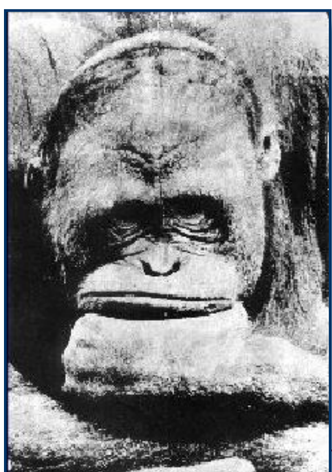
Курс физики для студентов 1 курса БГТУ
Заочный факультет

для специальностей ЛИД, ТДП, ТДП$_С$, МОЛК, МОЛК$_С$

Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I.
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

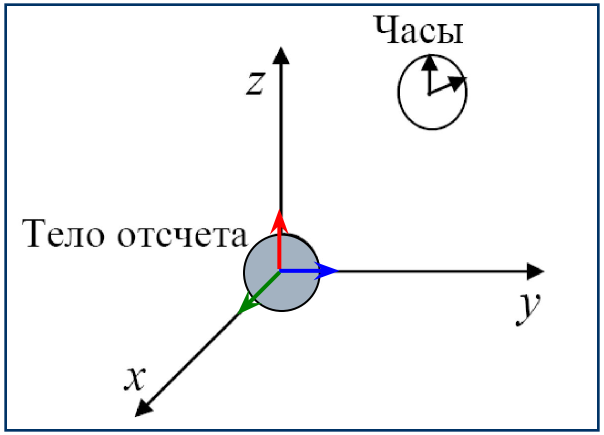


Лекция 1.
Кинематика материальной точки и твердого тела

2015

Основные определения механики

- **Механика** – раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.
- **Механическое движение** – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.
- **Классическая механика** (механика Галилея – Ньютона) изучает движения тел со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме: $v \ll c = 3 \cdot 10^{8}\ м/с$
- **Релятивистская механика** изучает движение макроскопических материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света.
- **Квантовая механика** изучает поведение микрочастиц с учетом их волновых свойств.



Система отсчета

Основная задача механики - определение положения тела в любой момент времени по известным начальному положению тела и его начальной скорости.

Тело отсчета – это тело, которое служит для определения положения интересующего нас тела.

Практически для описания движения с телом отсчета связывают систему координат, например, декартову.

Координаты тела позволяют установить положение тела в пространстве.

Движение тела происходит еще и во времени, поэтому для описания движения необходимо отсчитывать также и время.

Это делается с помощью часов.

Тело отсчета и связанная с ним система координат, снабженная часами, образуют так называемую **систему отсчета**, относительно которой изучают движения тел.

Понятие материальной точки и абсолютно твердого тела

- *Чтобы изучить, надо упростить реальные движения тел, **отбросив несущественные детали**.*
- *Так вместо реальных тел появляются **модели** (**абстрактные, идеализированные понятия**), применимость которых зависит:*
  - *от конкретного характера интересующей задачи и*
  - *от той степени точности, с которой нам нужен результат. Среди таких моделей - понятия **материальной точки** и **абсолютно твердого тела**.*
- ***Материальная точка** – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно **пренебречь**. Одно и то же тело в одних случаях можно рассматривать как материальную точку, в других же – как протяженное тело.*
  - *Например, радиус Земли значительно меньше расстояния от Земли до Солнца, и **ее орбитальное движение** можно хорошо описать как **движение материальной точки**.*
  - *Но **при рассмотрении суточного движения** Земли вокруг собственной оси заменить ее материальной точкой нельзя (есть вращательное движение!!!).*
- ***Механика материальной точки является основой всей механики.** Любое тело можно представить как совокупность взаимодействующих материальных точек с массами, равными массам его частей.*
- *Изучение движения этих частей сводится к изучению движения материальных точек.*
- ***Абсолютно твердое тело**, или просто **твердое тело**, – это система материальных точек, **расстояния** между которыми **не меняются** в процессе движения.*
- *Реальное тело можно считать абсолютно твердым, если в условиях рассматриваемой задачи его деформации пренебрежимо малы.*

Кинематика

- **Кинематика** – *это раздел механики, изучающий способы описания движений тел* ***без выяснения причин****, обуславливающих эти движения.*
- **Основная задача кинематики** *- расчет кинематических характеристик движущихся тел, к которым относятся скорость, ускорение, траектория и др.*

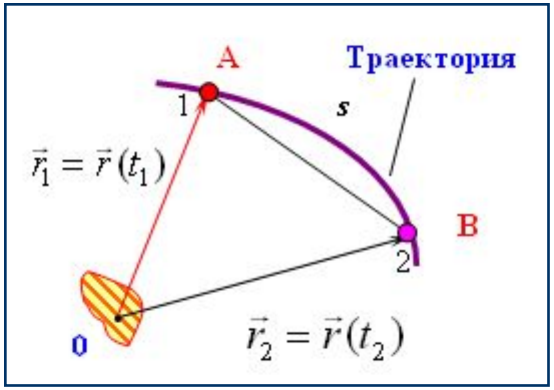
Кинематика материальной точки

Существует три способа описания движения материальной точки **А**:

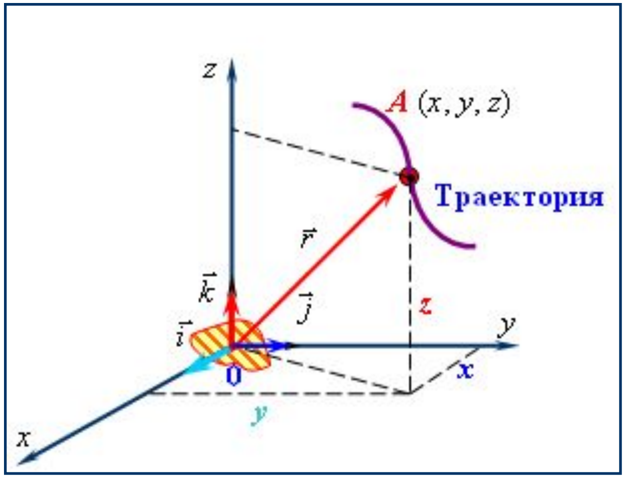
1) векторный

2) координатный

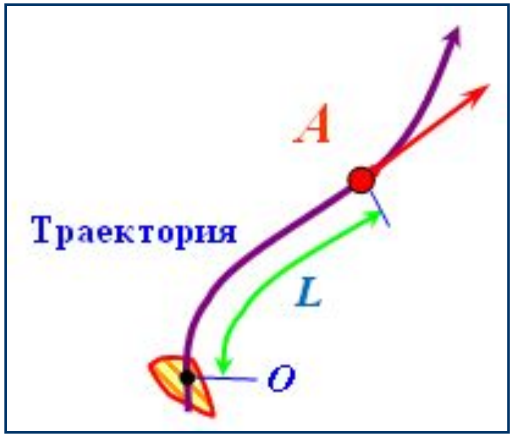
3) естественный



Радиус-вектором



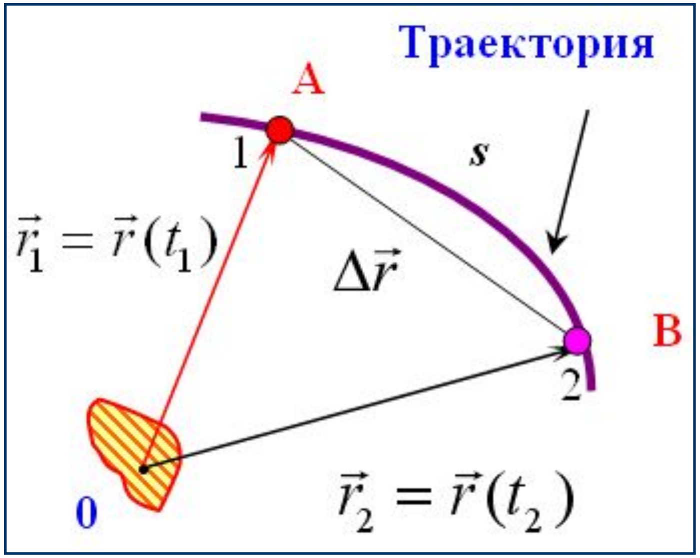
Проекциями на оси координат



Дуговой координатой L

Движение точки А задаётся:

1. Векторный способ описания движения. Уравнения движения. Скорость и ускорение.



В этом способе положение точки **A** задают **радиусом-вектором** проведенным из некоторой неподвижной точки **O** выбранной системы отсчета в точку **A**.

При движении точки **A** ее радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т. е. радиус-вектор точки **A** зависит от времени **t: r=r(t)**. Зависимость называется **кинематическим законом движения материальной точки**.

Траектория *L* – линия, вдоль которой движется тело.

Путь s – расстояние, пройденное точкой, отсчитанное вдоль траектории, т.е. это **длина траектории**.

Перемещение – направленный отрезок (вектор) между начальным и конечным положением тела: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Средний вектор скорости на некотором участке траектории - величина, равная отношению перемещения **Δ*r*** к промежутку времени **Δ*t***, за который это перемещение произошло:

$$\vec{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Этот вектор совпадает по направлению с вектором перемещения **Δ*r***

Мгновенная скорость и мгновенное ускорение

- ***Мгновенная скорость*** *(или просто* ***скорость****)* ***v*** *- это предел:*

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$, где при $\Delta t \to 0$ $\quad |d\vec{r}| = ds$

Тогда: $$\upsilon = |d\vec{r}|/dt = ds/dt \quad \Rightarrow \quad s = \int_0^t \upsilon dt$$

- ***Средняя (путевая) скорость*** *– это отношение:* $$\upsilon_{cp} = \frac{s}{\Delta t}$$

Средняя скорость является скалярной величиной. **Скорости** измеряются в **метрах в секунду** [м/с].

- ***Среднее*** ускорение за промежуток времени ***Δt*** - это отношение :

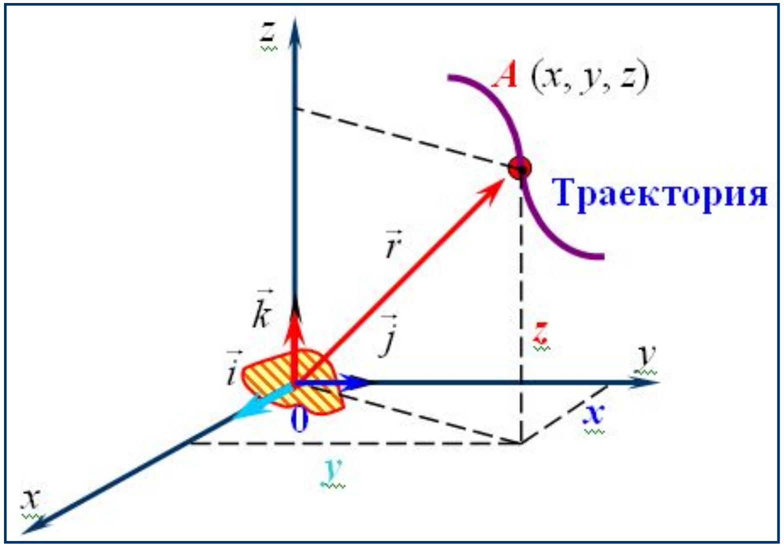
$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

- ***Мгновенное ускорение*** (или просто **ускорение**) **a** - это предел:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ускорение показывает, как быстро изменяется скорость во времени, и измеряется в **метрах в секунду в квадрате** [**м/с^2**].

2. Кординатный способ описания движения. Уравнения движения. Скорость и ускорение.



В этом способе с выбранным телом отсчета (в точке **О**) **жестко** связывают определенную систему координат, которая позволяет каждой точке пространства сопоставить три числа - координаты точки **А** этого пространства.

Наиболее распространенной является **прямоугольная (декартова) система координат**.

Тогда радиус-вектор и его модуль равны:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Тогда скорость и ее модуль равны:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

Тогда ускорение и ее модуль равны:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

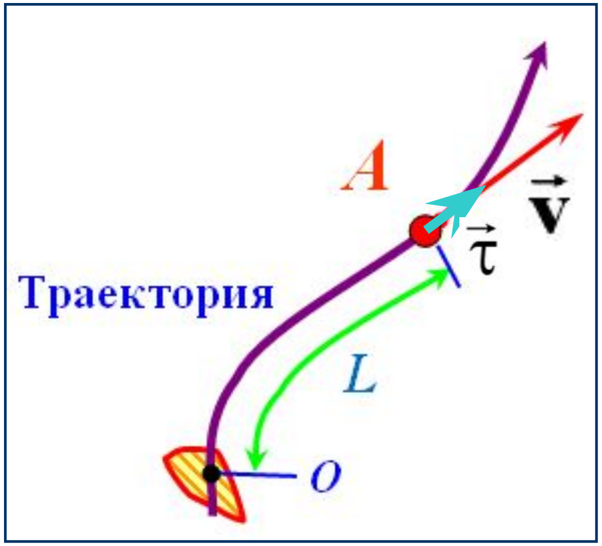
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

А проекции равны:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

3. Естественный способ описания движения. Уравнения движения. Скорость.



Этот способ применяется тогда, когда **траектория** точки **известна заранее**. Положение точки ***A*** на траектории задается ***дуговой координатой L*** – расстоянием, отсчитанным вдоль траектории от выбранного начала отсчета ***O***. При этом произвольно выбирают положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты L (вверх - плюс и вниз -минус).

Движение точки определено полностью, если известны ее траектория, начало отсчета ***O***, **положительное направление** отсчета дуговой координаты $L=l$ и закон движения точки, т. е. зависимость $l=l(t)$.

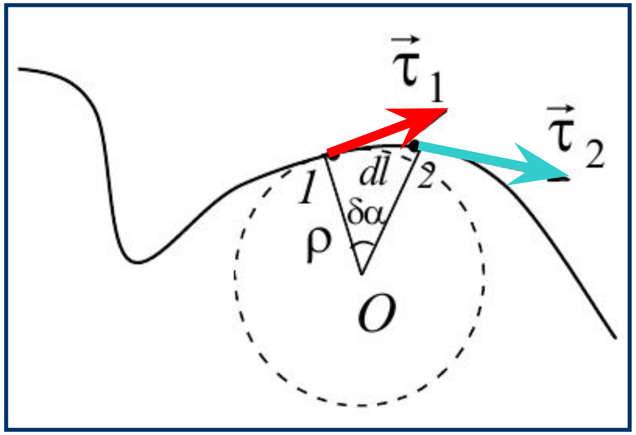
Найдем скорость и ускорение материальной точки:

Для задания вектора скорости вводим единичный вектор τ (длина =1), связанный с движущейся точкой ***A*** и направленный в сторону увеличения дуговой координаты l , т.е. это переменный вектор, направление которого зависит от местоположения точки на траектории, т. е. от дуговой координаты l. Тогда **скорость**: $\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \vec{\tau}$, причем:

$$\upsilon_\tau = \frac{dl}{dt}$$ - проекция на траекторию: $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = |\upsilon_\tau|$

Тогда **ускорение**: $$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Естественный способ описания движения. Виды ускорений.



Общее ускорение делится на:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

тангенциальное (**касательное**) **ускорение** a_τ :

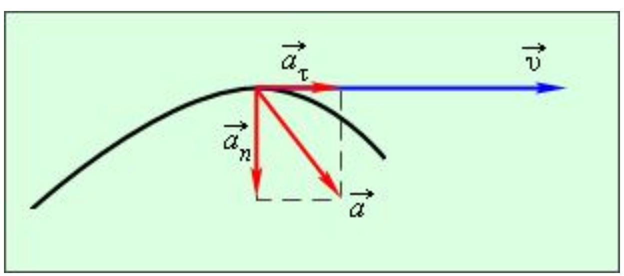
$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau}$$

нормальное (**центростремительное**) **ускорение** a_n :

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

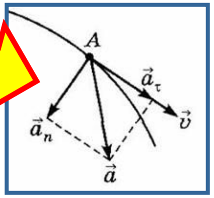


Тогда **общее ускорение и его модуль**:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

2. Классификация движений материальной точки.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$



- Механические движения **классифицируют в зависимости от конкретных условий движения**.
  - Классификацию частных случаев движения материальной точки **выполним с помощью естественного способа** задания движения.

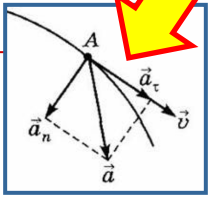
- **В зависимости от радиуса кривизны** ρ траектории возможны **три ситуации**:
  - ***криволинейное движение*** – радиус кривизны не является постоянной величиной, а изменяется от точки к точке траектории:
  $$\rho \neq \text{const}$$
  - ***движение по окружности*** – радиус кривизны является постоянной величиной, равной радиусу окружности:
  $$\rho = R = \text{const}$$
  - ***прямолинейное движение*** – радиус кривизны равен бесконечности, поэтому нормальное ускорение:
  $$a_n = 0 \qquad \rho = \infty$$

В каждом из этих трех случаев точка может двигаться:

1) равномерно,
2) равнопеременно и
3) неравномерно.

Виды движений материальной точки.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$



- **Равномерное движение** – движение, при котором модуль скорости не изменяется: $\upsilon = \text{const}$
  - Тогда тангенциальное ускорение: $a_\tau = 0$
  - **дуговая координата** точки l и **путь *s***: $l = \upsilon_\tau t\,; \quad s = \upsilon t$
- **Равнопеременное движение** - движение при котором тангенциальное ускорение не изменяется: $a_\tau = \text{const}$
  - Тогда тангенциальное ускорение: $a_\tau = d\upsilon_\tau / dt$
  - ***скорость:*** $\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + a_\tau t$
  - **дуговая координата** точки l: $l = \upsilon_{0\tau} t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$
    - Если скорость тела уменьшается, то движение называют **равнозамедленным** (тангенциальное ускорение имеет противоположное направление вектору скорости),
    - Если увеличивается – **равноускоренным** (тангенциальное ускорение совпадает по направлению с вектором скорости).
- **Неравномерное движение** – движение, при котором тангенциальное ускорение зависит от времени:

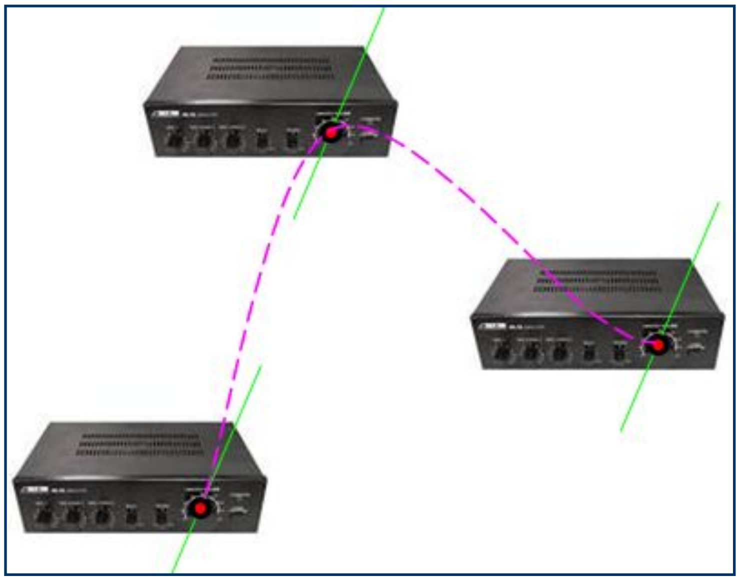
$$\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + \int_0^t a_\tau dt\,; \quad l = \int_0^t \upsilon_\tau dt$$

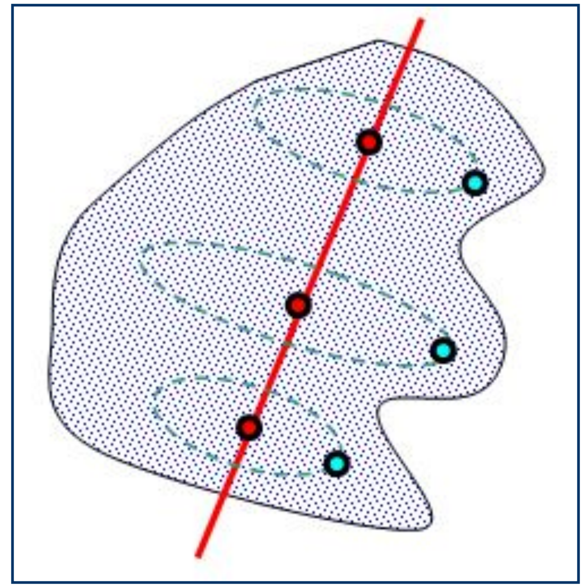
3. Кинематика твердого тела

Любое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения:

1) поступательное

2) вращательное

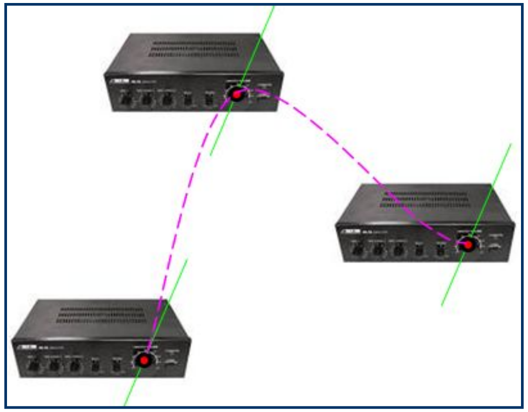




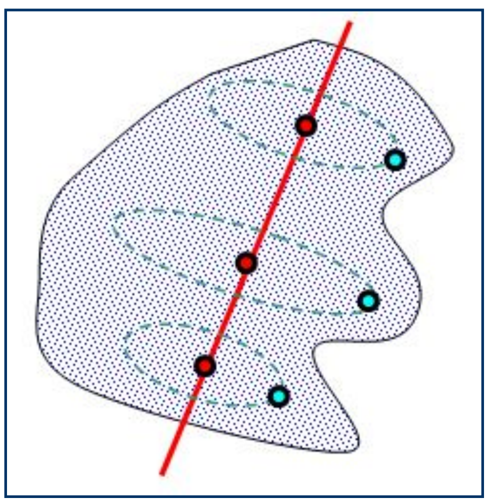
Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельна самой себе.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения.**

Поступательное и вращательное движение твердого тела



- ***Поступательное движение*** – это движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельна самой себе.
  - Все точки тела при поступательном движении **описывают одинаковые траектории**, сдвинутые относительно друг друга, а также имеют одинаковые скорости и ускорения.
  - Поэтому при изучении поступательного движения твердого тела **достаточно изучить** движение какой-либо одной его точки, т. е. задача сводится к изучению кинематики точки.
  - В качестве такой точки чаще всего выбирают **центр масс тела**.



- ***Вращательное движение*** – это движение, при котором все точки тела **движутся по окружностям**, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**.
  - Ось вращения может находиться вне тела.
  - Вращательное движение является ***плоским движением***, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях.
- **Для описания вращения твердого тела** вводят величины, относящиеся ко всему телу в целом, а не к отдельным его точкам: 1) **угол поворота** φ; 2) **угловая скорость** ω; 3) **угловое ускорение** ε.
- Зависимость угла поворота от времени $\varphi=\varphi(t)$ задает ***закон вращательного движения***.

Угловая скорость и угловое ускорение

- **Средняя угловая скорость** - это величина, численно равная отношению угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

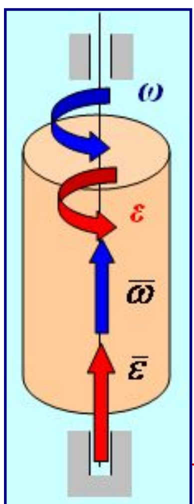
- **Мгновенная угловая скорость** (**угловая скорость**) есть предел:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

[радиан в секунду = рад/с]

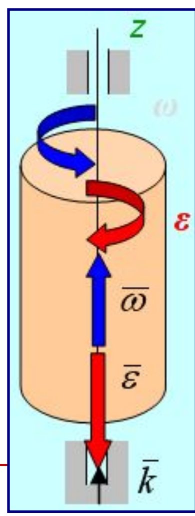
- **Угловой скорости приписывают направление**

Вектор углового ускорения ε направлен вдоль оси вращения $\varepsilon \uparrow\uparrow \omega$, если угловая скорость **возрастает** (слева), и $\varepsilon \downarrow\uparrow \omega$, если угловая скорость **уменьшается** (справа).



$\omega > 0$

$\varepsilon \uparrow\uparrow \omega$



$\varepsilon \downarrow\uparrow \omega$

Вектор углового ускорения характеризует изменение угловой скорости со временем. **Он численно равен** изменению угловой скорости в единицу времени и определяется как первая производная от угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

[радиан в секунду в квадрате = рад/с^2]

4. Частные случаи вращения. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

1. ***Равномерное вращение*** – это вращение с постоянной угловой скоростью ω=const. Тогда угловое ускорение при таком движении равно нулю ε=0.

$$\varphi = \omega t$$

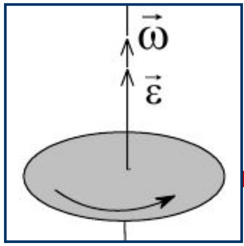
- *Период обращения* (T) – это время, за которое тело делает один оборот. За время, равное периоду обращения ***t=T***, тело поворачивается на угол 2π
  - Тогда при равномерном вращении: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ [*секунды* = с]
- *Частота вращения* - число оборотов в единицу времени $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ [Герц = Гц=с$^{-1}$]

2. *Равнопеременное вращение* – это вращение с постоянным по модулю угловым ускорением ε =const: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$

- В проекции на ось вращения: $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ аналогично $\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + a_\tau t$
- где знаки **плюс** и **минус** соответствуют **равноускоренному** и **равнозамедленному вращениям**.

- Если при ***t*=0** угол поворота φ_0**=0**, то зависимость угла поворота от времени при этом виде вращения тела:

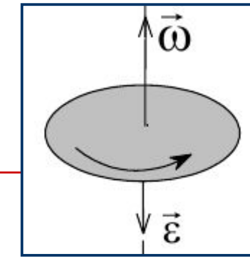
$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{аналогично} \quad l = \upsilon_{0\tau} t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$



$\varepsilon>0$

Частные случаи вращения. Переменное вращение

$\varepsilon<0$



3. ***Переменное вращение*** – это вращение, при котором угловое ускорение зависит от времени $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

- Тогда угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_0^t \vec{\varepsilon} dt$$

- Тогда угловое ускорение:

$$\varphi = \int_0^t \omega(t) dt$$

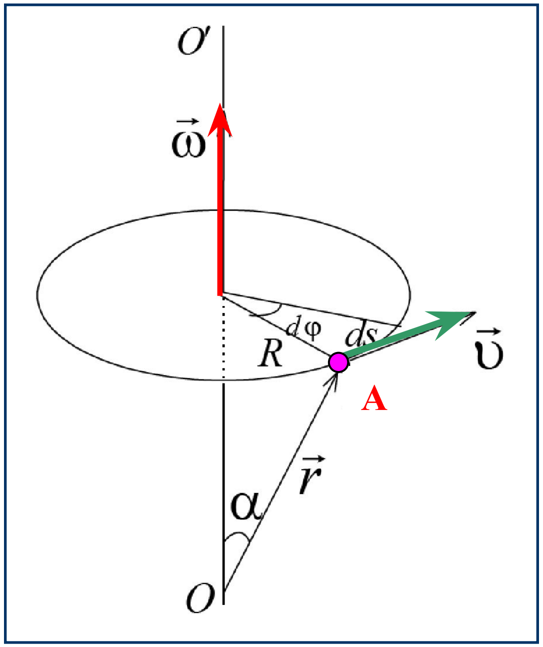
Аналогично при поступательном движении

$$\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + \int_0^t a_\tau dt; \quad l = \int_0^t \upsilon_\tau dt$$

- **Видно,** что между формулами, **описывающими движение точки** (или поступательное движение твердого тела), и формулами, **описывающими вращательное движение**, существует прямая аналогия:

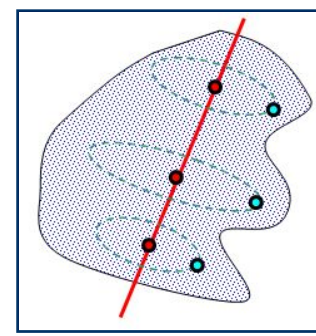
- дуговой координате соответствует угол поворота,
- скорости и тангенциальному ускорению движения - угловые скорость и ускорение.
- Более того, **эти величины оказываются связаны между собой**.

Связь между линейными и угловыми характеристиками движения



- Найдем скорость (линейную скорость) **v** произвольной точки ***A*** твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью **ω**.
- За время точка *dt* совершит перемещение *dr*, по модулю равное элементарному пути *ds*, пройденному точкой.
  - Используя радианную меру измерения углов, $ds = R\,d\varphi$, где ***R*** – расстояние точки от оси вращения (радиус окружности, по которой движется точка), $d\varphi$– угол, на который повернулось тело.
  - Тогда **модуль скорости** точки:

$$\upsilon = \frac{|d\vec{r}\,|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} \Rightarrow \upsilon = \omega R$$



Тангенциальное ускорение точк

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\tau = R\varepsilon$$

Нормальное ускорение точки:

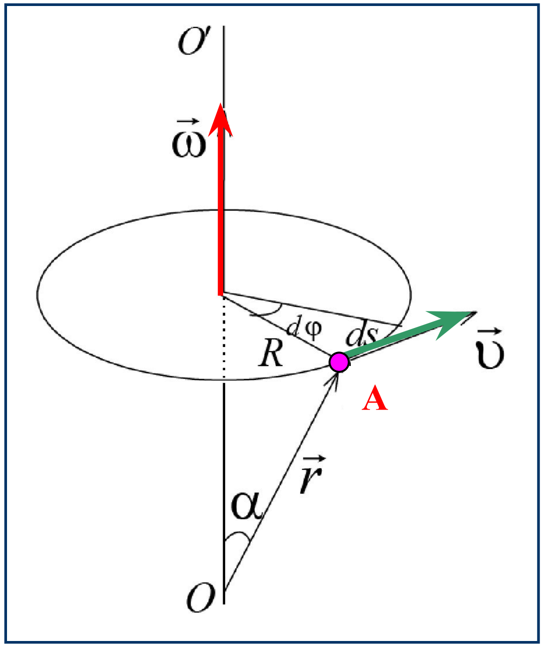
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow a_n = \omega^2 R$$

Полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \Rightarrow a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Таким образом, линейные скорости и ускорения точек твердого тела **зависят от расстояния до оси вращения**.

Связь между линейными и угловыми характеристиками движения в векторном виде



- **Используем правило векторного умножения.**
  - Учитывая, что ***r*** – модуль радиуса-вектора точки, тогда радиус окружности:
  - модуль скорости точки:
  - вектор скорости:
- Полное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

Первое слагаемое в этом выражении является тангенциальным ускорением, а второе – нормальным ускорением.

Тангенциальное ускорение точки:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

Нормальное ускорение точки:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

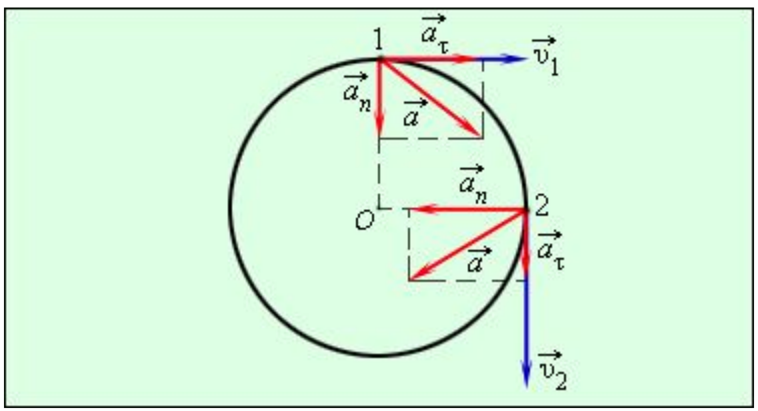
Сравнение между линейными и угловыми характеристиками движения в виде таблицы

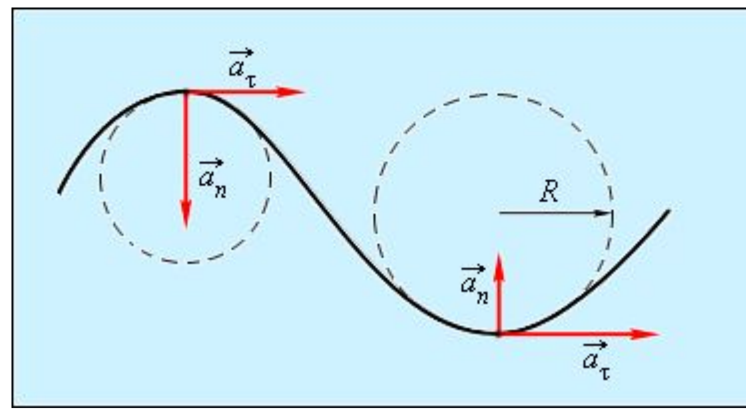
В заключение приведем таблицу сравнительных характеристик поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение	Вращательное движение	Связь линейных и угловых характеристик
1. Путь S	Угол φ	
2. Скорость $\upsilon = dS/dt$	Угловая скорость $\omega = d\varphi/dt$	$\upsilon = \omega R$
3. Ускорение $a = d\upsilon/dt = d^2S/dt^2$ $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ $a_\tau = d\upsilon_\tau/dt;\ a_n = \upsilon^2/R$	Угловое ускорение $\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$	$a_\tau = \varepsilon R$ $a_n = \omega^2 R$ $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$
Равнопеременное движение		
4. Скорость $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$	Угловая скорость $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$	
5. Путь $S = S_0 + \upsilon_0 t \pm at^2/2$	Угол $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$	
6. $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2a(S - S_0)$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0)$	

Спасибо за внимание!

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$





Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.