В.Б.ТАРАСОВ

e-mail: tarasov@rk9.bmstu.ru

КУРС «ОСНОВЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА»

ЛЕКЦИЯ 8. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ И ИХ РАСШИРЕНИЯ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ИНФОРМАТИКЕ И ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ

ОСНОВНЫЕ ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Логика Лукасевича L_3

$LM_{L3} = \langle\{1, 0.5, 0\}, \{\rceil, \to_L\}, \{1\}\rangle$

0.5 – «возможность», «безразличие»

Логика Клини K_3

$LM_{K_3} = \langle\{1, 0.5, 0\}, \{\rceil, \vee\}, \{1\}\rangle$

0.5 – «неопределенность, «неизвестность», «неполнота информации»

Логика Гейтинга H_3

$LM_{H3} = \langle\{1, 0.5, 0\}, \{\neg, \wedge, \Rightarrow\}, \{1\}\rangle$

0.5 – «половинчатая истина»

Логика Бочвара B_3

$LM_{B3} = \langle\{1, 0.5, 0\}, \{\rceil, \wedge, \vee, \to_B\}, \{1\}\rangle$

0.5 – «бессмыслица», «абсурд»

ОСНОВНЫЕ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

$L_3 \to L_\infty$ **Бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞**

$$LM_{L\infty} = \langle\, [0,1], \{],\to_L\},\{1\}\rangle,$$

$K_3 \to K_\infty$ **Бесконечнозначная логика Клини K_∞ (логика Заде)**

$$LM_{K\infty} = \langle\, [0,1], \{], \vee\}, \{1\}\rangle$$

$H_3 \to G_\infty$ **Бесконечнозначная логика Геделя G_∞**

$$LM_{G3} = \langle\, [0,1], \{\neg, \wedge, \Rightarrow\}, \{1\}\rangle$$

Бесконечнозначная логика Рейхенбаха R_∞

$$LM_{L\infty} = \langle\, [0,1], \{],\to_R\},\{1\}\rangle,$$

МЕТОДИКА АНАЛИЗА МНОГОЗНАЧНЫХ И НЕЧЕТКИХ ЛОГИК

ПРИНЦИП ЛОГИЧЕСКОГО ФАТАЛИЗМА

Из законов классической логики следует, что все в мире предопределено, и человек не имеет свободы воли. Этот принцип был сформулирован Аристотелем в 9-й главе трактата «Об истолковании» с целью его опровержения (на примере рассуждений о будущем морском сражении).

Предположим, что сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, что завтра не будет морского сражения. Следовательно, необходимо, чтобы завтра было морское сражение **(Принцип необходимости).**

Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Но само высказывание, что завтра произойдет морское сражение, сейчас либо истинно, либо ложно **(Логический принцип бивалентности).** Следовательно, либо необходимо, что морское сражение завтра произойдет, либо необходимо, что морское сражение завтра не произойдет.

Обобщая этот аргумент, получаем, что все в мире происходит по необходимости, и в нем нет случайных событий и свободы воли.

Логическая структура здесь такова: Пусть *p* – выска**зывание о будущем случайном событии. Имеем**

(1) $T(p) \rightarrow N(p)$ – принцип необходимости

(2) $F(p) \rightarrow N(\neg p)$

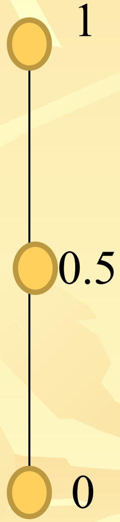
(3) $T(p) \vee F(p)$ - принцип бивалентности

(4) $N(p) \vee N(p)$

ТРЕХЗНАЧНАЯ ЛОГИКА ЛУКАСЕВИЧА

Ян Лукасевич (1878 - 1956),

На возможные ограничения логического принципа бивалентности указал еще Аристотель, который в 9-й главе своего трактата «Об истолковании» привел ставший знаменитым пример завтрашнего морского сражения.
Из этого примера следовало, что ни одно из противоречащих друг другу высказываний о будущих событиях в настоящий момент времени ни истинно, и ни ложно. Подобные высказывания лишь впоследствии обретут привычные значения истины или лжи.
Именно эта идея Аристотеля вдохновила Я.Лукасевича на создание трехзначной логики $\mathbf{L}_3$. В известной статье «О детерминизме» он утверждал: «Помимо истинных и ложных высказываний существуют *возможные* (*случайные*) высказывания. Иными словами, объективная возможность относится как нечто третье в добавление к существованию и несуществованию. Этим высказываниям соответствуют другие логические значения, кроме T={t}=1 и F={f}=0, по крайней мере, одно третье логическое значение I=0.5». При этом логические значения можно упорядочить по убыванию истинности: T > I > F.



Доопределение исходных связок: $\rceil 0.5 = 0.5$
$(1 \rightarrow 0.5) = (0.5 \rightarrow 0) = 0.5$
$(0 \rightarrow 0.5) = (0.5 \rightarrow 0.5) = (0.5 \rightarrow 1) = 1$

ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ ДЛЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

Базовые операции в трехзначной логике Лукасевича – отрицание и импликация.

x	$\rceil x$
1	0
0.5	0.5
0	1

$x \to y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	1	1	0.5
0	1	1	1

Все другие связки определяются на основе этих двух исходных связок по следующим формулам:

$$x \vee y = (x \to y) \to y$$

$$x \wedge y = \rceil (\rceil x \vee \rceil y)$$

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$$

$x \vee y$	1	0.5	0
1	1	1	1
0.5	1	0.5	0.5
0	1	0.5	0

$x \wedge y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	0.5	0.5	0
0	0	0	0

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ВАЙСБЕРГА

W1. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$

W2. $x \to (y \to x)$

W3. $(\rceil x \to \rceil y) \to (y \to x)$

W4. $((x \to \rceil x) \to x) \to x.$

ОПЕРАТОР СЛУПЕЦКОГО

Добавление в логику Лукасевича специального оператора нейтрализации (приведения к неопределенности) *SL*, предложенного Е.Слупецким, который переводит любое значение истинности в 0.5, позволяет получить функционально полную трехзначную логику.

x	SL x
1	0.5
0.5	0.5
0	0.5

ТРЕХЗНАЧНАЯ ЛОГИКА КЛИНИ К3 – простейший пример параполной логики

Разработка теории рекурсивных функций привела С.Клини к идее частичной функции (не всюду определенной). Отсюда третье истинностное значение может интерпретироваться как «неопределенность», «неизвестность», «неразрешимость».

Здесь оно вводится не по онтологическим соображениям ,как у Лукасевича, а скорее по эпистемологическим.

Закон материальной импликации

$$x \to y = \rceil x \vee y$$

ТРЕХЗНАЧНАЯ ЛОГИКА ГЕЙТИНГА Н3 – простейший пример интуиционистской логики

Трехзначная логика А.Гейтинга (совпадающая с трехзначной логикой К.Геделя) является простейшим примером *интуиционистской логики*. Интуиционизм как логико-математическое направление настаивает на необходимости признания асимметрии между истиной и ложью. По мнению интуиционистов, из ложности отрицания данного суждения нельзя делать вывод об истинности этого суждения.В классической двузначной логике справедливо утверждение:

$$(p \rightarrow \neg\neg p) = (\neg\neg p \rightarrow p)$$

Идея о том, что второй член этой конъюнкции должен быть отброшен, восходит к основоположнику математического интуиционизма Л.Брауэру

x	$\neg x$
1	0
0.5	0
0	1

$x \Rightarrow y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	1	1	0
0	1	1	1

$x \wedge y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	0.5	0.5	0
0	0	0	0

БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА ЛУКАСЕВИЧА L_∞

Она является исторически первым примером нечеткой логики с континуумом значений истинности. Ее логическая матрица имеет вид

$$\boldsymbol{LM_{\mathrm{L}\infty}} = \langle\, [0,1], \rceil, \to, \{1\} \rangle,$$

где $\rceil$ − унарная операция отрицания, а
$\to$ − бинарная операция импликации, определяемые как

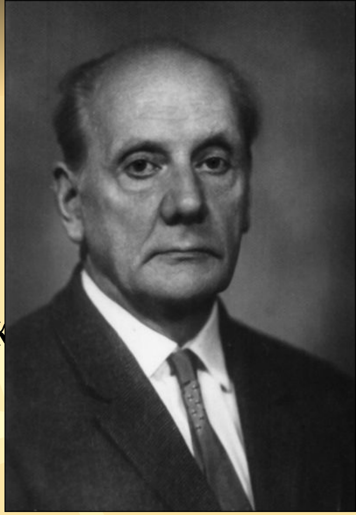
$$\rceil\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x},$$

$$x \to y = \min(1,\ 1 - x + y).$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся следующим образом

- $x \vee y = (x \to y) \to y = \max(x, y)$,
- $x \wedge y = \rceil(\rceil x \vee \rceil y) = \min(x, y)$.

Д.А.БОЧВАР: ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ КОНЦЕПЦИИ



Бочвар Дмитрий Анатольевич (1903-1990)

1. Построение **трехзначной логики парадоксов** (работы по формализации парадокса лжеца и других семантических парадоксов средствами специальной трехзначной логики)
2. Идея различения внутренних и внешних логических связок, а следовательно, построения двух уровней языка – внутреннего языка, в котором выражаются некоторые факты, но нет доказательств, и внешнего языка, в котором доказываются утверждения, в том числе, о формулах внутреннего языка (парадоксальная формула принадлежит внутреннему языку, а утверждение ее бессмысленности – внешнему).
3. Рассмотрение многозначных логик как фрагментов формализованной семантики **(Принцип: сначала семантика, а затем – формальная логическая конструкция).** Это означает интерпретируемость истинностных значений в содержательных терминах (например, порождение истинностных значений высказываний посредством правил правдоподобного вывода).

   Оно опирается на тезис Д.А.Бочвара об адекватности многозначных логик базам данных с неполной информацией.

ОСНОВНЫЕ ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Логика Бочвара B_3

$LM_{B3} = \langle\{1, 0.5, 0\}, \{\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow_B\}, \{1\}\rangle$

0.5 – «бессмыслица», «абсурд».

Внутренние связки

Здесь основным принципом, объясняющих появление для всех бинарных операций целых строк и столбцов со значениями 0.5 является принцип «заражения абсурдом» ($x*0.5=0.5$, где $*$ есть произвольная операция над значениями истинности).

x	$\rceil x$
1	0
0.5	0.5
0	1

$x\rightarrow y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	0.5	0.5	0.5
0	1	0.5	1

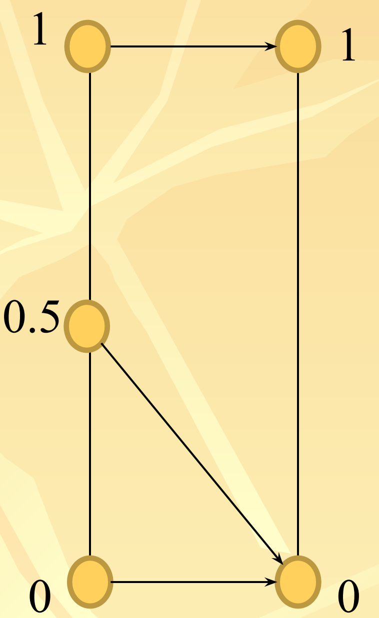
$x\vee y$	1	0.5	0
1	1	0.5	1
0.5	0.5	0.5	0.5
0	1	0.5	0

$x\wedge y$	1	0.5	0
1	1	0.5	0
0.5	0.5	0.5	0.5
0	0	0.5	0

ДВА УРОВНЯ ЛОГИКИ БОЧВАРА
ВНЕШНИЕ СВЯЗКИ

Согласно подходу Д.А.Бочвара, логика парадоксов имеет два уровня. Первый уровень образуют внутренние суждения, которые являются выразительными средствами и представляют язык-объект, в рамках которого рассматриваемые факты не могут быть доказаны. На втором уровне находятся внешние формулы, т.е. дедуктивные средства, с помощью которых могут доказываться утверждения о внутренних формулах (в этом смысле внешние формулы представляют метаязык). Здесь любая бессмысленная (парадоксальная) формула принадлежит внутреннему языку, а утверждения об ее бессмысленности – внешнему. При этом внешний уровень допускает дедуктивный вывод, т.е. внешние операции над истиной и ложью эквивалентны операциям в традиционной двузначной логике. Внешние операции над третьим истинностным значением (бессмысленно) определяются аналогично операциям над ложью (т.е. принимают одни и те же значения).

Ниже представлены таблицы истинности для внешних операций в смысле Д.А.Бочвара.



x	$\neg x$
1	0
0.5	1
0	1

$x \to y$	1	0.5	0
1	1	0	0
0.5	1	1	1
0	1	1	1

$x \wedge y$	1	0.5	0
1	1	0	0
0.5	0	0	0
0	0	0	0

$x \vee y$	1	0.5	0
1	1	1	1
0.5	1	0	0
0	1	0	0

Д.А. БОЧВАР – РОДОНАЧАЛЬНИК ГЕОМЕТРИКО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ

Бочвар Д.А. К общей теории логических матриц с континуумом валентностей// Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. – М.: Наука, 1976. – С.198-220.

В 1976 г. за несколько лет по появления первых работ по формированию и использованию треугольных норм и конорм в нечеткой логике (в том числе, параметрических функций, таких как семейства норм Гамахера, Сугено, Франка и др.) и более чем за 20 лет до выхода в свет работ П.Хаека по представлению нечетких логик как континуальных логик, порожденных с помощью непрерывных треугольных норм Д.А.Бочвар предложил набросок общей теории логических матриц с континуумом валентностей (т.е. по сути, вариант теории параметризованных нечетких логик), в русле которой в бесконечнозначную логику были впервые введены нелинейные функции отрицания и импликации.
В результате были построены семейства гиперболических, параболических, эллиптических логик: гиперболические логики как расширения бесконечнозначных логик Лукасевича и Геделя.

Впоследствии Григолия Р.Ш. и Финн В.К. ввели аппарат B_n-алгебр (квазиалгебр), которые соответствуют n-значной логике Бочвара.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ:

Различные геометрические интерпретации бесконечнозначных семантик

А. Гиперболические логики задаются логическими матрицами, для которых операции отрицания $n_H(x)$ и импликации $I_H(x,y)$ представляют собой уравнения гипербол или поверхностей гиперболического типа соответственно

$$LM_{HL} = \langle [0,1], \{1\}, n_H, I_H \rangle,$$

I. Обобщение логики Лукасевича

1. Семейство параметрических отрицаний $n_H(x) = k\,(1 - x)/\,(1 + x)$

2. Семейство импликаций
$$I_H(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y \\ k[(1-(x-y)/k+(x-y)], \text{ если } x>y \end{cases}$$

При $k\to\infty$ $n_H(x) \to 1 - x$ (линейное отрицание Лукасевича)

$I_H(x,y) \to \min\{1, 1 - x+y\}$ (импликация Лукасевича)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ (продолжение):

II. Обобщение логики Геделя

$LM_{HL*} = \langle [0,1], \{1\}, n^*_H, I^*_H \rangle$,

1*. Семейство параметрических отрицаний $n^*_H(x) = [(1-x) / (1+x)]^k$

2*. Семейство параметрических импликаций

$$I^*_H(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y \\ (k+1)y/(k+x), \text{ если } x > y \end{cases}$$

При $k \to \infty$ $n^*_H(x) \to \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$ (отрицание Геделя)

$$I^*_H(x,y) \to \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y \\ y, \text{ если } x > y \end{cases}$$ (импликация Геделя)

ПСЕВДОФИЗИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ Д. А.ПОСПЕЛОВА

Псевдофизическая логика (ПФЛ) – это логика, отражающая восприятие субъектом или искусственной системой закономерностей внешней физической среды. Особенностью ПФЛ является наличие **нечетких шкал**, на которые проецируются объекты. Примерами ПФЛ являются **временные логики, пространственные логики, логики действий** и т.п.

[Толковый словарь по ИИ, 1992, с.45-46]

Псевдофизические логики – класс логических систем, имеющих следующие особенности:
1. В качестве пропозициональных переменных используются лингвистические переменные (ЛП) Л.Заде, имеющие в качестве значений либо слова естественного языка, либо нечеткие множества, соответствующие этим словам, а также числовые (базовые) переменные.

Например, в **частотной логике** И.В.Ежковой и Д.А.Поспелова (1977) в качестве ЛП берется «Частота события» с множеством значений {никогда, чрезвычайно редко, редко, ни часто, ни редко, часто, очень часто, почти всегда, всегда}, а в качестве числовой переменной {0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1}.

2. На множестве значений для всех переменных имеются **порядковые шкалы** с отношением строгого порядка. Точнее для ЛП существуют порядковые шкалы, а для числовых переменных – метрические шкалы.

3. Выводы, используемые в псевдофизических логиках, учитывают порядковые и метрические шкалы, а также расположение событий на них.

Первые работы по ПФЛ появились в 1975 г.

[Представление знаний в человеко-машинных и робототехнических системах, т.А, 1984, с.48-50]

ПСЕВДОФИЗИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

По аналогии с современной психофизической схемой и в отличие от классической аристотелевской логики **псевдофизические логики** описывают не идеальный платоновский мир, **а восприятие реального физического мира конкретным субъектом (агентом).**

Псевдофизическая логическая система представляет собой семейство взаимосвязанных логических подсистем, которые можно отнести к двум основным уровням.

На первом уровне находятся **пространственная, временная, каузальная логика**, а также **логика действий**.

На втором, более высоком уровне находятся **логика оценок**, **логика мнений, логика норм** и пр.

Следует отметить, что логики первого уровня непосредственно связаны с взаимодействием агентов (например, роботов) с внешней средой.

Псевдофизические логики опираются на специальные **шкалы:** как порядковые, так и метрические. Взаимосвязь между шкалами задается с помощью **нечеткого отношения моделирования (А.Н.Аверкин)**

Суть псевдофизических логик составляет работа с событиями (т.е. с формулами, соотнесенными с отметками на шкалах).

Взаимное положение событий на множестве шкал, возможные перемещения по шкалам и связь этих перемещений с изменениями на других шкалах позволяют описать те процессы вывода, которые характерны для псевдофизических систем.

ПСИХО-ЛОГИКА: ПОЛЯРНЫЕ ШКАЛЫ

СИСТЕМА ОППОЗИЦИОННЫХ ШКАЛ – ОБЪЕКТИВНАЯ ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ ОБРАЗА МИРА (ПО А.Н.Леонтьеву)

ОЦЕНИВАНИЕ НА ПОЛЯРНЫХ ШКАЛАХ – ВАЖНЕЙШИЙ СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

В мышлении человека порядо ксоздается из хаоса путем формирования системы **оппозиционных (полярных) шкал** и различения некоторых объектов с помощью набора оценок на этих шкалах.

У оппозиционной шкалы всегда есть **два конца (полюса)** и **середина (нейтральная точка),** которая делит всю шкалу на две части – **положительную** и **отрицательную**

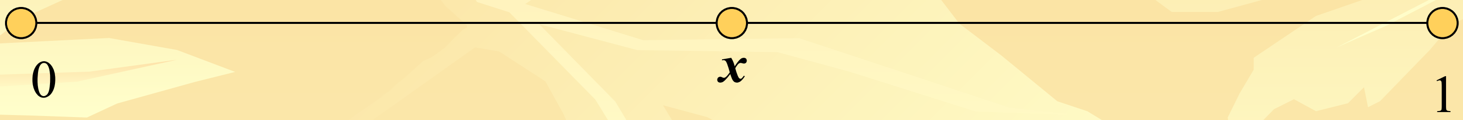
-1 0 +1

A^- A_0 A^+

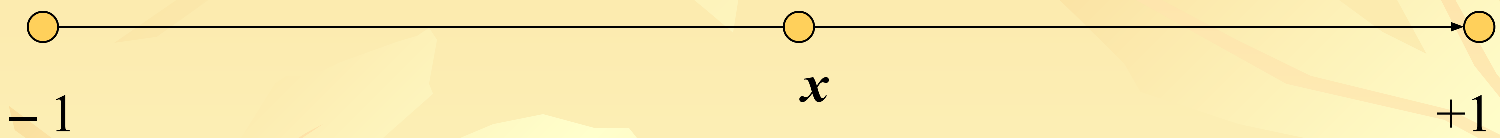
В середине шкалы происходит переключение с одного типа оценок на другой.

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРЕСНЫЕ ПРОСТРАНСТВА *E*, СВЯЗАННЫЕ С ОППОЗИЦИОННЫМИ ШКАЛАМИ И МНОГОЗНАЧНЫМИ ЛОГИКАМИ

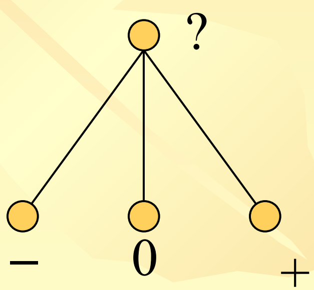
Пространство Лукасевича (Заде)



Пространство Чэна



Пространство Де Клира



Каноническое биполярное пространство