$ Нечётная функция аргумента τ

$$K(\tau)=$$
$$=\sigma^2 p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right)-\sigma^2 q(\tau)\sin\left(\omega_0\tau\right)=$$
$$=\sigma^2\left[p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right)-q(\tau)\sin\left(\omega_0\tau\right)\right].$$

*Таким образом, получили*:

$$\boxed{K(\tau)=\sigma^2\left[p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right)-q(\tau)\sin\left(\omega_0\tau\right)\right]}$$

$$K(\tau)=\sigma^2 R(\tau)$$
$$R(\tau)=p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right)-q(\tau)\sin\left(\omega_0\tau\right)=$$
$$=r(\tau)\cos\left[\omega_0\tau+\psi(\tau)\right]$$

Где введена безразмерная корреляционная функция $R(\tau)$

Чтобы найти неизвестные функции $p(\tau),\ q(\tau)$, воспользуемся формулой Винера-Хинчина:

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\big(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau\big)d\omega.$$

$$G(\omega)=G(-\omega).$$

Интеграл от нечетной функции (содержит sin(ωτ)) равен нулю. В силу четности можно ограничиться интегралом от 0 до ∞

$$K(\tau)=2\int_{0}^{\infty} G(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=\int_{0}^{\infty} G^{+}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$$

$$\Omega=\omega-\omega_0$$

Сдвиг начала координат в точку $\omega_0$.

$$K(\tau)=\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\cos(\Omega\tau+\omega_0\tau)\,d\Omega$$

$$K(\tau)=\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\cos(\Omega\tau+\omega_0\tau)\,d\Omega=$$

$$=\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)[\cos(\Omega\tau)\cos(\omega_0\tau)-\sin(\Omega\tau)\sin(\omega_0\tau)]\,d\Omega=$$

$$=\cos(\omega_0\tau)\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\cos(\Omega\tau)\,d\Omega-\sin(\omega_0\tau)\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\sin(\Omega\tau)\,d\Omega.$$

*Сравнивая с полученным ранее выражением, найдем*

$$\sigma^2 p(\tau)=\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\cos(\Omega\tau)\,d\Omega$$

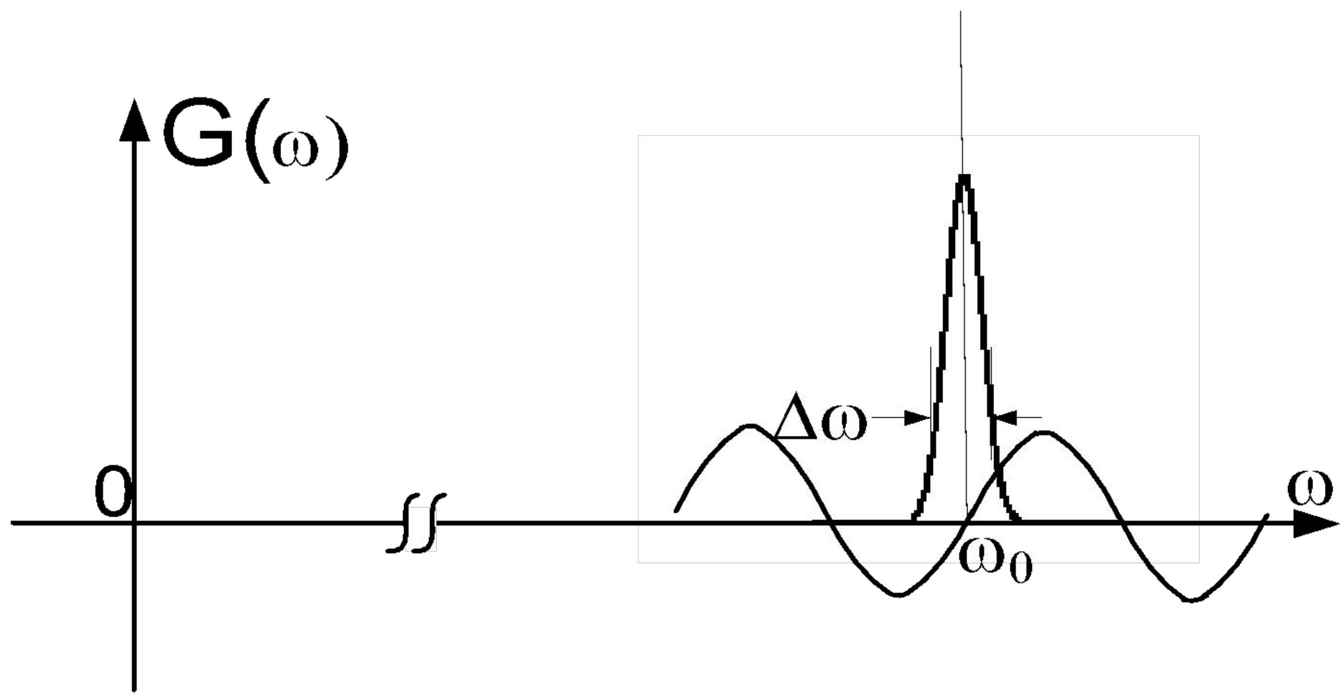
$$\sigma^2 q(\tau)=\int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega+\omega_0)\sin(\Omega\tau)\,d\Omega$$

$$\sigma^2 q(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\Omega + \omega_0)\sin(\Omega\tau)\,d\Omega$$

1) $q(\tau) = -q(-\tau);$

2) $ЕСЛИ: \quad G(\omega_0 - \Omega) = G(\omega_0 + \Omega)$

$то \quad q(\tau) = 0$



При этом предположении

$$K(\tau) = \sigma^2 \left[ p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right) - \boxed{q(\tau)} \sin\left(\omega_0\tau\right) \right]$$

$$K(\tau) = \sigma^2 p(\tau)\cos\left(\omega_0\tau\right)$$

$$\sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^{+}(\Omega + \omega_0)\cos(\Omega\tau)\, d\Omega$$

$$\overline{aa_\tau} = \overline{bb_\tau} = \sigma^2 p(\tau)$$

$p(\tau)$ Имеет свойства корреляционной функции

# <u>Модели случайных процессов</u> (план)

**см [1]. Глава 2**

- Спектральный анализ сигналов
- Гауссовский случайный процесс
- Узкополосный стационарный шум
- <u>Узкополосный гауссовский шум</u>
- Узкополосный негауссовский шум
- Диффузионный (винеровский) процесс
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

# Узкополосный стационарный гауссовский шум

$$\xi(t) = a(t)\ \cos(\omega_0 t) - b(t)\ \sin(\omega_0 t)$$

$$\overline{a} = 0;\ \ \overline{b} = 0;\quad \overline{ab} = 0$$

$$\overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{\xi^2} = \sigma^2$$

$$w(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}$$

Найдем плотность вероятности переменных $\rho$ и $\varphi$

$$w(\rho,\varphi)d\rho d\varphi = w(a,b)\Big|_{\substack{a=\rho\cos(\varphi)\\ b=\rho\sin(\varphi)}} \frac{\partial(a,b)}{\partial(\rho,\varphi)} d\rho d\varphi$$

$$a=\rho\cos(\varphi), \quad b=\rho\sin(\varphi),$$

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial a}{\partial \rho}\right)_{\varphi} & \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)_{\rho} \\ \left(\frac{\partial b}{\partial \rho}\right)_{\varphi} & \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi}\right)_{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\left[\cos(\varphi)\right]^2 + \rho\left[\sin(\varphi)\right]^2 = \rho;$$

$$w(a,b)\Big|_{\substack{a=\rho\cos(\varphi)\\ b=\rho\sin(\varphi)}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}\right)\Bigg|_{\substack{a=\rho\cos(\varphi)\\ b=\rho\sin(\varphi)}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$w(\rho,\varphi)d\rho d\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\rho d\rho d\varphi$$

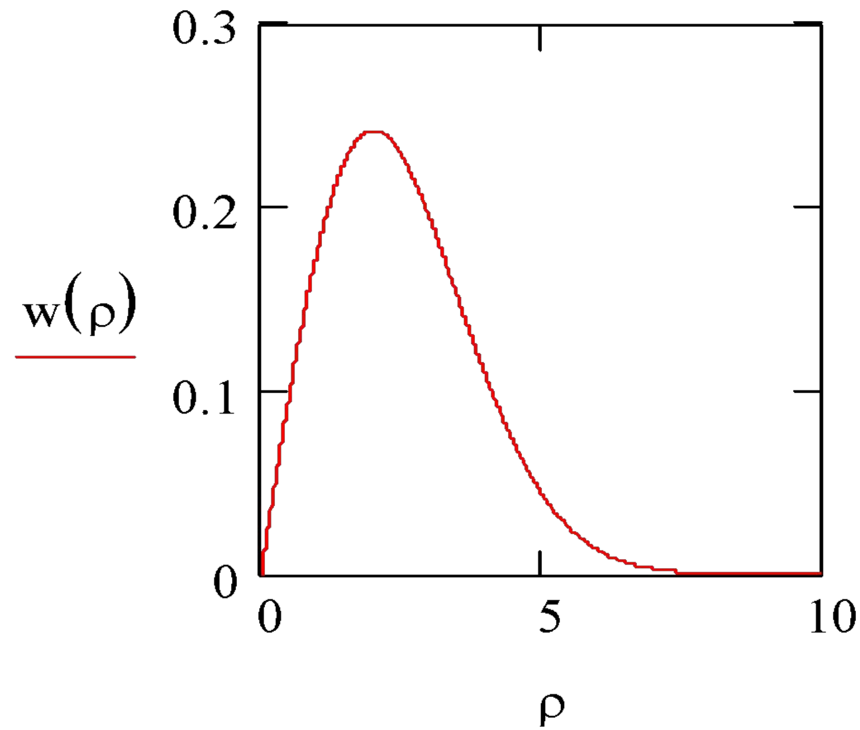
Проинтегрируем по углам  и получим распределение по $\rho$

$$w(\rho)d\rho = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\rho d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\rho d\rho$$

Полученное распределение носит название <u>распределения Релея (Рэлея)</u>

$$w(\rho) = \frac{1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\rho$$

$$\mathrm{w}(\rho) := \rho \cdot \mathrm{dnorm}(\rho, 0, 2)$$



# Моменты распределения Рэлея:

$$w(\rho) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left( -\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \right) \rho.$$

$$\left\langle \rho^{2n} \right\rangle = \int_0^\infty \rho^{2n} w(\rho) d\rho = 2^n n! \sigma^{2n};$$

$$\left\langle \rho^{2n+1} \right\rangle = \int_0^\infty \rho^{2n+1} w(\rho) d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1)!! \sigma^{2n+1};$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma};$$

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma};$$

$$\langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{\pi}{2}.$$

Используем полученные результаты для анализа суперпозиции гармонического сигнала и гауссовского шума. Случайный процесс имеет вид «Сигнал» + «Шум»

1) $x(t) = S(t) + \xi(t)$.

2) $S(t) = a_S(t)\ \cos(\omega_0 t) - b_S(t)\ \sin(\omega_0 t) = \rho_S \cos\left[\omega_0 t + \varphi_S(t)\right]$;

3) $\xi(t) = a(t)\ \cos(\omega_0 t) - b(t)\ \sin(\omega_0 t)$;

4) $x(t) = \left[a_S(t) + a(t)\right] \cos(\omega_0 t) - \left[b_S(t) + b(t)\right] \sin(\omega_0 t) =$

$$= \rho(t) \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right].$$

*Далее для краткости опустим временной аргумент*

5) $\rho = \sqrt{\left(a + a_S\right)^2 + \left(b + b_S\right)^2}$;

6) $a = \rho\cos\varphi - a_S$; 7) $b = \rho\sin\varphi - b_S$.

Будем искать вероятностные характеристики огибающей и фазы, $\rho$ и $\varphi$ процесса *x(t).*
Исходим из распределения квадратурных компонент шума:

$$w(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}$$

Так как

$$a = \rho\cos\varphi - a_S; \quad b = \rho\sin\varphi - b_S.$$

якобиан имеет прежний вид

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial a}{\partial \rho}\right)_{\varphi} & \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)_{\rho} \\ \left(\frac{\partial b}{\partial \rho}\right)_{\varphi} & \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi}\right)_{\rho} \end{pmatrix} = \rho.$$

$$a^2+b^2=\left(\rho\cos\varphi-a_S\right)^2+\left(\rho\sin\varphi-b_S\right)^2=$$

$$=\rho^2-2\rho(a_S\cos\varphi+b_S\sin\varphi)+a_S{}^2+b_S{}^2=$$

$$=\rho^2-2\rho\rho_S\cos(\varphi-\varphi_S)+\rho_S{}^2.$$

$$w(a,b)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\rho\exp\left\{-\frac{\rho^2-2\rho\rho_S\cos(\varphi-\varphi_S)+\rho_S{}^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Будем искать распределение по ρ

$$w(\rho) = \int_0^{2\pi} w(\rho, \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left\{ -\frac{\rho^2 - 2\rho\rho_S \cos(\varphi - \varphi_S) + \rho_S{}^2}{2\sigma^2} \right\} =$$

$$= \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2}\right) \exp\left\{ -\frac{\rho^2 + \rho_S{}^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

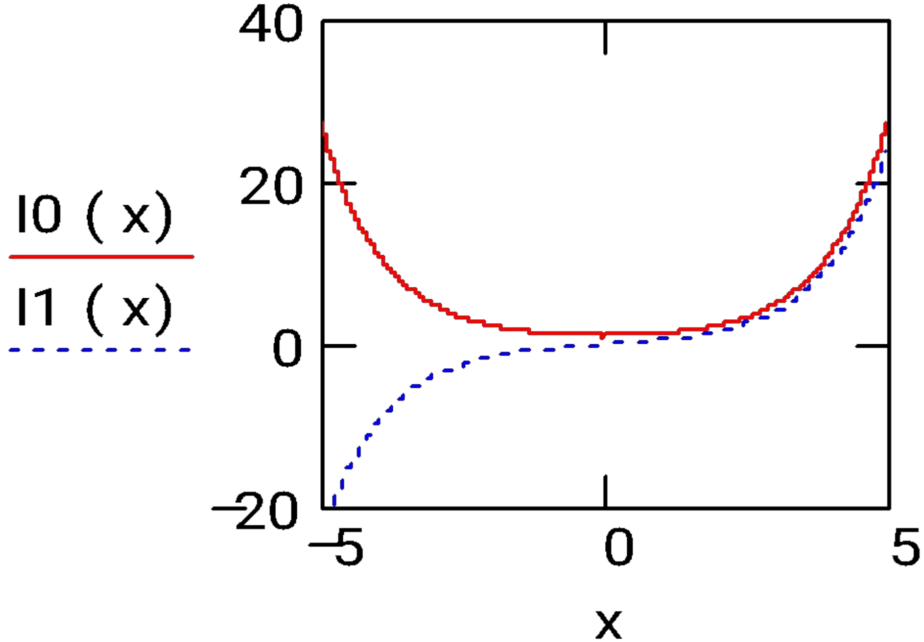
*Где* $I_0\left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2}\right)$ *модифицированная функция Бесселя.*

$I_n(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя*

$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0.$

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$x := -5, -4.9999 \,..\, 5$$



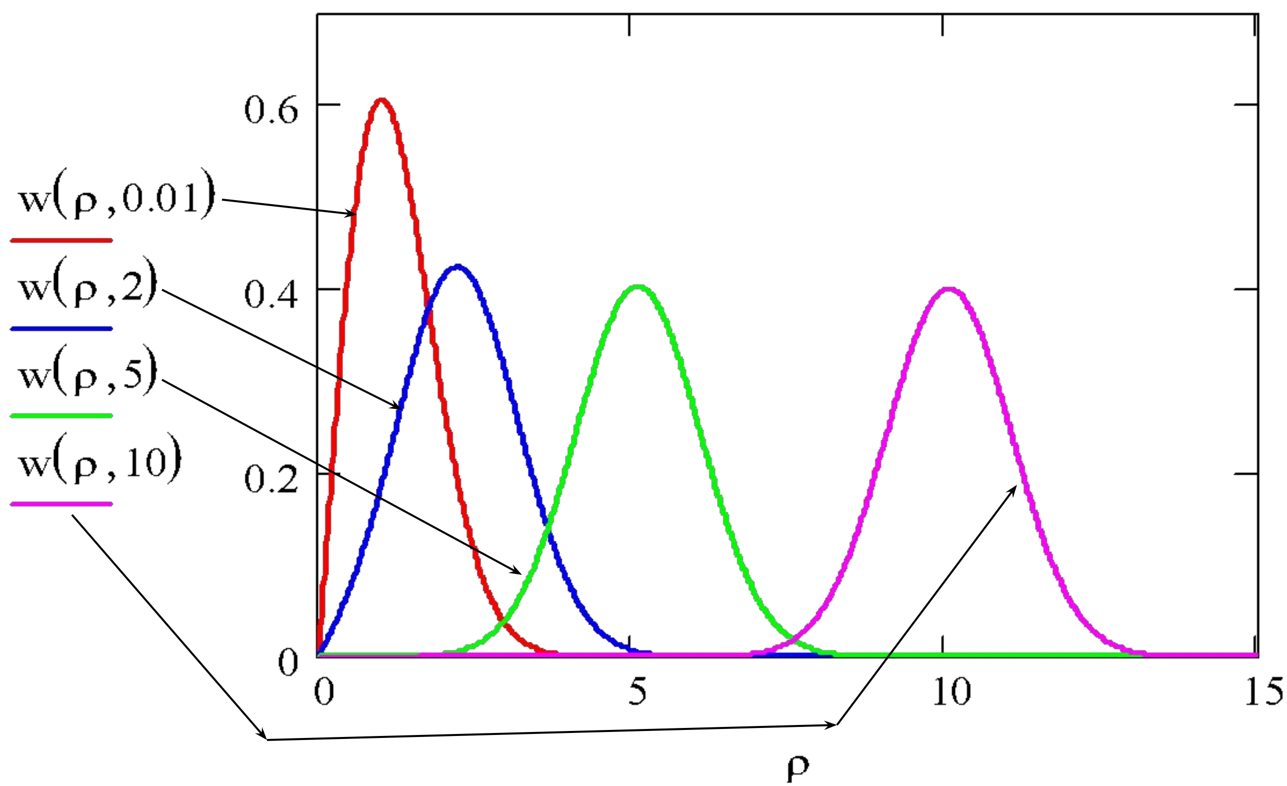

Более подробно о модифицированной функции Бесселя см. Ю.Н. Бронштейн и К.А.Семендяев «Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов» С. 464.

*Получили обобщенное распределение Рэлея*

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2+\rho_S{}^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

*Параметр* $\mu = \dfrac{\rho_S}{\sigma}$ *имеет смысл отношения* $\dfrac{\textit{сигнал}}{\textit{шум}}$

$$w(\rho,\mu) := \rho\cdot \mathrm{In}(0,\rho\cdot\mu)\cdot\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(\rho^2+\mu^2\right)\right]$$



# Замечание об использовании Mathcad.

В Mathcad имеется специальная функция

$$In(m\ ,x)$$

Returns the *m*-th order modified Bessel function of the first kind. *x* must be real. *m* must be between 0 and 100 inclusive.

Именно этот оператор использовался выше.

# Обсуждение результатов

В пределе сильного шума, когда μ<<1 обобщенное распределение Рэлея близко к обычному распределению Рэлея

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2+\rho_S{}^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\mu}{\sigma}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2}+\mu^2\right)\right\}.$$

1) $\mu \to 0$

$$w(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\right\}\left[1-\mu^2+\mu^2\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right].$$

2) $\mu \to \infty$

$$w(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\rho-\rho_S)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Распределение фазы

$$w(\varphi) = \int_0^\infty w(\rho, \varphi) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\mu^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} z e^{z^2} \left[ 1 + \Phi(z) \right] \right\}.$$

$$z = \mu \cos(\varphi - \varphi_S),$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

*– интеграл вероятности*

*или функция ошибок* **erf(z)**

В предельных случаях

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\mu^2} \left\{1 + \sqrt{\pi} z e^{z^2} \left[1 + \Phi(z)\right]\right\}.$$

1) $\mu \to 0$

$$w(\varphi) \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \cos(\varphi - \varphi_S) + \frac{\mu^2}{2\pi} \cos 2(\varphi - \varphi_S).$$

2) $\mu \to \infty$

$$w(\varphi) \approx \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\mu^2 (\varphi - \varphi_S)^2\right].$$

# Построение графика W(φ,μ) средствами Mathcad

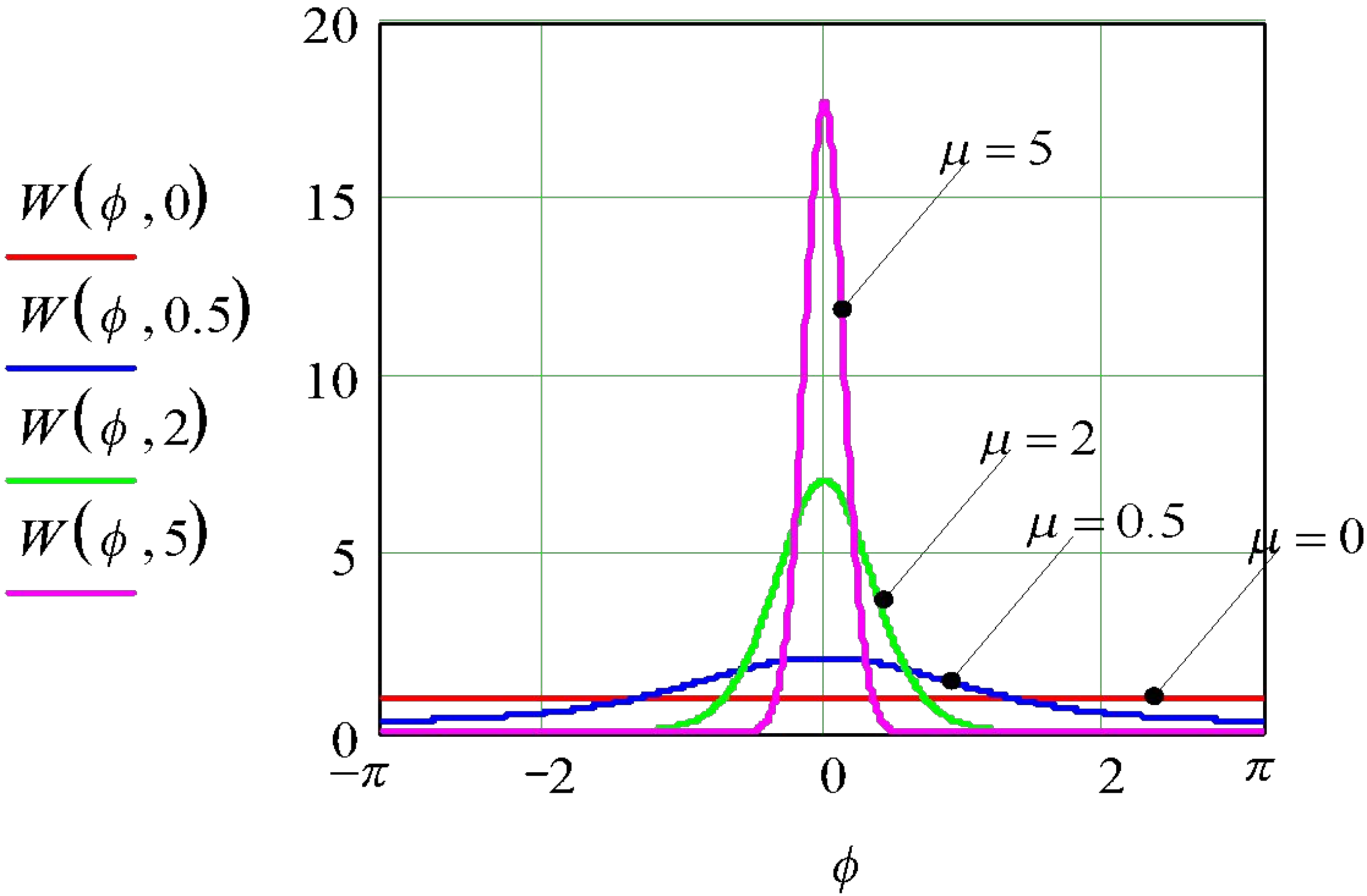
$$z(\phi,\mu) := \mu \cdot cos(\phi)$$

$$W(\phi,\mu) := e^{-\mu^2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{\pi} \cdot z(\phi,\mu) \cdot e^{z(\phi,\mu)^2} \cdot (1 + erf(z(\phi,\mu))) \right],$$

где использована специальная функция (Function Category - Special)

erf(z)

Returns the error function.



$W(\phi,0)$
$W(\phi,0.5)$
$W(\phi,2)$
$W(\phi,5)$
20
15
10
5
0
$-\pi$
$-2$
0
2
$\pi$
$\phi$
$\mu = 5$
$\mu = 2$
$\mu = 0.5$
$\mu = 0$

# <u>Модели случайных процессов</u> (план)

см [1]. Глава 2

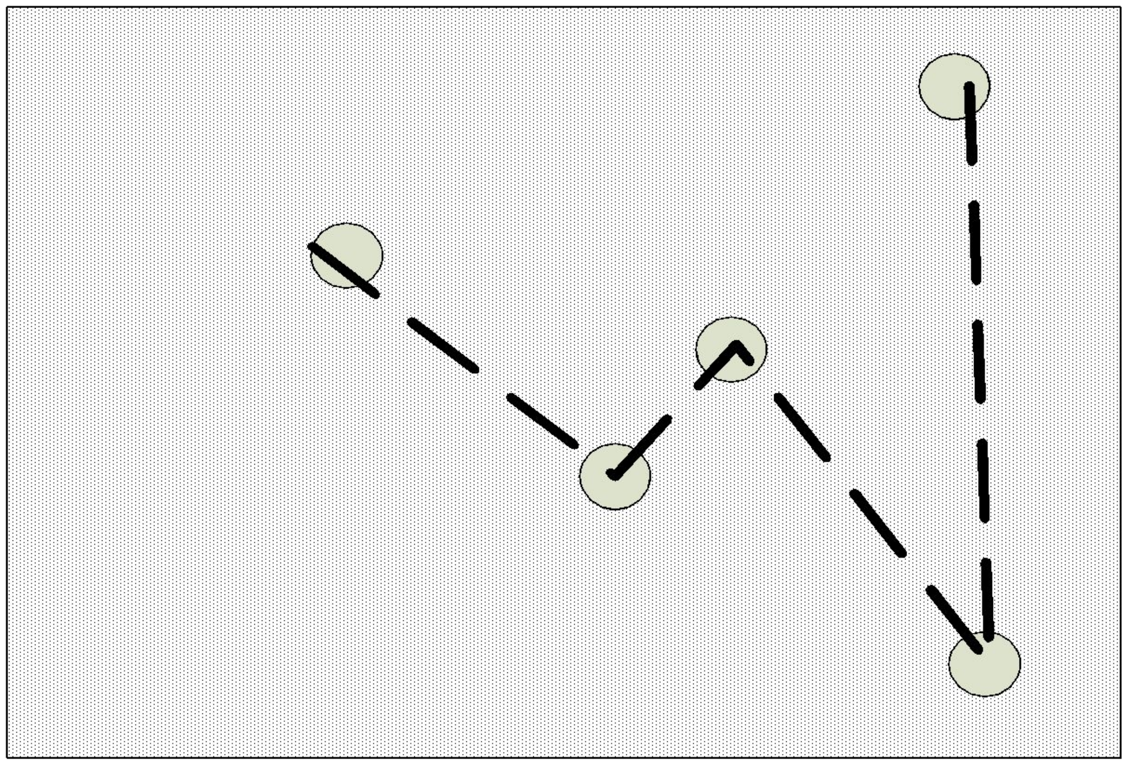
- Спектральный анализ сигналов
- Гауссовский случайный процесс
- Узкополосный стационарный шум
- Узкополосный гауссовский шум
- Узкополосный негауссовский шум (ознакомиться самостоятельно!)
- <u>Диффузионный (винеровский) процесс</u>
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

# Диффузионный (винеровский) процесс

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(t)dt;$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \eta(t)$$

Пример: Броуновское движение



$$m\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\lambda\frac{d\xi(t)}{dt} + \eta(t).$$

*Если пренебречь инерцией*

$$\cancel{m\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}} = -\lambda\frac{d\xi(t)}{dt} + \eta(t).$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \eta(t),$$

$t := t/\lambda$ ← переопределение времени

Постановка задачи:
найти вероятностные свойства процесса ξ(t), зная свойства процесса η(t).
Пусть известно, что:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t)^2 \rangle = \sigma_0^2;$$

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Требуется найти:

$$\langle \xi(t) \rangle = ? \quad \langle \xi(t)^2 \rangle = \sigma^2 = ?$$

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = K(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = ?$$

$$1)\ \left\langle \xi(t) \right\rangle = \int_0^t \left\langle \eta(t) \right\rangle dt = 0;$$

$$\boxed{\left\langle \xi(t) \right\rangle = 0};$$

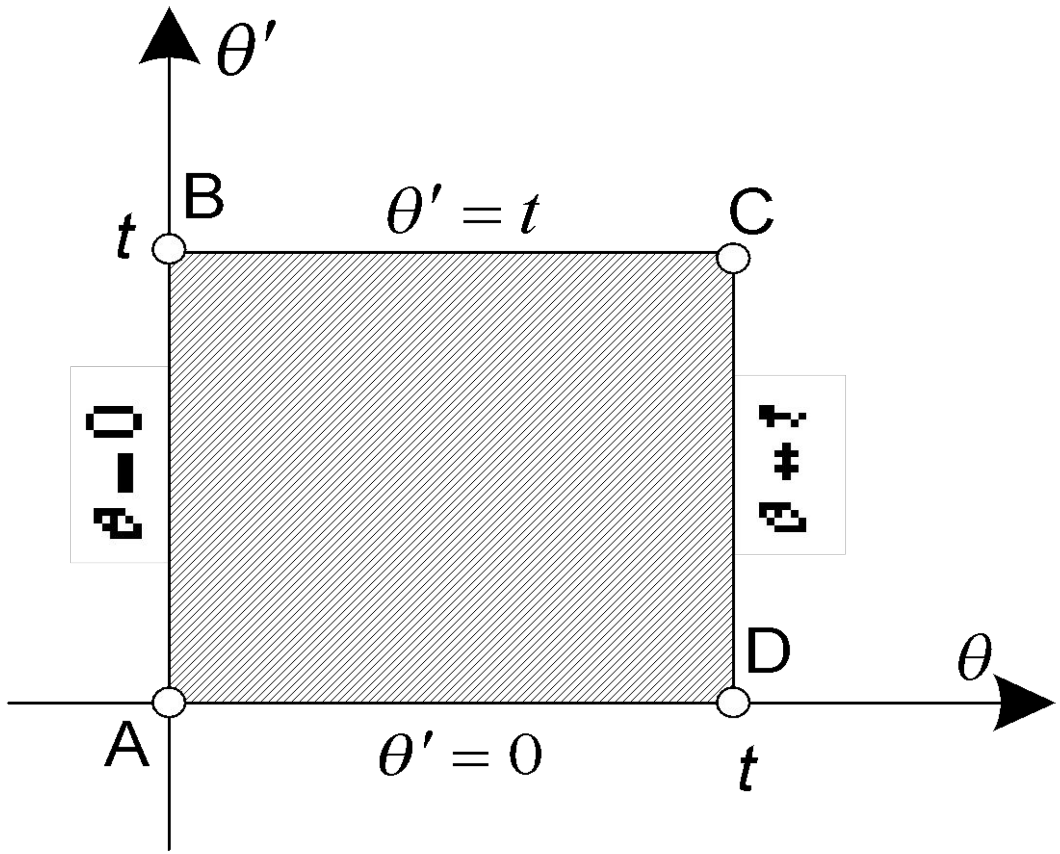
$$2)\ \left\langle \xi(t)^2 \right\rangle = \sigma^2 = \left\langle \int_0^t \eta(\theta)d\theta \int_0^t \eta(\theta')d\theta' \right\rangle =$$

$$= \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' \left\langle \eta(\theta)\eta(\theta') \right\rangle = \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' K_0(\tau);$$

$$\tau = \theta - \theta'.$$

$$\sigma^2 = \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' K_0(\tau).$$

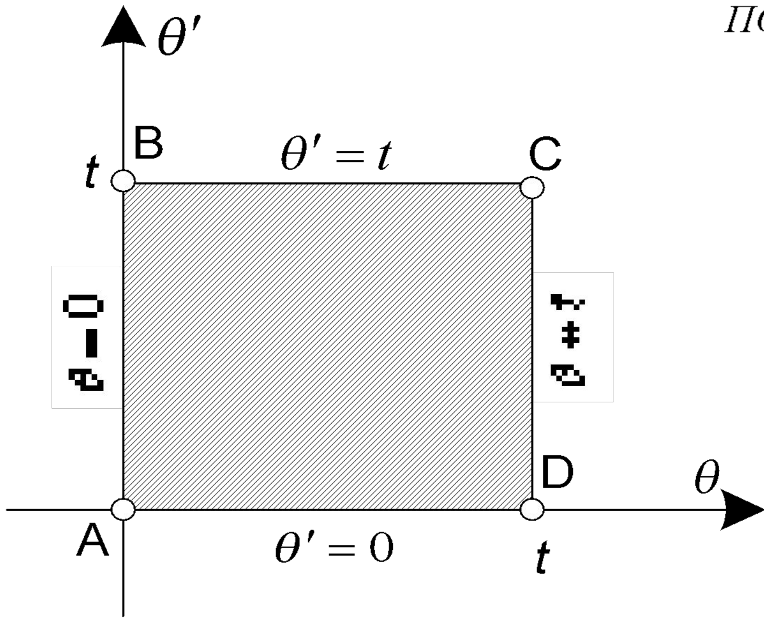
$$\sigma^2 = \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' K_0(\tau)$$

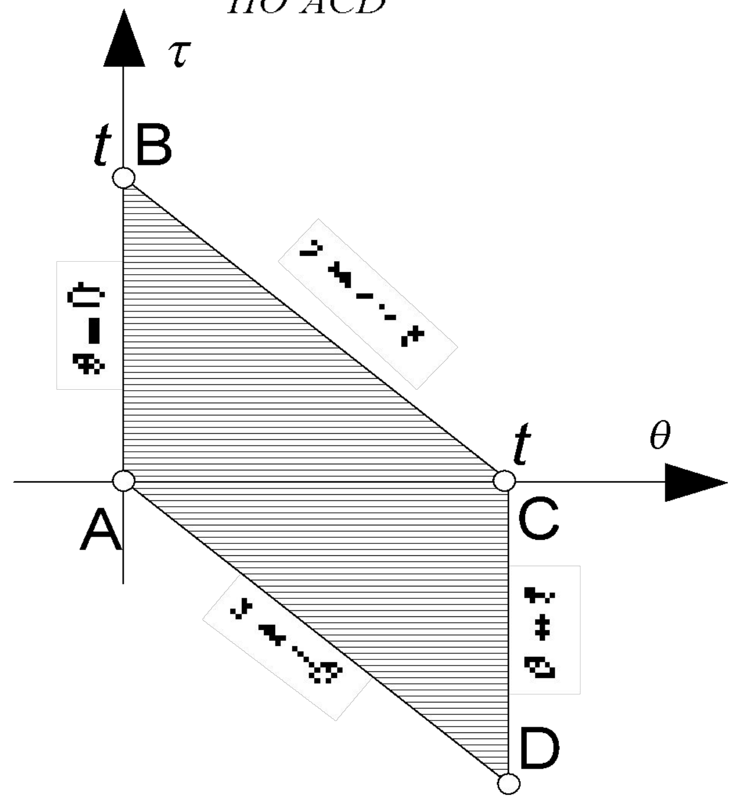


Сделаем замену переменных в двойном интеграле

$$\{\theta, \theta'\} \to \{\theta, \tau = \theta - \theta'\}$$

$$\sigma^2 = \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' K_0(\tau) = \underbrace{\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} d\theta\, K_0(\tau)}_{\text{ИНТЕГРАЛ ПО ABC}} + \underbrace{\int_{-t}^0 d\tau \int_{-\tau}^t d\theta\, K_0(\tau)}_{\text{ИНТЕГРАЛ ПО ACD}}$$



$$\sigma^2 = \int_0^t d\theta \int_0^t d\theta' K_0(\tau) = \left[ \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} d\theta + \int_{-t}^0 d\tau \int_{-\tau}^t d\theta \right] K_0(\tau) =$$

*после интегрирования по* $\theta$ *получим*

$$= \left[ \int_0^t d\tau (t-\tau) + \underline{\int_{-t}^0 d\tau (t+\tau)} \right] K_0(\tau) =$$

*во втором интеграле сделаем замену* $\tau \to -\tau$,

*учитывая, что* $K_0(\tau) = K_0(-\tau)$

$$= \left[ \int_0^t d\tau (t-\tau) + \int_0^t d\tau (t-\tau) \right] K_0(\tau);$$

$$\boxed{\sigma^2 = 2\int_0^t d\tau (t-\tau) K_0(\tau).} \quad (\oplus)$$

$$1)\sigma^2 = 2\int_0^t d\tau(t-\tau)K_0(\tau);$$

$$2)\ K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;$$

$$3)\sigma^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, G_0(\omega)\int_0^t d\tau(t-\tau)e^{i\omega\tau}.$$

$$4)\ \tau' = t-\tau,\quad d\tau' = -d\tau,$$

$$5)\ \int_0^t d\tau(t-\tau)e^{i\omega\tau} = -\int_t^0 d\tau'\tau' e^{i\omega(t-\tau')} = e^{i\omega t}\underline{\int_0^t d\tau'\tau' e^{-i\omega\tau'}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega t}-1\right) - \frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega^2}\left(1+i\omega t - e^{i\omega t}\right)$$

$$\sigma^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\frac{1}{\omega^2}\left(1 + i\omega t - e^{i\omega t}\right)d\omega =$$

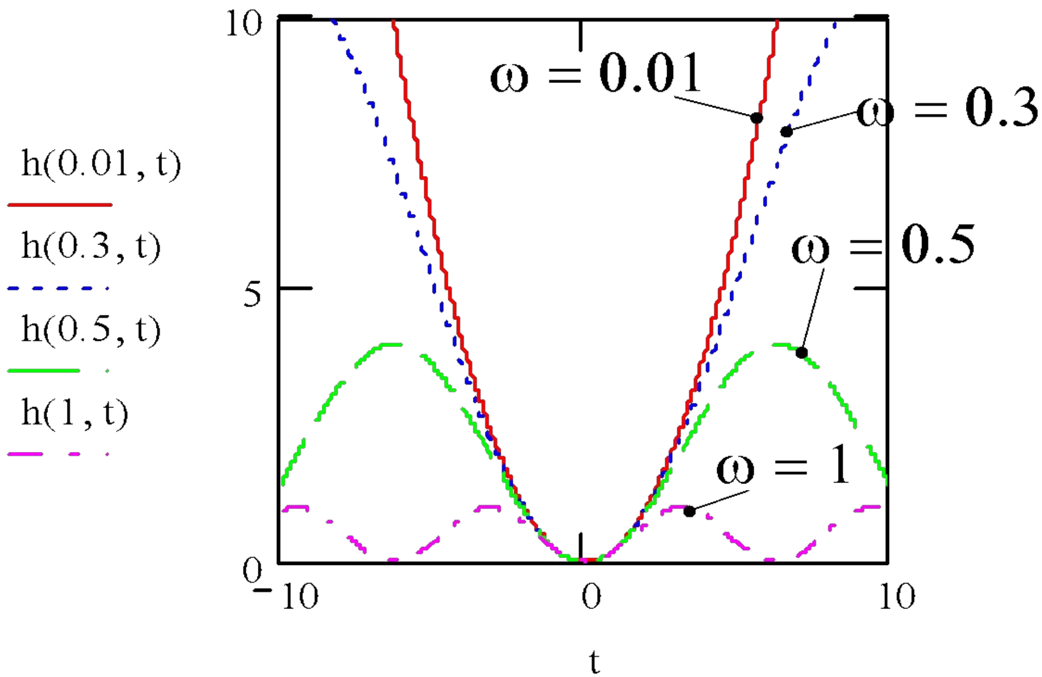
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\frac{1}{\omega^2}\left(1 + \cancel{i\omega t} - \cos(\omega t) - i\,\cancel{\sin(\omega t)}\right)d\omega =$$

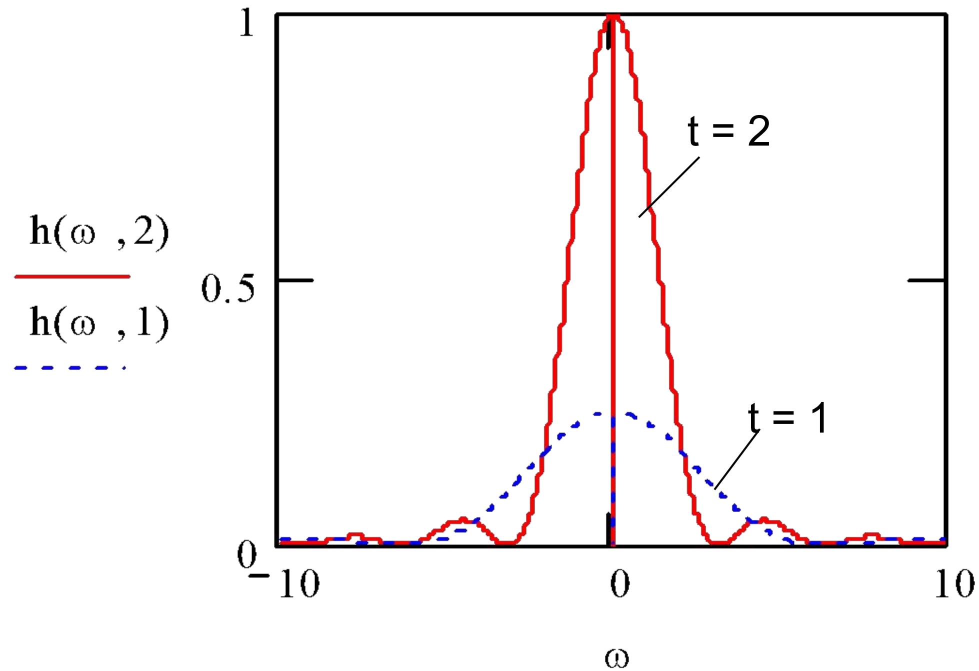
*из − за четности* $G_0(\omega)$ *перечёркнутые слагаемые не дадут вклада в интеграл;*

$$1 - \cos(\omega t) = 2\left(\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)^2;$$

$$\boxed{\sigma^2 = 4\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega.}$$

$$h(\omega, t) := \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\omega} \right)^2 \qquad \lim_{\omega \to 0} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\omega} \right)^2 \to \frac{1}{4} \cdot t^2 \qquad \lim_{t \to 0} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\omega} \right)^2 \to 0$$



# Вывод:

Даже если шум «на входе» η(t) <u>стационарный</u>, винеровский процесс ξ(t) «на выходе»

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(t)dt \quad -$$

<u>нестационарный</u>:

$$\sigma^2(t) = 4\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega$$

# Предельный случай t → 0

$$\sigma^2(t) = 2\int_0^t d\tau(t-\tau)K_0(\tau)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle = K_0(\tau) \approx \sigma_0{}^2 \qquad \tau \to 0$$

$$\sigma^2 = 2\sigma_0{}^2\int_0^t d\tau(t-\tau) = 2\sigma_0{}^2\left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right)\Bigg|_0^t = \sigma_0{}^2 t^2;$$

$$\boxed{\sigma = \sigma_0 t}$$

# Конечное время корреляции

$$\sigma^2(t) = 2\int_0^t d\tau (t-\tau) K_0(\tau);$$

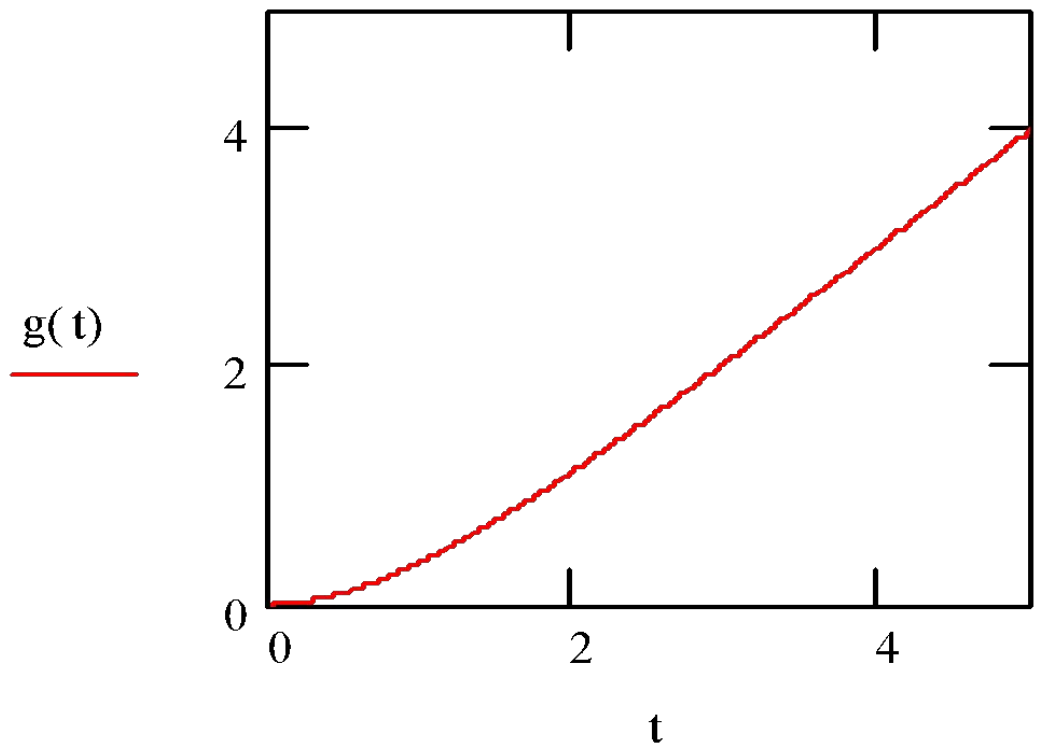
$$K_0(t) = \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right),$$

Символьное вычисление интеграла с помощью MathCad:

$$\int_0^t (t-\tau)\cdot e^{\frac{-\tau}{\tau_o}}\,d\tau \rightarrow \exp\left(\frac{-t}{\tau_o}\right)\cdot \tau_o^{\,2} + \tau_o\cdot t - \tau_o^{\,2}$$

$$\sigma^2(t) = 2\sigma_0^2\tau_0{}^2\left[\frac{t}{\tau_0} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\right];$$

$$g(x) := \exp(-x) + x - 1$$



# Предельный случай t → ∞

$$\sigma^2(t) = 2\sigma_0^2\tau_0^2\left[\frac{t}{\tau_0} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\right];$$

*При* $t >> \tau_0$

$$\sigma^2(t) = 2\sigma_0^2\tau_0^2\left[\frac{t}{\tau_0} - 1 + \cancel{\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)}\right] \approx 2\sigma_0^2\tau_0\left[t - \tau_0\right]$$

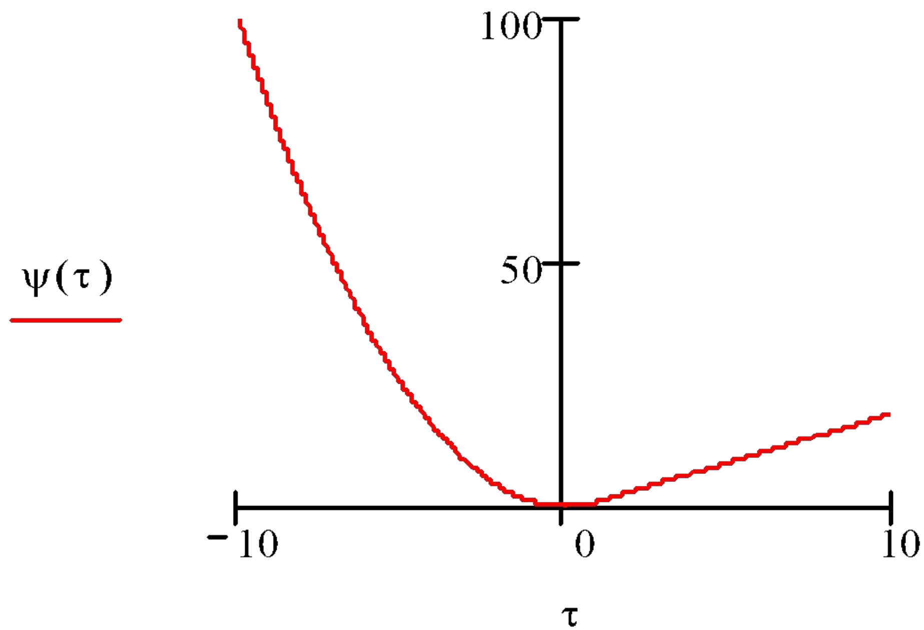
$$\sigma^2(t) \approx 2\sigma_0^2\tau_0\left[t - \tau_0\right]$$

# Поведение σ(t) в предельных случаях

$$\sigma^2(t) = \begin{cases} \sigma_0^2\, t^2 & (t \ll \tau_0) \\ 2\sigma_0^2 \tau_0 \left[t - \tau_0\right] & (t \gg \tau_0) \end{cases}$$

$\tau0 := 1$

$$\psi(\tau) := \begin{cases} \left(\dfrac{\tau}{\tau0}\right)^2 & \text{if } \tau \le \tau0 \\ 2 \cdot \left(\dfrac{\tau}{\tau0} - \dfrac{1}{2}\right) & \text{if } \tau > \tau0 \end{cases}$$



# η(t) - белый шум

$$G_0(\omega) = const = G_0$$

*интенсивность шума одинакова на всех частотах*

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= G_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = G_0 \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } \ t \neq 0; \\ \infty, \text{ если } \ t = 0. \end{cases} =$$

$$= 2\pi G_0 \delta(t).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot \delta(t).$$

$$\boxed{K_0(\tau) = 2D\delta(t)}; \ \ D = \pi G_0.$$

# η(t) - белый шум

$1-й\ способ$

$$\sigma^2 = 2\int_0^t d\tau (t-\tau) K_0(\tau)$$

$$\sigma^2 = 2\int_0^t d\tau (t-\tau) 2D\delta(\tau) = 4D\int_0^t d\tau (t-\tau)\delta(\tau) =$$

$$= 2Dt.$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{2Dt}}$$

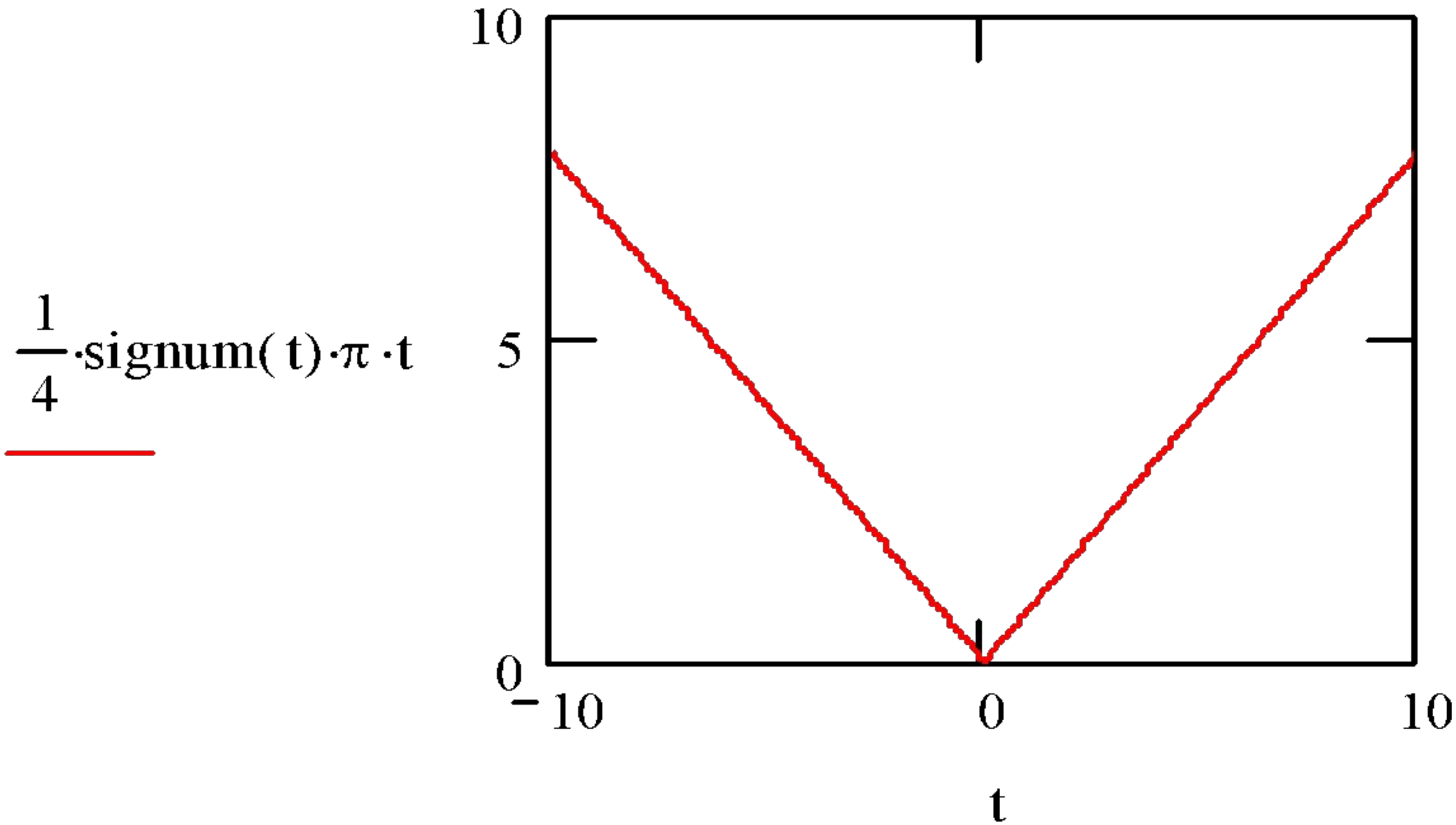
# η(t) - белый шум

$2 - й\ способ$

$$\sigma^2(t) = 4\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega = 4G_0\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega\cdot t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega \to \frac{1}{2}\cdot \mathrm{signum}(t)\cdot\pi\cdot t$$

# η(t) - белый шум



# η(t) - белый шум

$$\sigma^2(t) = 4\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega = 4G_0\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 =$$

$$= 2Dt \ \ (t \geq 0), \quad D = \pi G_0$$

*Таким образом*

$$\boxed{\sigma^2(t) = 2Dt}$$

# <u>η(t) - белый шум</u>

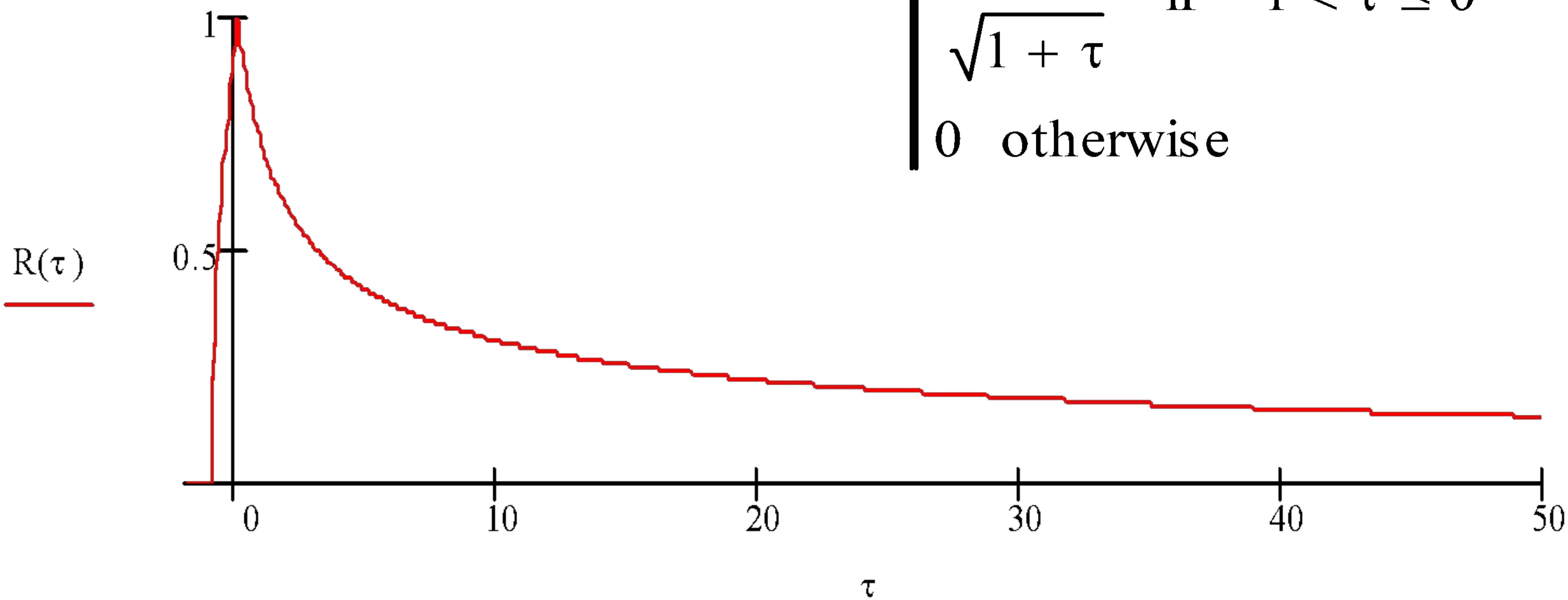
Для этого частного случая можно также вычислить корреляционную функцию (<u>без вывода</u>) и коэффициент корреляции

$$K(t,\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \begin{cases} 2Dt & (\tau \ge 0), \\ 2D(t-|\tau|) & (-t < \tau \le 0), \\ 0 & (\tau < -t. \end{cases}$$

$$R(t,\tau) = \frac{K(t,\tau)}{\sigma(t)\sigma(t+\tau))} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau/t}} & (\tau \ge 0), \\ \dfrac{t-|\tau|}{\sqrt{1+\tau/t}} & (-t < \tau \le 0), \\ 0 & (\tau < -t. \end{cases}$$

# η(t) - белый шум

$$R(\tau) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau}} & \text{if } \tau \ge 0 \\[2ex] \dfrac{1-|\tau|}{\sqrt{1+\tau}} & \text{if } -1 < \tau \le 0 \\[2ex] 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



# Гауссовский спектр мощности

$$G_0(\omega) = G_0(0)\exp(-\omega^2 / 2h^2).$$

*При этом*

$$K_0(\tau) = \sigma_0^2 \exp(-h^2\tau^2 / 2); \qquad \sigma_0^2 = \sqrt{2\pi}\, G_0(0) h$$

Используем формулу

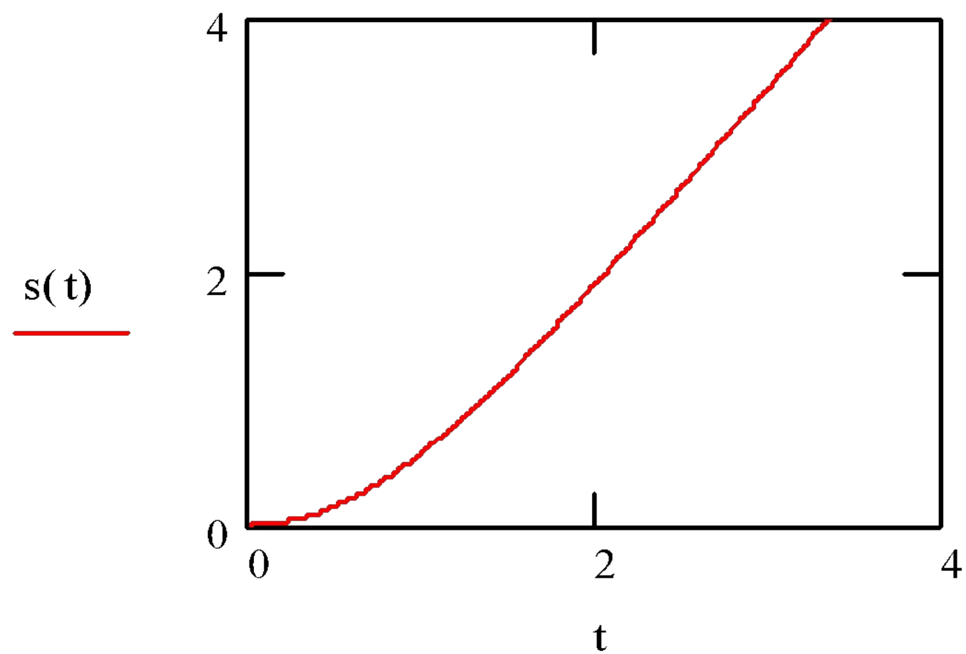
$$\sigma^2(t) = 4\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega$$

# Гауссовский спектр мощности

Используем численный расчет. Обозначено:

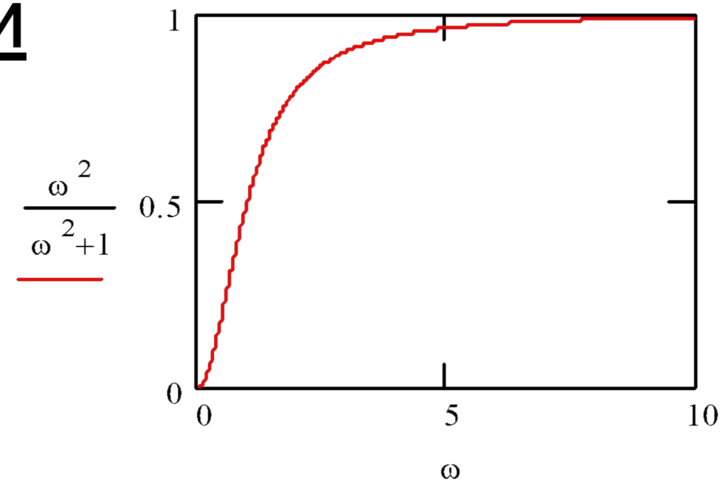
$s(t)=\sigma^2(t)$

$$s(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega)^2\right] \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\omega}\right)^2 d\omega$$

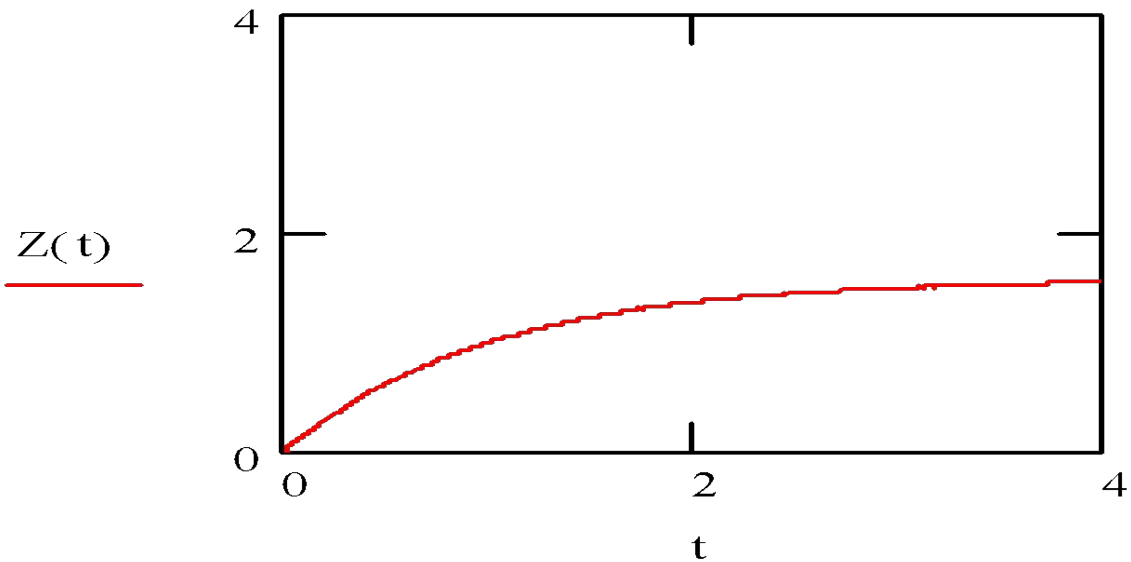


# Белый шум с отфильтрованными низкими частотами

$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi}\frac{\omega^2}{\omega^2 + h^2}$$



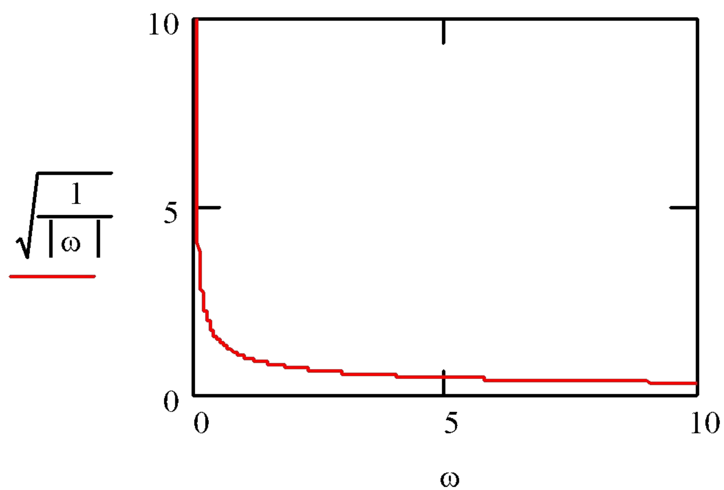

$$\sigma^2 = \frac{2D}{h}(1 - e^{-ht})$$



## Фликкер-шум (шум 1 /f$^{\gamma}$)

Спектр мощности имеет вид:

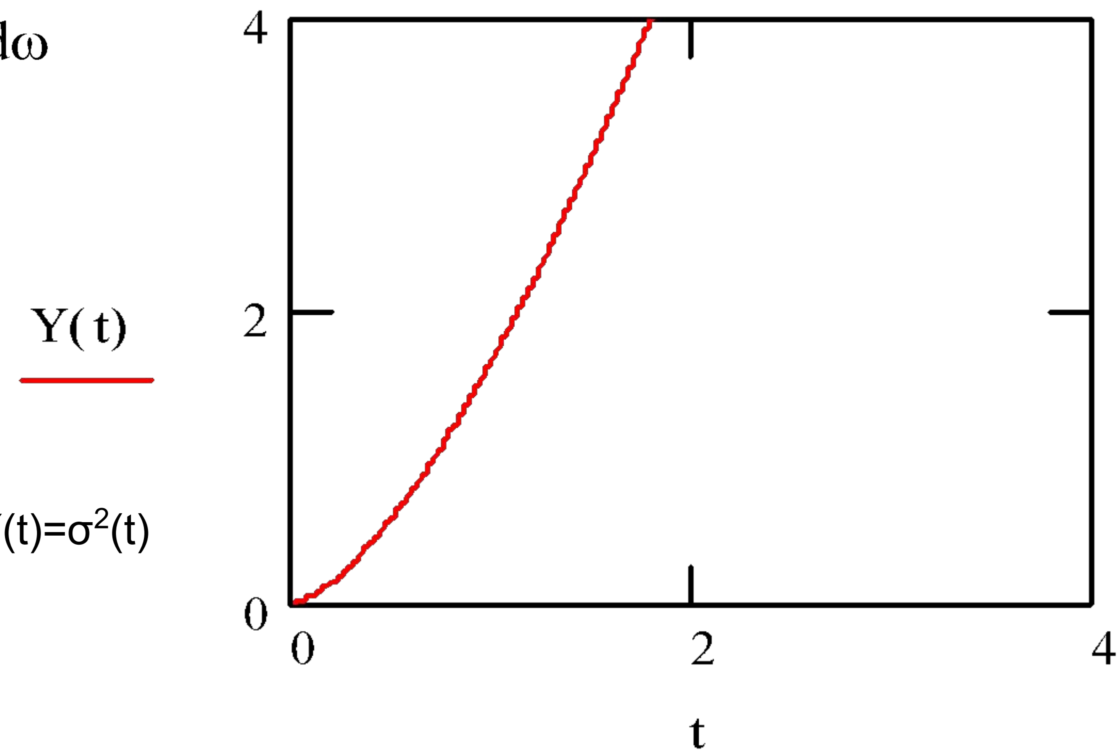
$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi}\left|\frac{\omega_0}{\omega}\right|^{\gamma}, \qquad 0 \le \gamma \le 1.$$




$$\textit{Принимая } \gamma = \frac{1}{2}, \ \textit{произведем расчет } \sigma(t)$$

# Фликкер-шум (шум 1 /f$^{\gamma}$)

$$Y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{|\omega|}} \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\omega} \right)^2 d\omega$$

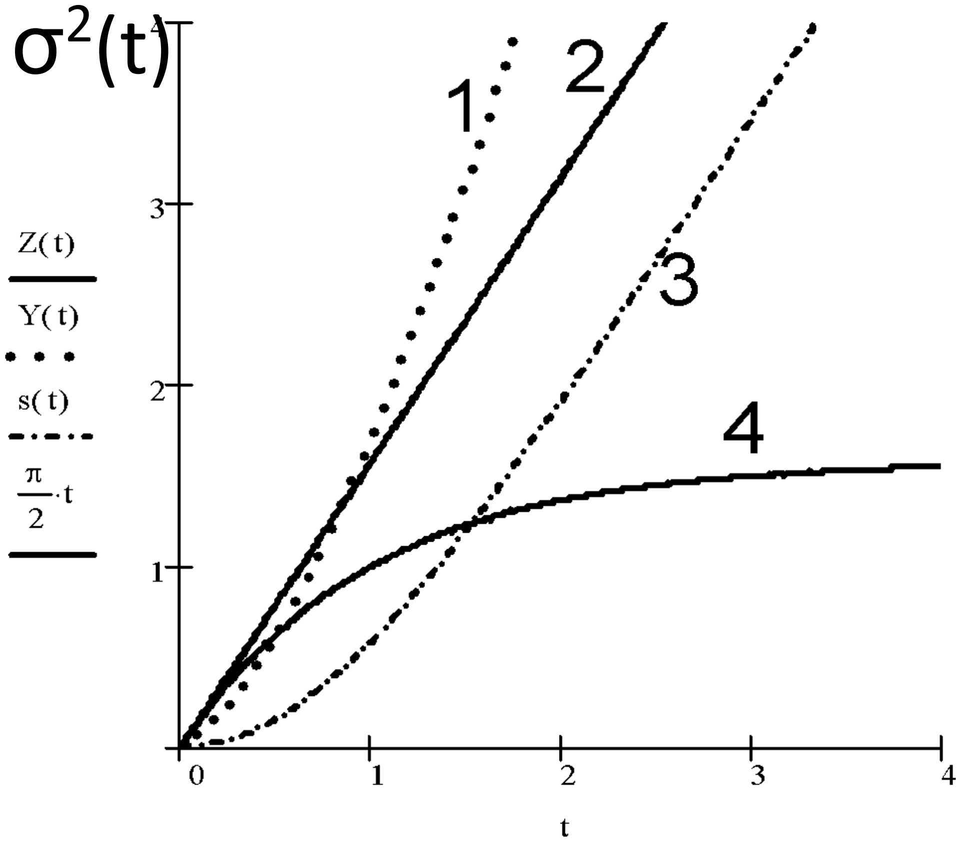



Обозначено $Y(t)=\sigma^2(t)$

# Фликкер-шум (шум 1 /f$^{\gamma}$)

$$\sigma^2 = \frac{2D}{\omega_0 \cos \pi\gamma / 2} (\omega_0 t)^{t+\gamma}$$

# Сводный график зависимости $\sigma^2(t)$ для разных шумов на «входе» винеровского процесса




Шум на «входе»

1- фликкер шум

2 – белый шум

3 – гауссовский спектр

4 – белый шум с отфильтрованными низкими частотами

# Модели случайных процессов (план) см [1]. Глава 2

- Спектральный анализ сигналов
- Гауссовский случайный процесс
- Узкополосный стационарный шум
- Узкополосный гауссовский шум
- Узкополосный негауссовский шум (ознакомиться самостоятельно!)
- Диффузионный (винеровский) процесс
- Колебания, модулированные шумом
  - амплитудная модуляция
  - фазовая модуляция
  - частотная модуляция
- Импульсные случайные процессы

# Колебания, модулированные шумом.

## <u>Амплитудная</u> модуляция (АМ) шумом $\eta(t)$

$$\xi_A(t) = a_0\left[1+\eta(t)\right]\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

Amplitude - амплитуда

Постановка задачи:

| Задан шум $\eta(t)$ |
|---|
| $\xi(t) = ?$ |

Постановка задачи обратная по сравнению с той, которая была для узкополосного шума

# Колебания, модулированные шумом.

## Фазовая модуляция (ФМ) шумом $\eta(t)$

$$\xi_P(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \eta(t))$$

Phase – фаза

Постановка задачи:

Задан шум

$\eta(t)$

$\xi(t) = ?$

Постановка задачи обратная по сравнению с той, которая была для узкополосного шума

# Колебания, модулированные шумом.

## Частотная модуляция (ЧМ) шумом $\eta(t)$

$$\xi_F(t) = a_0 \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t \eta(t)dt\right)$$

Frequency - частота

Постановка задачи:

Задан шум

$$\begin{array}{c|c} \eta(t) & \\ \hline & \\ \xi(t) = ? & \end{array}$$

Постановка задачи обратная по сравнению с той, которая была для узкополосного шума

Подготовка шума $\eta(t)$

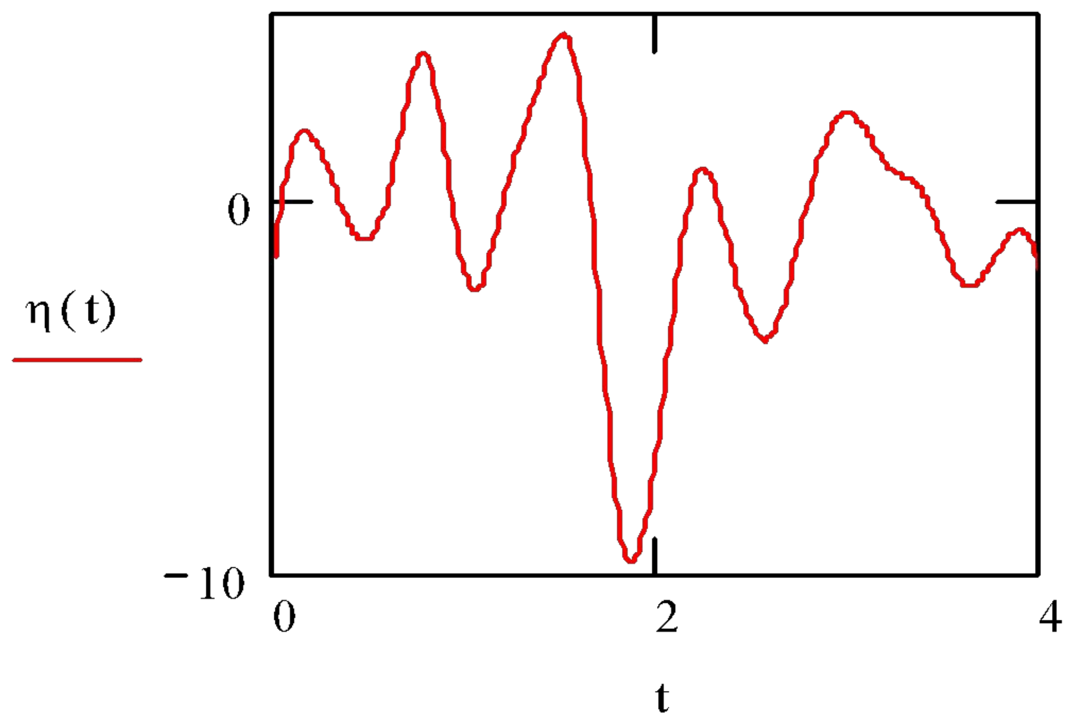
$k := 0..20$

$b := rnorm(21, 0, 3)$

$s1 := cspline(x, b)$

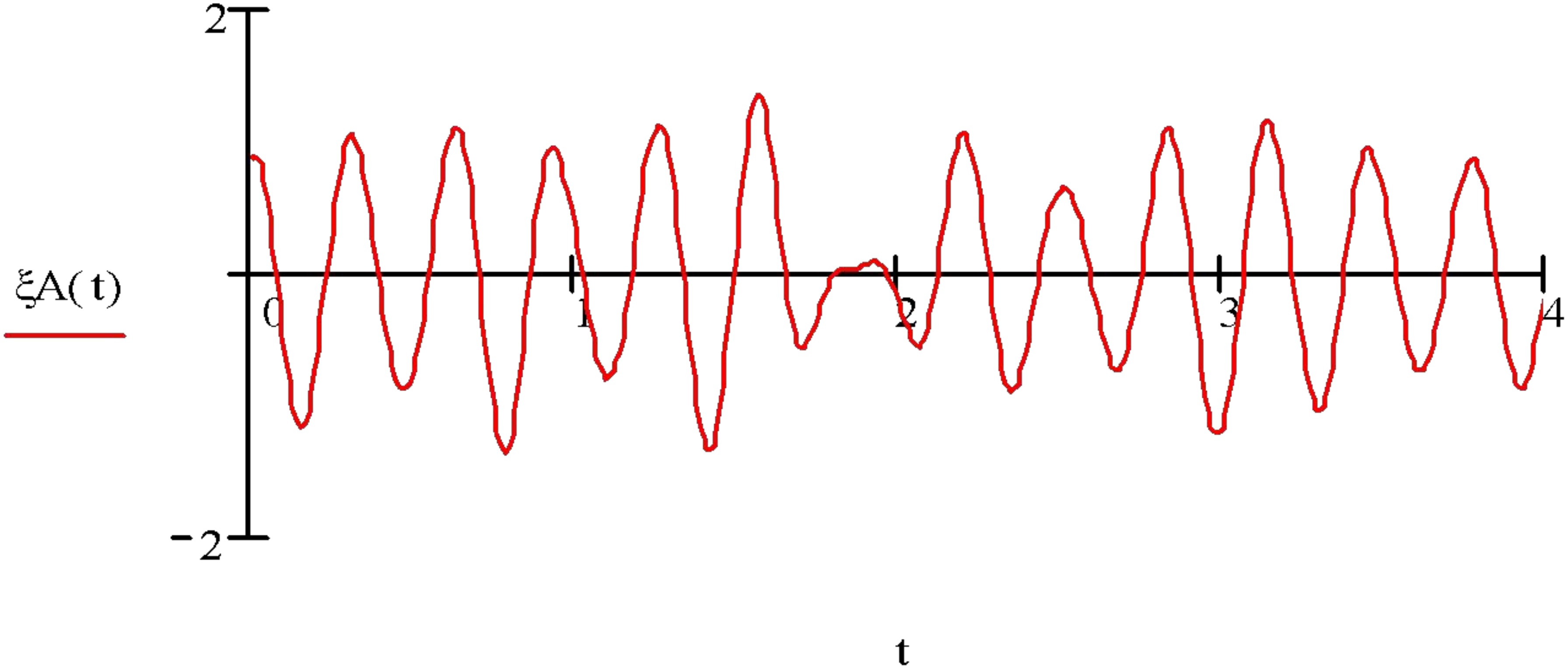
$\eta(t) := interp(s1, x, b, t)$

$t := 0, 0.01..4$



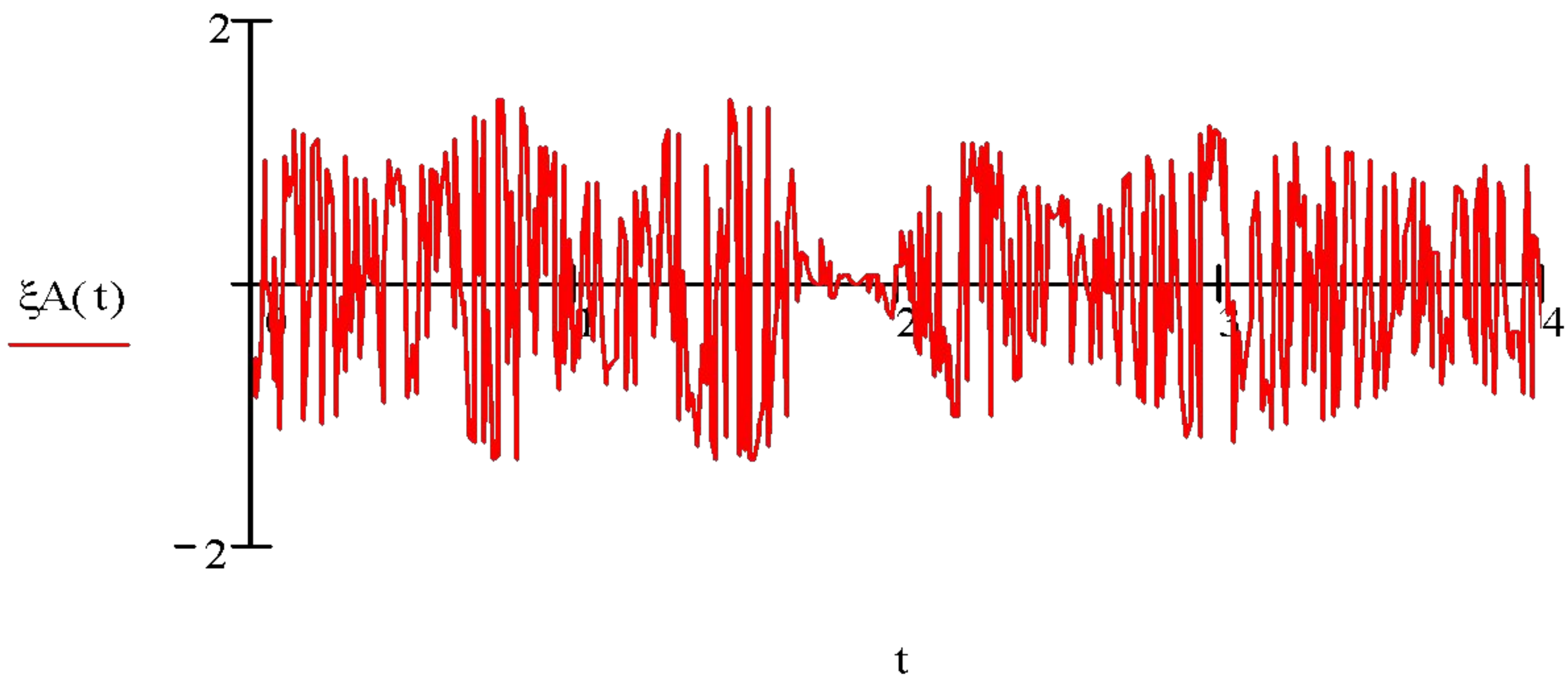
# Амплитудная модуляция шумом

$$\xi A(t) := \left(1 + 0.1 \cdot \eta(t)\right) \cdot \cos(20t)$$



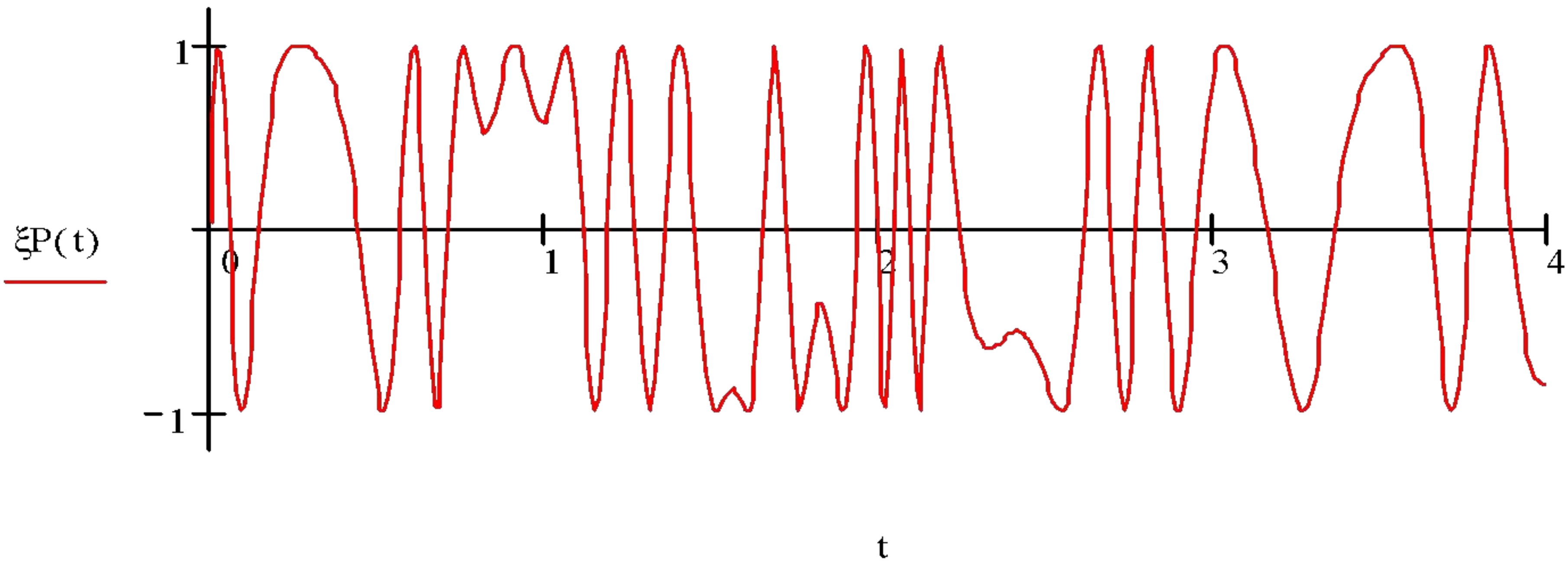
# Амплитудная модуляция шумом $\eta(t)$ и независимая случайная фаза

$$\xi A(t) := (1 + 0.1 \cdot \eta(t)) \cdot \cos(20 \cdot t + \mathrm{rnd}(2 \cdot \pi))$$



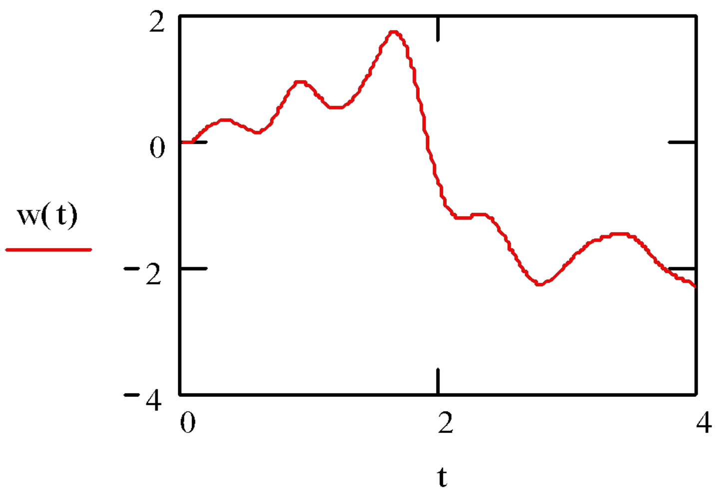
# Фазовая модуляция шумом $\eta(t)$

$$\xi P(t) := 1 \cdot \cos\left(20t + \eta(t)\right)$$

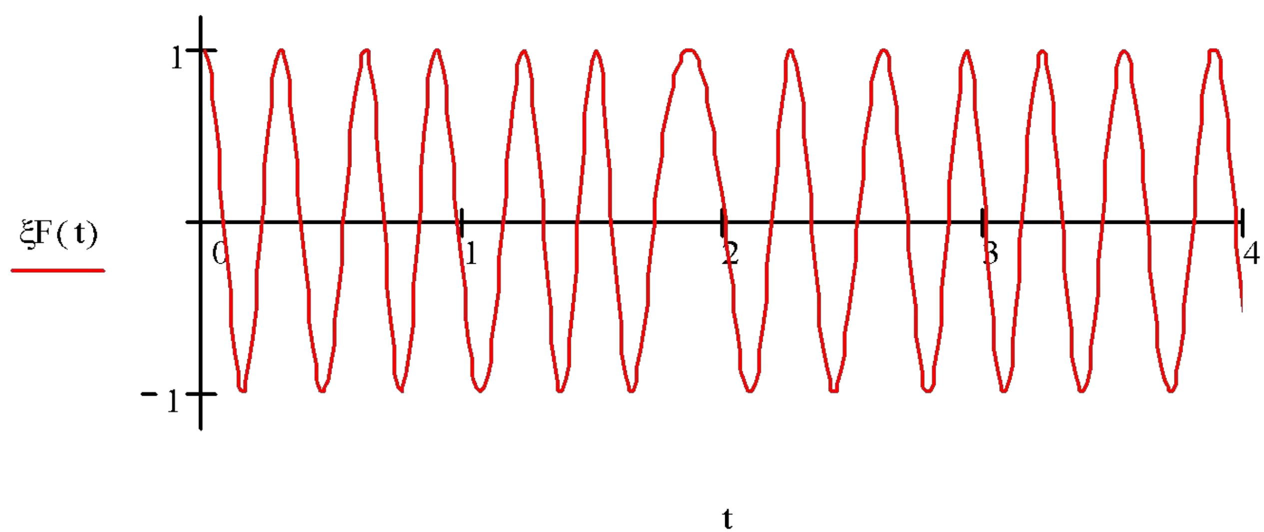


# Частотная модуляция шумом $\eta(t)$

$$w(t) := \int_0^t \eta(t)\,dt$$




$$\xi F(t) := \cos(20 \cdot t + w(t))$$



# Амплитудная модуляция (АМ) подробно

$\eta(t)$ *стационарный случайный процесс*

$\varphi_0 -$ *равномерно распределена на интервале* $\left[0, 2\pi\right]$

$$w(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}; \qquad \overline{\eta} = 0; \qquad \overline{\eta\eta_\tau} = K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Найдем среднее от ξ

$$\overline{\xi(t)} = a_0 \left[1 + \overline{\eta(t)}\right] \overline{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$$\overline{\eta(t)} = 0;$$

$$\overline{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) d\varphi_0 = 0$$

$$\overline{\xi(t)} = 0$$

# Ищем корреляционную функцию процесса ξ

$$K(t) = \overline{\xi \xi_\tau} =$$

$$= \left(a_0\right)^2 \overline{\left[1+\eta(t)\right]\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\left[1+\eta(t+\tau)\right]\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)} =$$

$$= \left(a_0\right)^2 \left[1+\cancel{\overline{\eta(t)}}+\cancel{\overline{\eta(t+\tau)}}+\overline{\eta(t)\eta(t+\tau)}\right]\overline{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)} =$$

$$= \left(a_0\right)^2 \left[1+K_0(\tau)\right]\overline{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)};$$

Здесь подразумевается усреднение по случайной фазе $\square_0$:

$$\overline{f(\varphi_0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_0)d\varphi_0$$

$$\overline{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)} =$$

$$= \overline{\left(\cos\omega_0 t\cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t\sin\varphi_0\right)\cdot\left(\cos\omega_0(t+\tau)\cos\varphi_0 - \sin\omega_0(t+\tau)\sin\varphi_0\right)}.$$

$$\overline{\cos^2\varphi_0} = \frac{1}{2}; \quad \overline{\sin^2\varphi_0} = \frac{1}{2}; \quad \overline{\cos\varphi_0\sin\varphi_0} = 0.$$

$$\overline{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\cancel{\omega_0 t} - \cancel{\omega_0 t} - \omega_0\tau) = \underline{\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)}$$

$$K(\tau) = \overline{\xi\xi_\tau} =$$

$$= (a_0)^2\left[1+K_0(\tau)\right]\overline{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0(t+\tau)+\varphi_0)} =$$

$$= \frac{1}{2}(a_0)^2\left[1+K_0(\tau)\right]\cos(\omega_0\tau).$$

$$\underline{K(\tau) = \frac{1}{2}(a_0)^2\left[1+K_0(\tau)\right]\cos(\omega_0\tau).}$$

Перейдем к вычислению спектральной плотности процесса ξ(t)

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(a_0\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+K_0(\tau)\right]\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(a_0\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{\cos(\omega_0\tau)}_{(1)}+\underbrace{K_0(\tau)\cos(\omega_0\tau)}_{(2)}\right]e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}\right)e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\pi\left(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\beta x}dx=2\pi\delta(\beta)\leftarrow$$ *использованная формула*

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau =$$

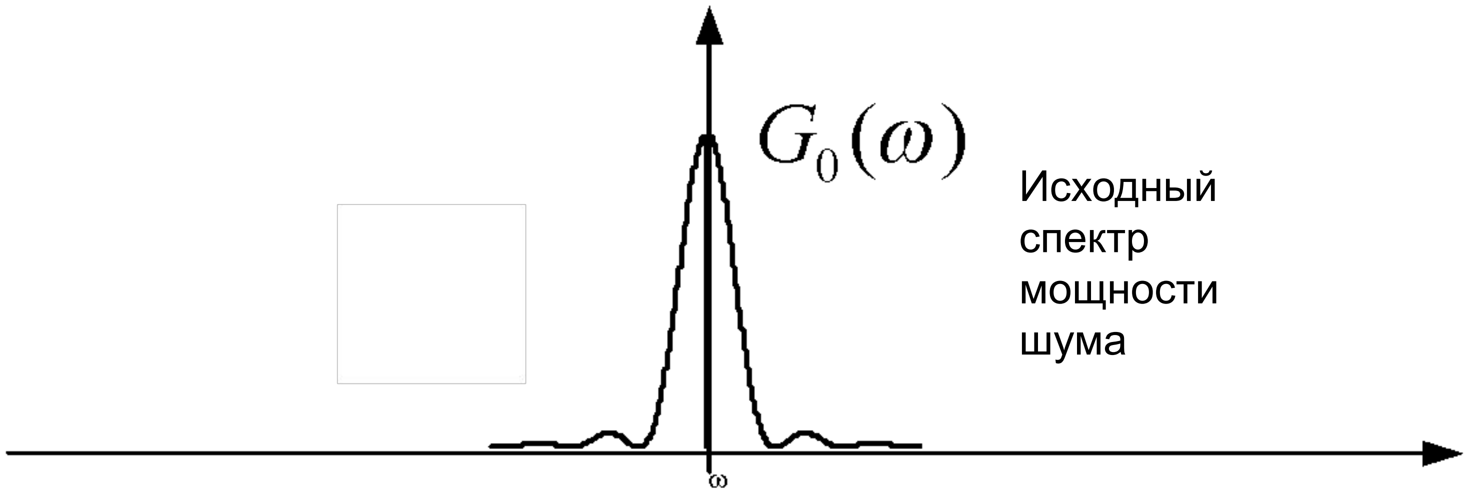
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau)\left(e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right)e^{-i\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau)\left(e^{i(\omega_0-\omega)\tau} + e^{-i(\omega_0+\omega)\tau}\right)d\tau =$$

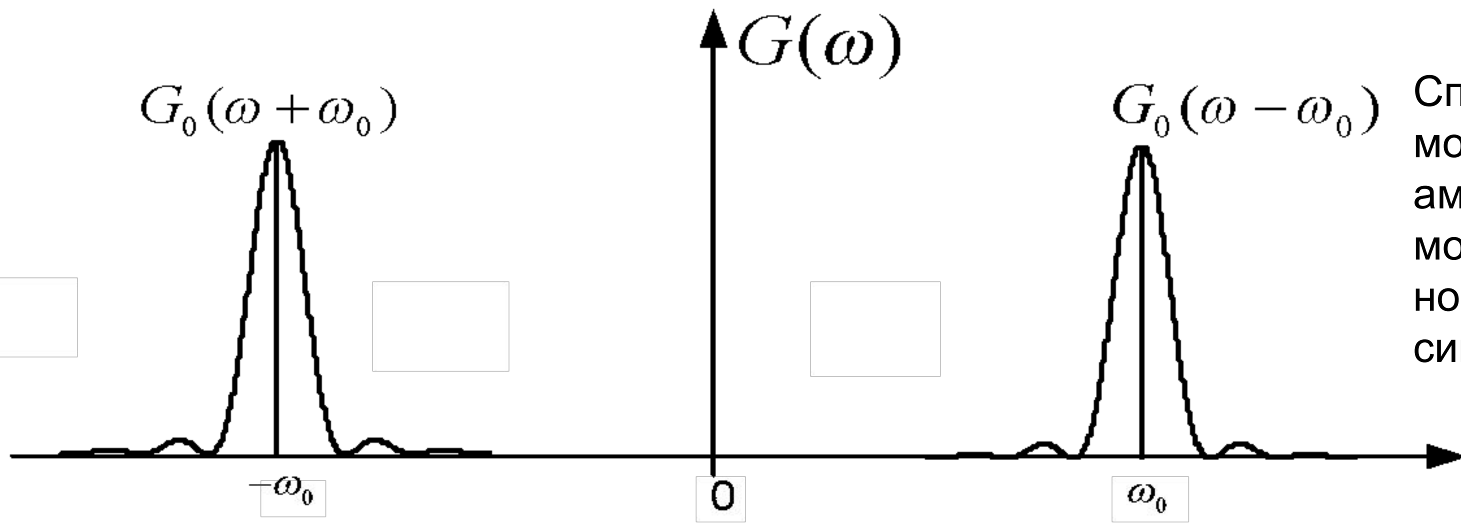
$$= \pi\Big(G_0(\omega_0-\omega)+G_0(\omega_0+\omega)\Big).$$

Амплитудная модуляция (АМ)

$$G(\omega)=\frac{1}{4}\left(a_0\right)^2\left[\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)+G_0(\omega_0-\omega)+G_0(\omega_0+\omega)\right]$$




Исходный спектр мощности шума




Спектр мощности амплитудно модулирован-ного шумом сигнала

# Колебания, модулированные шумом

## Фазовая модуляция (ФМ) гауссовским шумом

$$x(t) = a_0 \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right]$$

$$\frac{1}{2} a_0 \exp\left[-i\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \exp\left[i\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)\right] + \ . \ .$$

Предположим, что $\varphi(t)$ - стационарный гауссовский процесс.

$$\overline{\varphi(t)} = 0; \qquad \overline{\varphi(t)\varphi(t+\tau)} = K_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau);$$

$$K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega;$$

$$w(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_0{}^2}\right\}.$$

## Фазовая модуляция (ФМ) гауссовским шумом

Задача состоит в том, чтобы найти статистические характеристики сигнала x(t)

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0\, e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]} + \ \ . \ .$$

$$\left\langle x(t) \right\rangle = \frac{1}{2} a_0 \left\langle e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]} \right\rangle + \ldots = \frac{1}{2} a_0\, e^{i\omega_0 t} \left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle.$$

$$\left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi_t} w(\varphi_t) d\varphi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \exp\left\{ -\frac{\varphi^2}{2\sigma_0{}^2} \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, \exp\left\{ -\frac{\varphi^2}{2\sigma_0{}^2} + i\varphi \right\} = \exp\left\{ -\frac{\sigma_0{}^2}{2} \right\}.$$

$$\left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle = e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}}$$

$$\left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle = e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}}$$

$$\left\langle x(t) \right\rangle = \frac{1}{2} a_0 \left[ e^{i\omega_0 t} \left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle + e^{-i\omega_0 t} \left\langle e^{-i\varphi(t)} \right\rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2} a_0 \, e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \cos \omega_0 t.$$

Для усреднения функции двух переменных ϕ(t) и ϕ(t+τ) также используем распределение Гаусса (для двух переменных).

$$\left\langle e^{i\varphi(t)} e^{\pm i\varphi(t+\tau)} \right\rangle = e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}\left[1 \pm R_0(\tau)\right]}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} = \frac{a_0{}^2}{2} \left[ 1 + e^{-2\sigma_0{}^2} \cos 2\omega_0 t \right].$$

Введем флуктуационную компоненту фазово-модулированного сигнала:

$$\xi(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$$

*и для неё вычислим корреляционную функцию*

$$K(t,\tau) = \overline{\xi \xi_\tau} =$$

$$= \frac{a_0^{\ 2}}{2} e^{-\frac{\sigma_0^{\ 2}}{2}} \left[ e^{K_0(\tau)} - 1 \right] \cdot \left[ \cos \omega_0 \tau - \cos 2(\omega_0 \tau + \omega_0 t) \right].$$

Таким образом, фазово-модулированный сигнал оказывается нестационарным случайным процессом.

Зависимость от времени периодическая. Проведем также усреднение всех величин по периоду колебаний (по времени), так как именно такие величины регистрируются приборами.

$$\overline{\overline{f(t)}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\overline{\overline{K(t,\tau)}} = \frac{1}{T}\int_0^T K(t,\tau)\,dt =$$

$$= \frac{a_0{}^2}{2} e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \left[e^{K_0(\tau)} - 1\right] \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos\omega_0\tau - \cos 2(\omega_0\tau + \omega_0 t)\right] dt =$$

$$= \frac{a_0{}^2}{2} e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \left[e^{K_0(\tau)} - 1\right] \cos\omega_0\tau.$$

$$\boxed{\overline{\overline{K(t,\tau)}} = \frac{a_0{}^2}{2} e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \left[e^{K_0(\tau)} - 1\right] \cos\omega_0\tau.}$$

Фазовая модуляция (ФМ)

$$\overline{\overline{G(\omega)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{K(\tau)}}e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

$$\overline{\overline{K(t,\tau)}} = \frac{{a_0}^2}{2}e^{-\frac{{\sigma_0}^2}{2}}\left[e^{K_0(\tau)}-1\right]\cos\omega_0\tau$$

$$\overline{\overline{G(\omega)}} = \frac{1}{2\pi}\frac{{a_0}^2}{2}e^{-\frac{{\sigma_0}^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{K_0(\tau)}-1\right]\cos\omega_0\tau\, e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

$$=\frac{1}{4\pi}(a_0)^2 e^{-\frac{{\sigma_0}^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{K_0(\tau)}\cos(\omega_0\tau)-\underline{\cos(\omega_0\tau)}\right]e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

---

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau})e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$=\pi\left(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)\right).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x}dx = 2\pi\delta(\beta)$ ← *использованная формула*

Мы видим, что спектр состоит из непрерывной компоненты и двух дискретных

$$\overline{\overline{G(\omega)}} = \frac{1}{4\pi}\left(a_0\right)^2 e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \left\{ \underbrace{\left[ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{K_0(\tau)} e^{-i\omega\tau} \cos(\omega_0\tau)\, d\tau \right]}_{\text{Непрерывная компонента}} - \underbrace{\left[ \pi \left( \delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) \right) \right]}_{\text{Дискретные компоненты}} \right\}$$

Введем интегральную интенсивность спектра

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \overline{\overline{G(\omega)}} = I_{непрер} - I_{дискр}.$$

$$I_{дискр}=\frac{1}{4\pi}(a_0)^2 e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \pi\left(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(a_0)^2 e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}.$$

$$I_{непрер}=\frac{1}{4\pi}(a_0)^2 e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{K_0(\tau)}e^{-i\omega\tau}\cos(\omega_0\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}(a_0)^2 e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{K_0(\tau)}\delta(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}(a_0)^2 e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}e^{K_0(0)}=$$

$$=\frac{1}{2}(a_0)^2 e^{\frac{\sigma_0^2}{2}}$$

*Учтено. что* $K_0(0)=\sigma_0^2$.

$$I = I_{непрер} - I_{дискр} =$$

$$= \frac{1}{2}(a_0)^2 \left( e^{\frac{\sigma_0{}^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \right).$$

При слабой модуляции сигнала: $K_0(\tau) << \sigma_0{}^2 << 1$

$$\overline{\overline{G(\omega)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_0{}^2}{2} e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{K_0(\tau)} - 1 \right] \cos \omega_0 \tau \, e^{-i\omega\tau} d\tau \approx$$

$$\approx \frac{a_0{}^2}{4\pi} e^{-\frac{\sigma_0{}^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau) \cos \omega_0 \tau \, e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{a_0{}^2}{4} \left[ G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0) \right]$$

# Колебания, модулированные шумом

## Частотная модуляция (ЧМ)-1

$$\xi(t) = a_0 \cos(\Phi(t)),$$

По определению: Частота – это производная по времени от фазы, Частота = Скорость изменения фазы.

$$\dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \eta(t),$$

Здесь η(t) – случайный шум, модулирующий частоту, частотная модуляция

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \int_0^t dt\, \eta(t)$$

$$\xi(t) = a_0 \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t dt\, \eta(t)\right)$$

Т.о., фаза Φ(t) является диффузионным (винеровским) случайным процессом

# Частотная модуляция (ЧМ)-2

Зададим свойства шума η(t):

1) шум считаем стационарным;

2) $$\overline{\eta} = 0; \ \overline{\eta^2} = \sigma_0^2; \qquad \overline{\eta\eta_\tau} = K_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega.$$

Наша задача: исследовать статистические свойства

1) фазы $$\varphi(t) = \int_0^t dt\, \eta(t);$$

2) самого колебания ξ(t).

# Частотная модуляция (ЧМ)-3

Как мы знаем из свойств диффузионного процесса (см. выше, формула ⊗) при любой статистике шума η(t)

$$\overline{\varphi^2} = \sigma^2(t) = 2\int_0^t d\tau (t-\tau) K_0(\tau).$$

*При* $t \to \infty$ *приближенно имеем:*

$$\sigma^2(t) \approx 2Dt; \qquad D = \pi G_0(0).$$

$\varphi$ *изменяется на ограниченном интервале:* $0 \le \varphi \le 2\pi$,

*поэтому в пределе* $t \to \infty$

$$w(\varphi) \approx \frac{1}{2\pi}, \quad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

# Частотная модуляция (ЧМ)-4

В дальнейшем считаем шум η(t) гауссовским.

Используя полученные выше результаты для фазовой модуляции колебаний, для корреляционной функции К(т) процесса ξ(t) может быть получено выражение (см. [Ахманов], стр. 165-166, а также см. выше слайд 370):

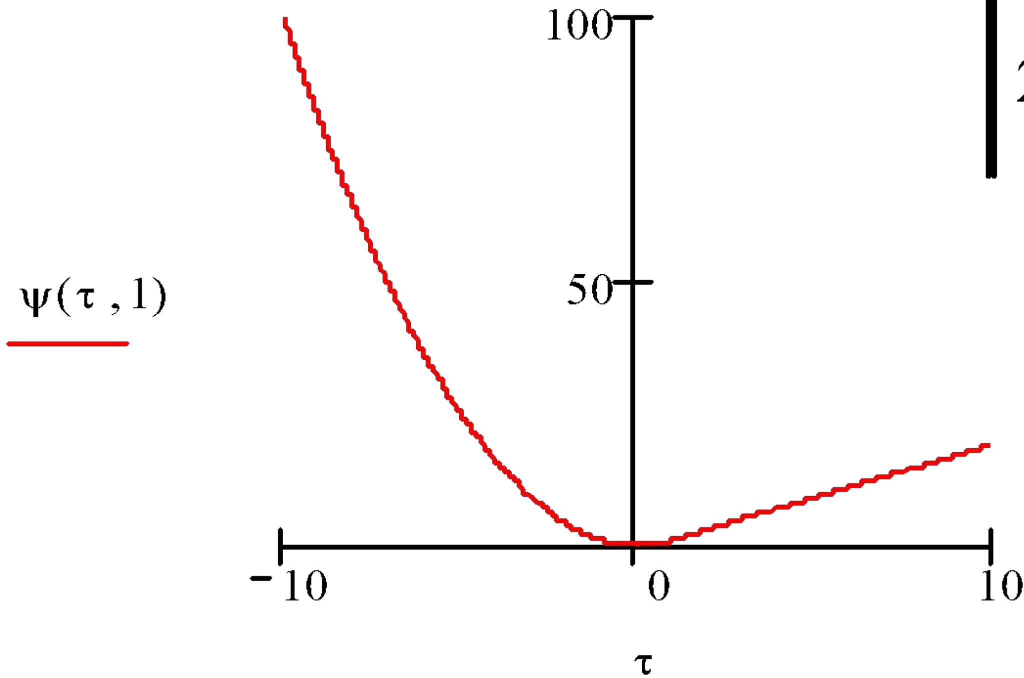
$$K(\tau) = \frac{{a_0}^2}{2} e^{-{\sigma_0}^2 \psi(\tau)} \cos \omega_0 \tau ,$$

$$где \quad \psi(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau^2}{2}, & \tau << \tau_0, \\ \dfrac{D}{{\sigma_0}^2}(\tau - \tau_0), & \tau >> \tau_0. \end{cases}$$

# Частотная модуляция (ЧМ)-5

Ниже используем аппроксимирующую функцию

$$\psi(\tau, \tau 0) := \begin{cases} \left(\dfrac{\tau}{\tau 0}\right)^2 & \text{if } \tau \le \tau 0 \\ 2 \cdot \left(\dfrac{\tau}{\tau 0} - \dfrac{1}{2}\right) & \text{if } \tau > \tau 0 \end{cases}$$



# Частотная модуляция (ЧМ)-6

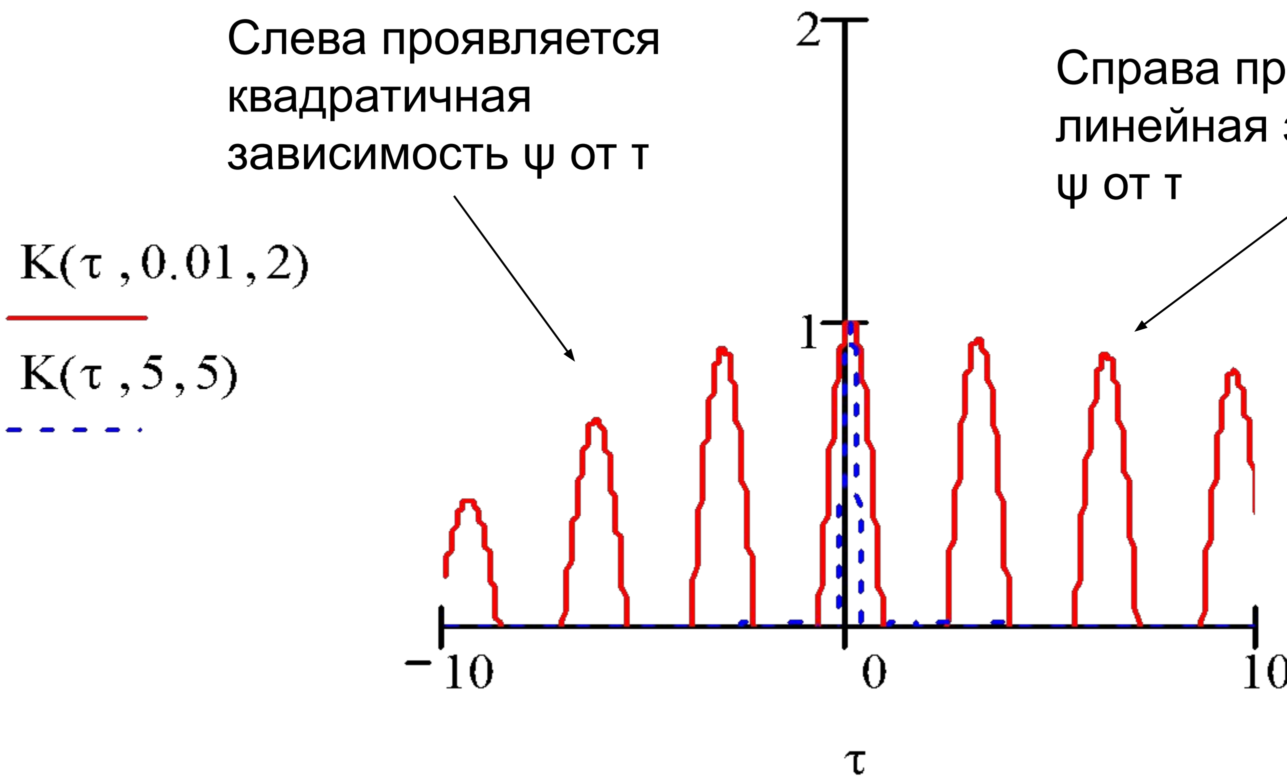
Приближенная функция модулированного сигнала

$$K(\tau, \lambda, \omega 0) := \exp(-\lambda \cdot \psi(\tau, 1)) \cdot \cos(\omega 0 \cdot \tau)$$

Параметр λ - это мера интенсивности модулирующего шума. Чем он больше, тем больше интенсивность шума. Частота ω0 – это основная частота модулируемых колебаний

Слева проявляется квадратичная зависимость ψ от τ

Справа проявляется линейная зависимость ψ от τ

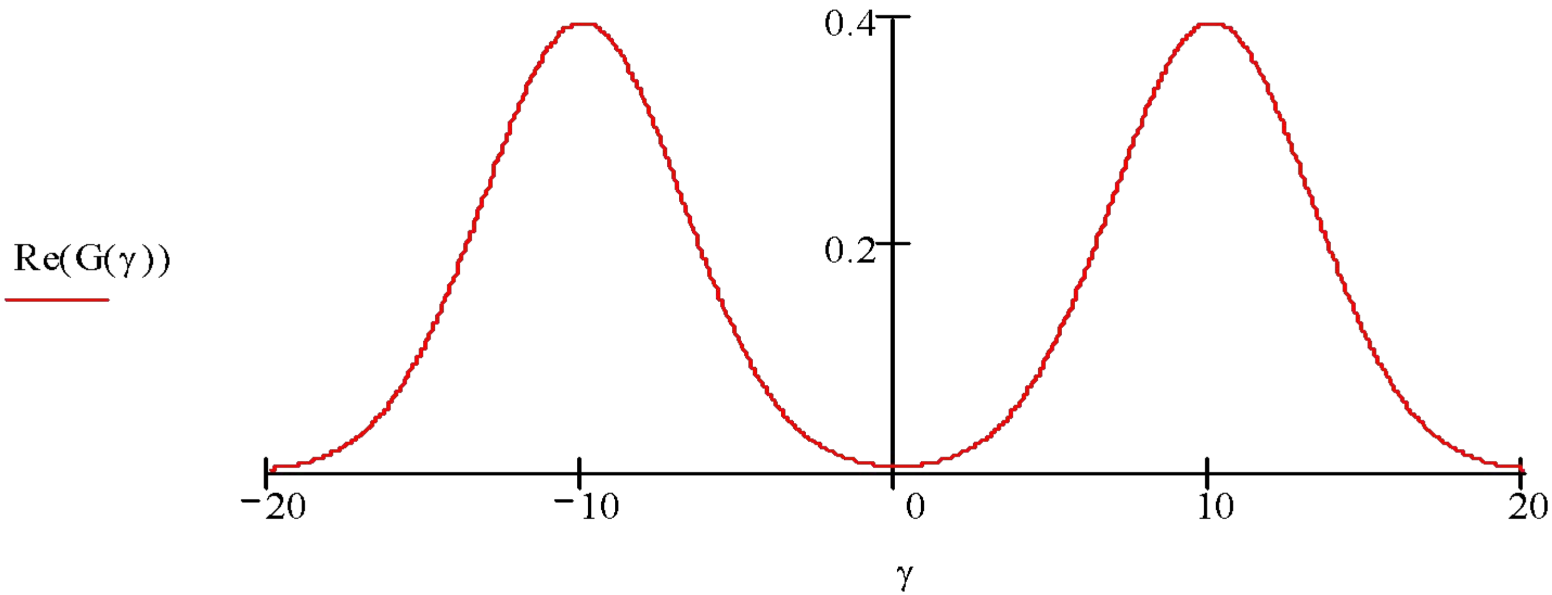


# Частотная модуляция (ЧМ)-7

Спектр мощности модулированного сигнала

1) Сильный шум λ = 5

$$G(\gamma) := \int_{-100}^{100} K(\tau, 5, 10) \cdot e^{-i\cdot\gamma\cdot\tau}\, d\tau$$



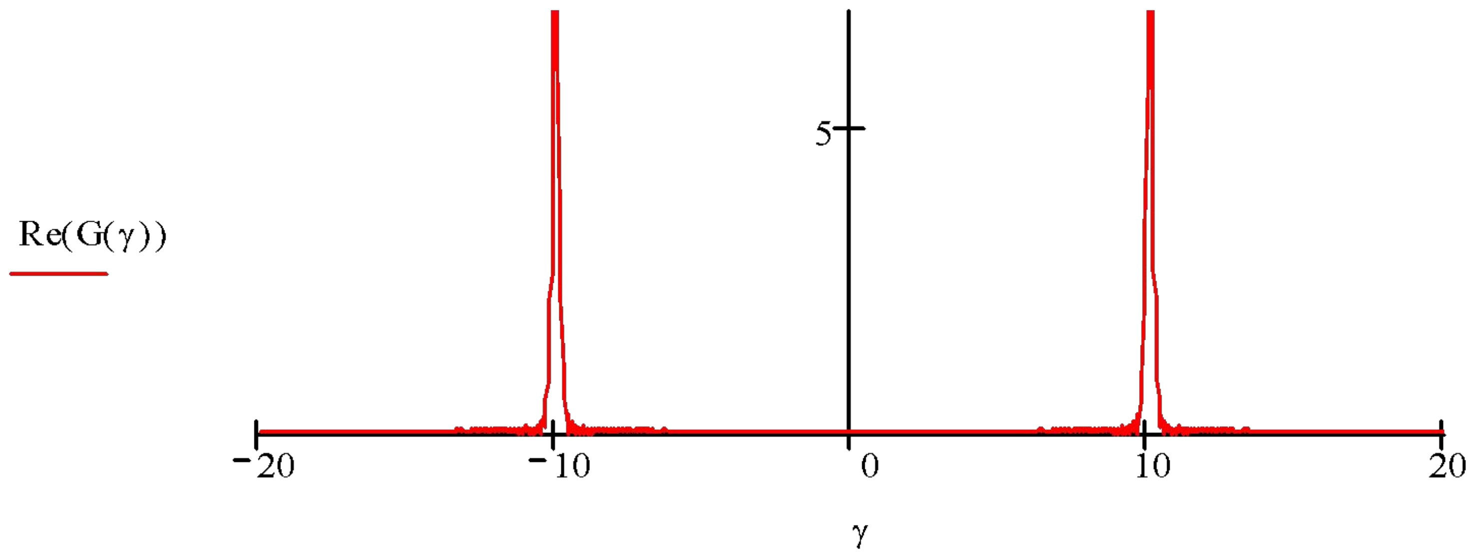

1) Спектр имеет максимум на основной частоте колебаний $\omega_0$ =10,
2) Линии спектра широкие

# Частотная модуляция (ЧМ)-8

Спектр мощности модулированного сигнала

2) Слабый шум λ = 0.01

$$G(\gamma) := \int_{-100}^{100} K(\tau, 0.01, 10) \cdot e^{-i\cdot\gamma\cdot\tau}\, d\tau$$



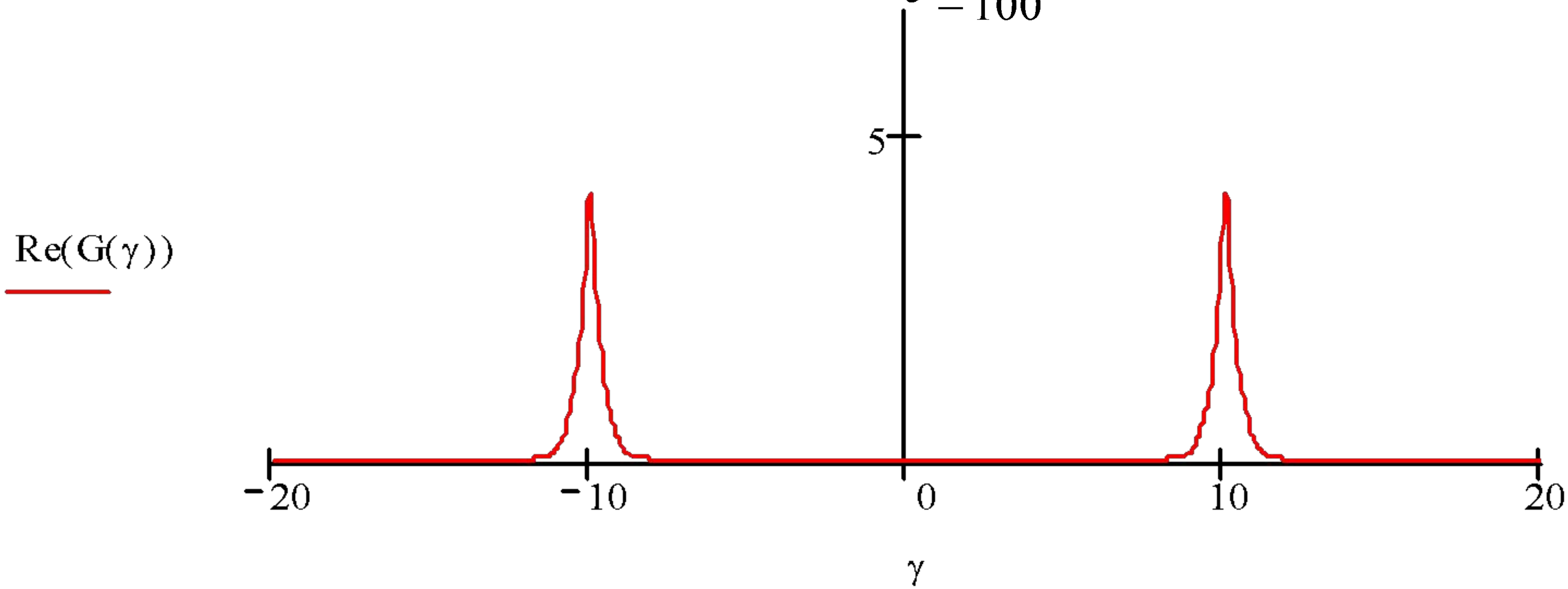

1) Спектр имеет максимум на основной частоте колебаний $\omega_0$ =10,
2) Линии спектра очень узкие, что объясняется очень малой амплитудой модуляции частоты.

# Частотная модуляция (ЧМ)-9

Спектр мощности модулированного сигнала

3) Слабый шум λ = 0.1

$$G(\gamma) := \int_{-100}^{100} K(\tau, 0.1, 10) \cdot e^{-i\cdot\gamma\cdot\tau}\, d\tau$$




Линии спектра уширяются по мере нарастания амплитуды шума

# Интерпретация полученных результатов

$$K(\tau) = \frac{a_0^{\ 2}}{2} e^{-\sigma_0^{\ 2}\psi(\tau)} \cos\omega_0\tau,$$

1) При большой интенсивности модуляций $\sigma_0^{\ 2}\tau_0^{\ 2} >> 1$
в корреляционной функции заменим ψ(т) на *квадратичную* функцию т$^2$ и получим гауссовский спектр $\Delta\omega \sim \sigma_0$

$$G(\omega) = \frac{a_0^{\ 2}}{4\sqrt{2\pi}\sigma_0}\left[ e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\sigma_0^{\ 2}} + e^{-(\omega+\omega_0)^2/2\sigma_0^{\ 2}} \right]$$

2) При малой интенсивности модуляций $D\tau_0 >> 1$
в корреляционной функции заменим ψ(т) на *линейную* функцию т и получим лоренцевский спектр $\Delta\omega \sim D$

$$G(\omega) = \frac{a_0^{\ 2} \cdot D}{4 \cdot \pi}\left[ \frac{1}{D^2 + (\omega-\omega_0)^2} + \frac{1}{D^2 + (\omega+\omega_0)^2} \right]$$