Числовые последовательности.

Функцию $y = f(x)$, где $x \in N$

называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью.

Обозначение:

$$y = f(n)$$

или

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots$$

или

$$(y_n)$$

Способы задания последовательности:

1. Словесный.

Пример: последовательность четных чисел.

2. Аналитический (задана формула n – го члена).

Пример: №1. $$y_n = n^2$$

№2. Последовательность Фибоначчи $$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

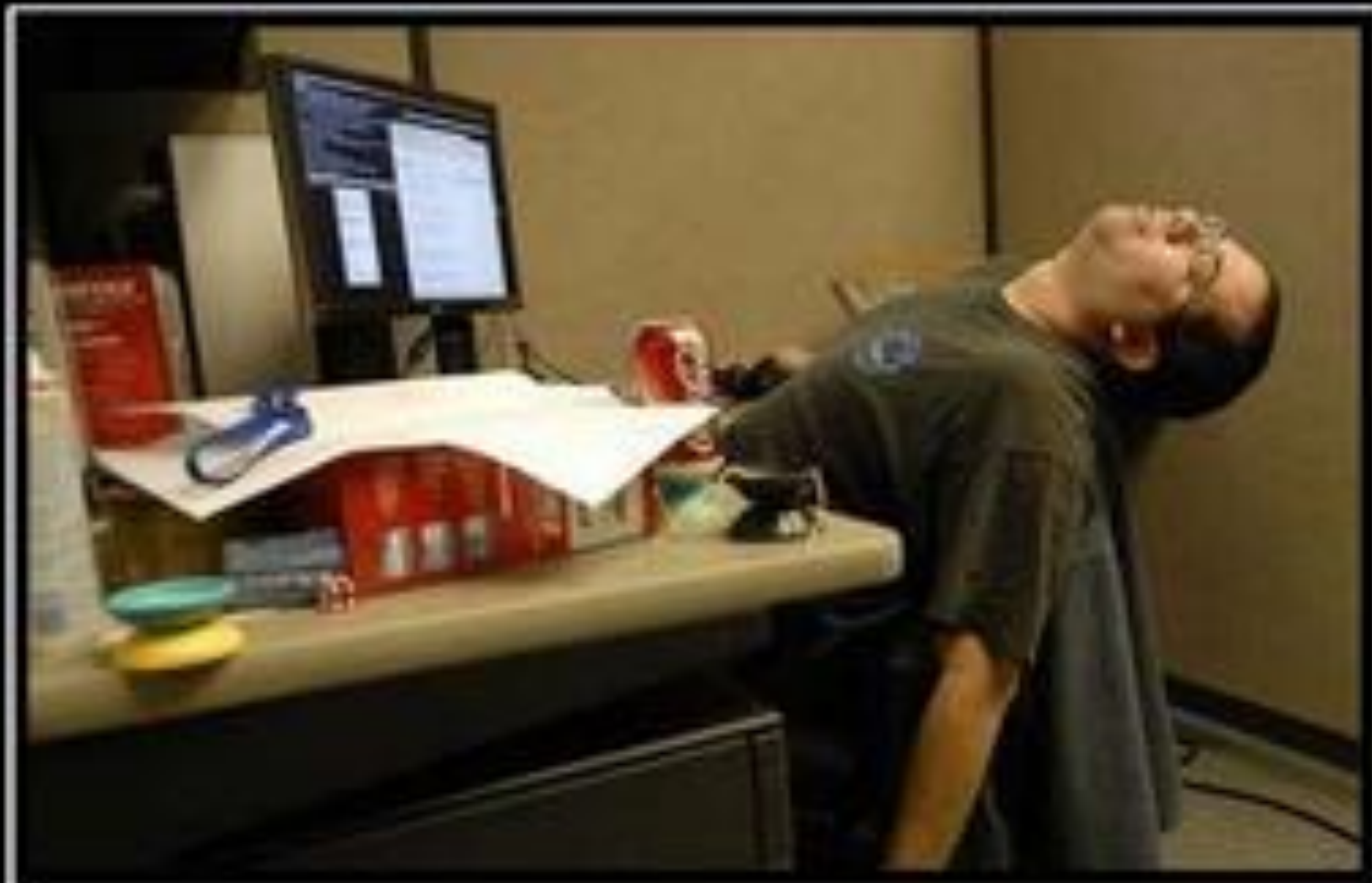
3. Рекуррентный (задано правило).

Пример: №1. *арифметическая прогрессия* $$a_{n+1} = a_n + d$$

№2. геометрическая прогрессия $$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

№3. Последовательность Фибоначчи: n-й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов

$$y_1 = 1;$$
$$y_2 = 1;$$
$$y_3 = 1 + 1 = 2;$$
$$y_4 = 1 + 2 = 3;$$
$$y_5 = 2 + 3 = 5;$$
$$y_6 = 3 + 5 = 8;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



УСТАЛОСТЬ

единственное объяснение нашему безделью

Свойства числовых последовательностей.

1°. Ограниченность сверху.

Последовательность (y_n) ограниченна сверху, если существует такое число M, что для любого $n \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство $y_n \le M$

(M – верхняя граница последовательности)

2°. Ограниченность снизу.

Последовательность (y_n) ограниченна снизу, если существует такое число m, что для любого $n \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство $y_n \ge m$

(m – нижняя граница последовательности)

Последовательность если ограниченна и сверху и снизу, то её называют

ограниченной последовательностью

М
О
Н
О
Т
О
Н
Н
Ы
Е

3°. Возрастание.

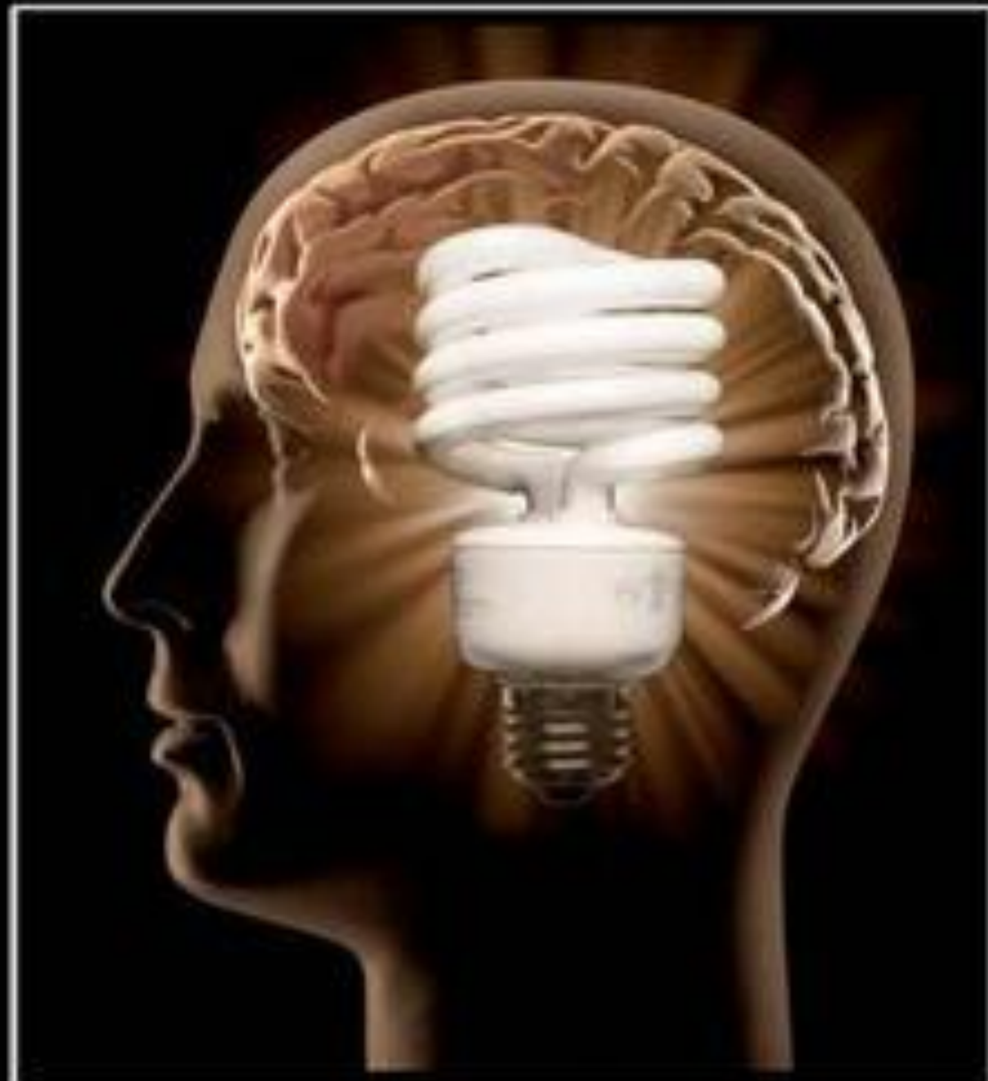
Последовательность (y_n) возрастающая, если каждый её член(кроме первого) больше предыдущего.

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n < \ldots$$

4°. Убывание.

Последовательность (y_n) убывающая, если каждый её член(кроме первого) меньше предыдущего.

$$y_1 > y_2 > \ldots > y_{n-1} > y_n > \ldots$$



Приобретай знания

которые помогут экономить твою энергию

Определение.

Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Обозначение:

$$y_n \to b \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0}\frac{1}{n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \lim_{n\to 0} q^n = \infty$$

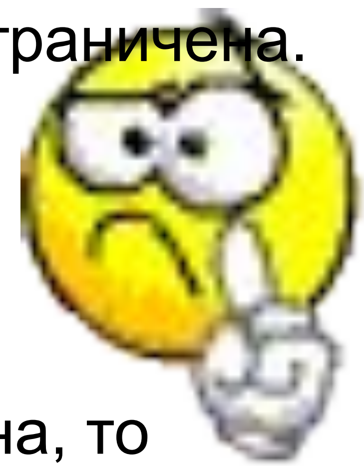
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|q| < 1 \qquad |q| > 1$$

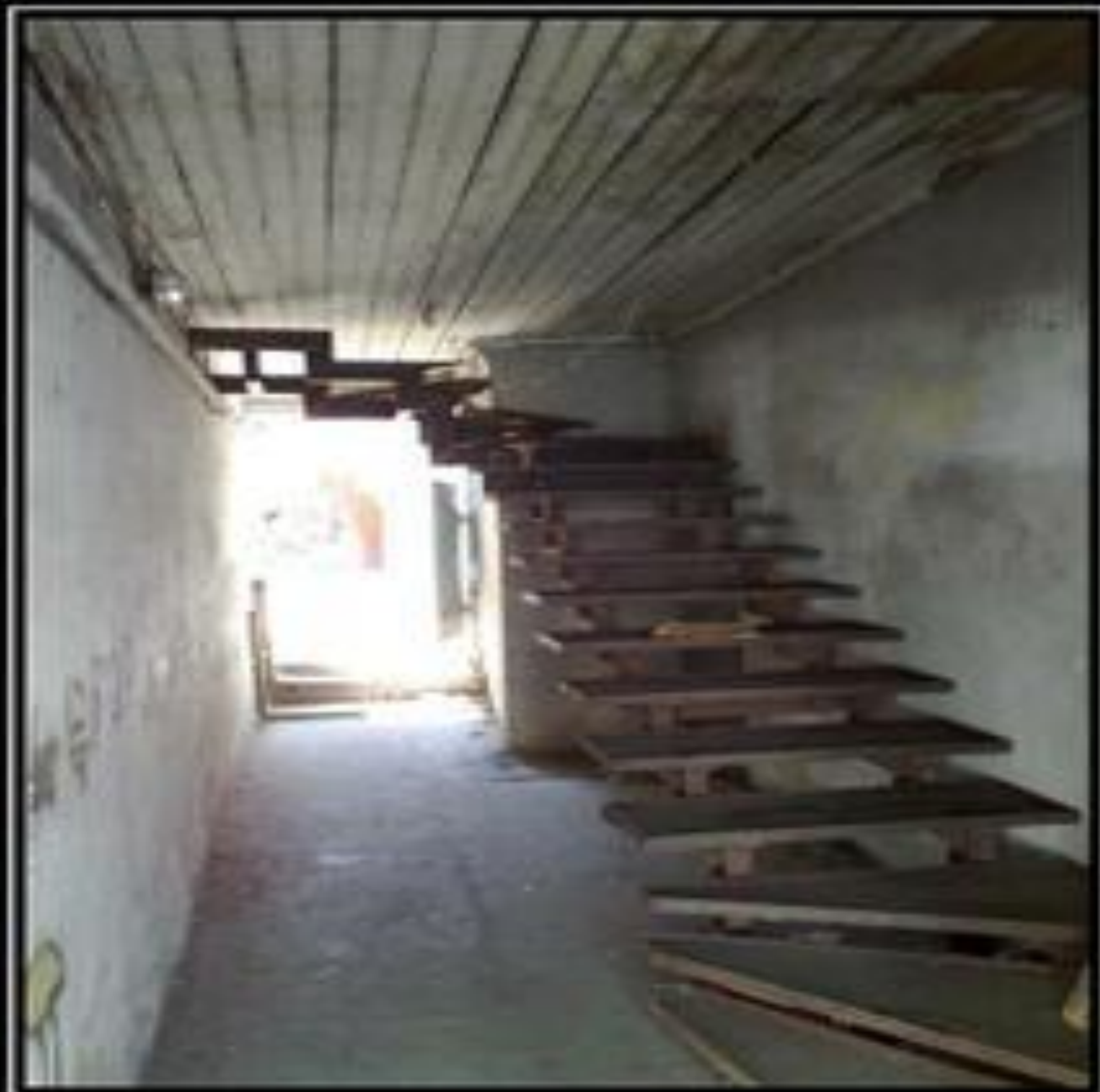
Свойства сходящихся последовательностей.

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.



3. (Теорема Вейерштрасса)
Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.



Всему есть предел!

Предел функции.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Предел функции в точке.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Приращение аргумента.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента.**

Обозначение: Δx (дельта х)

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Приращение функции.

Разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции.**

Обозначение: Δf или Δy

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0), \text{ где } x_1 = x_0 + \Delta x$$

Понятие непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие:

если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x
 и в некоторой её окрестности.
Предел отношения приращения функции
к приращению аргумента при
Δx стремящемся к нулю
называют **производной функции в точке х.**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Алгоритм нахождения производной для функции y = f(x).

1. Зафиксировать значение x, найти f(x).
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку x + Δx, найти f(x + Δx).
3. Найти приращение функции: Δy = f(x + Δx) – f(x).
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
6. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Пример нахождения производной функции $y = 2x + 3$.

1. Фиксируем $x=x_0$, имеем: $f(x_0) = 2x_0 + 3$.
2. В точке $x_0 + \Delta x$ имеем:

$$f(x_0+\Delta x) = 2(x_0+\Delta x) + 3.$$

3. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$$= 2(x_0 + \Delta x) + 3 - 2x_0 - 3 = 2(\Delta x).$$

4. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\Delta x)}{\Delta x} = 2$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

6. $f'(x) = (2x + 3)' = 2$