

Лекция 10. Основы теории  
автоматического управления.  
Передаточные функции и уравнения  
замкнутой системы

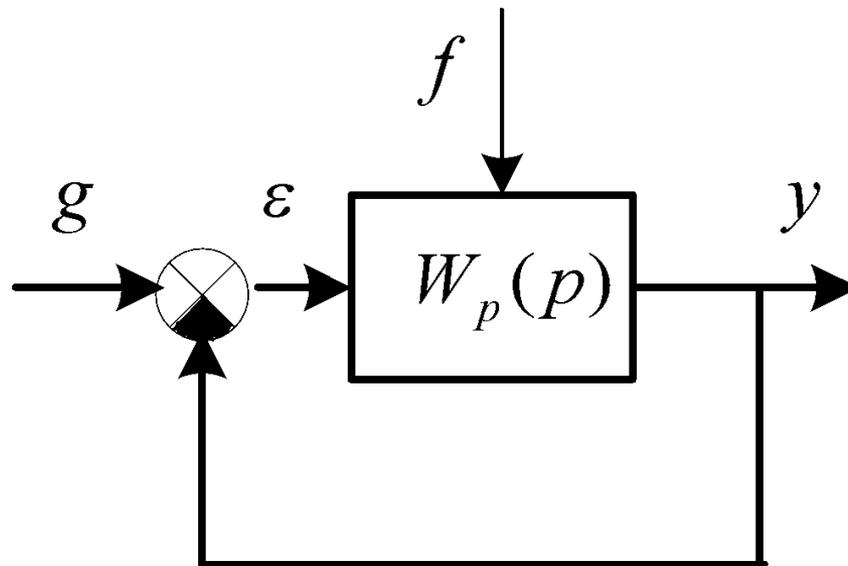
# Литература

---

# Введение

---

Рассмотрим обобщенную структурную схему замкнутой системы, представленную на рис



# Введение

---

$$W_p(p) = \frac{kB(p)}{A(p)}$$

- передаточная функция разомкнутой цепи, в общем случае сложная функция, полученная путем преобразования,

$k$  – коэффициент усиления разомкнутой части

$g(t)$  системы,

$f(t)$  – внешнее задающее воздействие,

– возмущающее внешнее воздействие, как

$\varepsilon(t)$  правило, не одно и

– сигнал ошибки.

# Введение

---

Отрицательная обратная связь между выходом и входом, называется *главной ООС*.

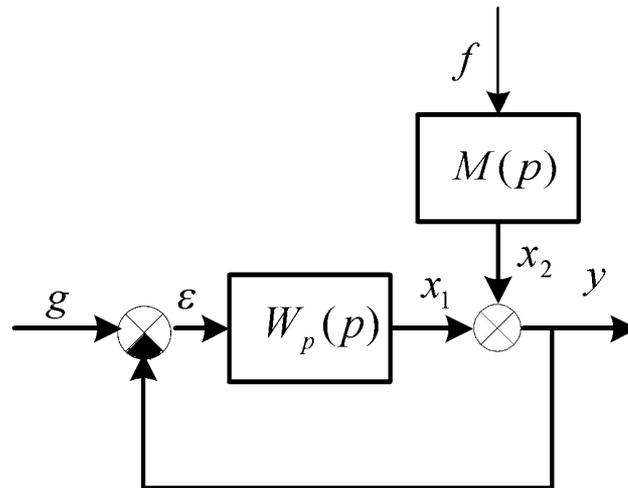
Передаточные функции замкнутой системы записывается *отдельно* для каждой комбинации входа и выхода, то есть *для каждой пары* .

# Введение

---

Возмущающее воздействие может быть приложено в любой точке схемы.

Если при помощи *правила 2* структурных преобразований перенести возмущающее воздействие к выходу системы, то структурная схема примет вид, показанный на рис



# Введение

---

На выходе имеем условно  $\mathbb{N} = x_1 + x_2$

хотя на самом деле  $\mathbb{N}(p)$

входит в общую схему как часть  $\mathbb{N}_p(p)$

# Введение

---

Основные соотношения, описывающие динамику системы, в изображениях по Лапласу будут иметь вид

$$\varepsilon(p) = g(p) - y(p)$$

$$y(p) = W_p(p)\varepsilon(p) + M(p)f(p)$$

# Введение

---

В расчетах автоматических систем применяют три основных вида передаточных функций замкнутой системы.

1. *Главная передаточная функция замкнутой системы*, которая определяется при условии

$$\Phi(p) = W_{\zeta}(p) = \frac{y(p)}{g(p)}$$

С учетом выражений имеем

$$y(p) = W_p(p)(g(p) - y(p))$$

# Введение

---

Откуда

$$\Phi(p) = \frac{W_{\delta}(p)}{1 + W_{\delta}(p)} = \frac{kB(p)}{A(p) + kB(p)}$$

# Введение

---

2. Передаточная функция замкнутой системы для ошибки по задающему воздействию  $f(t) = 0$

$$\Phi_{\varepsilon g}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{g(p)} = 1 - \Phi(p)$$

$$\Phi_{\varepsilon g}(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1 + W_{\delta}(p)} = 1 - \frac{kB(p)}{A(p) + kB(p)} = \frac{A(p)}{A(p) + kB(p)}$$

# Введение

---

3. Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $\phi(t)$  определяется при условии равенства нулю задающего воздействия  $g(t) = 0$

$$\Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)}$$

$$g(t) = 0$$

Из формул при выполнении условия  $g(t) = 0$  следует

$$y(p) = -W_p(p)y(p) + M(p)f(p),$$

$$y(p)[1 + W_p(p)] = M(p)f(p),$$

# Введение

---

Откуда

$$\Phi_f(p) = \frac{M(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{R(p)}{A(p) + kB(p)}$$

4. Передаточная функция для ошибки по возмущающему воздействию  $\Phi_{\varepsilon f}(p)$

будет той же, что и для регулируемой величины, но с обратным знаком  $\Phi_f(p)$

$$\Phi_{\varepsilon f}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{f(p)} = -\Phi_f(p)$$

# Введение

---

Важно отметить, что знаменатель всех видов передаточных функции замкнутой системы один и тот же.

Для замкнутой системы в целом, зная передаточные функции, можно перейти к дифференциальному уравнению, представленному в изображениях по Лапласу

$$y(p) = \Phi(p)g(p) + \Phi_f(p)f(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)}g(p) + \frac{M(p)}{1+W_p(p)}f(p),$$

$$y(p) = \frac{kB(p)}{A(p) + kB(p)}g(p) + \frac{R(p)}{A(p) + kB(p)}f(p).$$

# Введение

---

Следовательно, дифференциальное уравнение замкнутой системы имеет вид

$$[A(p) + kB(p)]y(p) = kB(p)g(p) + R(p)f(p)$$

Итак, зная передаточную функцию звеньев системы, можно исключительно алгебраическим путем определить общее дифференциальное уравнение всей замкнутой системы в целом при любой её сложности. Это является одним из основных преимуществ использования аппарата передаточных функций.

# Введение

---

*Характеристический полином* замкнутой системы имеет вид

$$D(p) = A(p) + kB(p) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения замкнутой системы, как и разомкнутой цепи, определяется степенью полинома  $A(p)$ , но коэффициенты существенно отличаются за счет прибавления многочлена  $kB(p)$ . Поэтому все динамические и частотные свойства замкнутой САУ будут отличаться от динамических и частотных свойств разомкнутой цепи, состоящей из тех же звеньев.

# Введение

---

В классической форме записи дифференциальное уравнение, описывающее динамику САУ, можно представить в виде

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m g^{(m)} + \dots + b_1 \dot{g} + b_0 g + \beta_r f^{(r)} + \dots + \beta_0 f(t)$$

На основе передаточной функции по ошибке от задающего воздействия и возмущающего воздействия можно выразить ошибку, вернее изображение ошибки, в виде

$$\varepsilon(p) = \Phi_{\varepsilon g}(p)g(p) - \Phi_{\varepsilon f}(p)f(p)$$

# Введение

---

Следовательно, дифференциальное уравнение для ошибки в изображениях по Лапласу имеет вид

$$[A(p) + kB(p)]\varepsilon(p) = A(p)g(p) - R(p)f(p)$$

Левая часть дифференциального уравнения, или характеристическое уравнение для ошибки САУ, точно такое же, что и для задающего воздействия. А вот правая часть меняется существенно перед задающим воздействием  $f(x)$ , хотя перед возмущающим воздействием изменился только знак.

# Введение

---

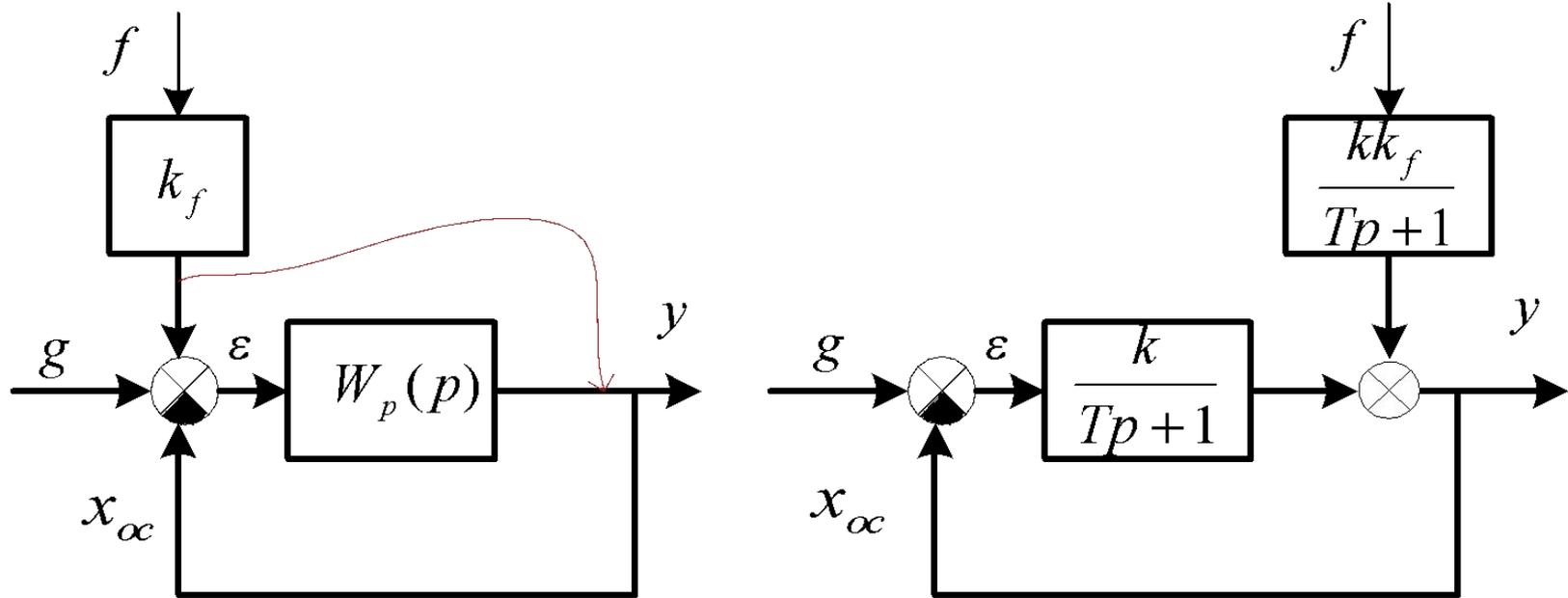
Физический смысл рассмотренной динамической модели таков: все изменения регулируемой величины под влиянием возмущающего воздействия сказываются целиком на ошибке системы.

## *Пример*

---

*Пример* вывода различных передаточных функций и дифференциальных уравнений для САУ первого порядка. На рис. приведены структурная схема САУ и преобразованная структурная схема САУ, в которой осуществлен перенос точки возмущающего воздействия с входа системы на ВЫХОД.

# Пример



## Пример

---

Главная передаточная функция САУ имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{W_{\delta}(p)}{1+W_{\delta}(p)} = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1+\frac{k}{Tp+1}} = \frac{k}{Tp+(1+k)}$$

Передаточная функция замкнутой системы для ошибки по задающему воздействию

$$\Phi_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1+W_{\delta}(p)} = \frac{1}{1+\frac{k}{Tp+1}} = \frac{Tp+1}{Tp+(1+k)}$$

## Пример

---

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $\phi(t)$  определяется при условии равенства нулю задающего воздействия  $g(t) = 0$  и равна

$$\Phi_f(p) = \frac{M(p)}{1+W_p(p)} = \frac{\frac{kk_f}{Tp+1}}{1+\frac{k}{Tp+1}} = \frac{kk_f}{Tp+(1+k)}$$

## Пример

---

Передаточная функция для ошибки по возмущающему воздействию  $\Phi_{\varepsilon_f}(p)$  будет той же, что передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $\Phi_f(p)$ , но с обратным знаком

$$\Phi_{\varepsilon_f}(p) = -\frac{kk_f}{Tp + (1 + k)}$$

## Пример

---

Дифференциальное уравнение замкнутой системы  
в изображениях по Лапласу в классическом виде

$$y(p) = \Phi(p)g(p) + \Phi_f(p)f(p) = \frac{k}{Tp + (1+k)}g(p) + \frac{kk_f}{Tp + (1+k)}f(p)$$

$$Tpy(p) + (1+k)y(p) = kg(p) + kk_f f(p)$$

$$Ty + (1+k)y(t) = kg(t) + kk_f f(t)$$

## Пример

---

Дифференциальное уравнение для ошибки в изображениях по Лапласу и классическом виде соответственно

$$\varepsilon(p) = \frac{Tp + 1}{Tp + (1 + k)} g(p) - \frac{kk_f}{Tp + (1 + k)} f(p)$$

$$Tp\varepsilon(p) + (1 + k)\varepsilon(p) = Tpg(p) + g(p) - kk_f f(p)$$

$$T\mathfrak{E}(t) + (1 + k)\varepsilon(t) = Tg(t) + g(t) - kk_f f(t)$$

Решив уравнения можно получить аналитическое выражение переходных функций выходного сигнала или сигнала ошибки.

## Пример

---

Используя формулу главной передаточной функцией  $\Phi(p)$  можно определить выражение для АФЧХ замкнутой системы посредством формальной замены оператора  $p$  в передаточной функции на  $j\omega$

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}$$

$$W_p(j\omega) = \frac{kB(j\omega)}{A(j\omega)}$$

представляет собой выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой цепи для данной системы.