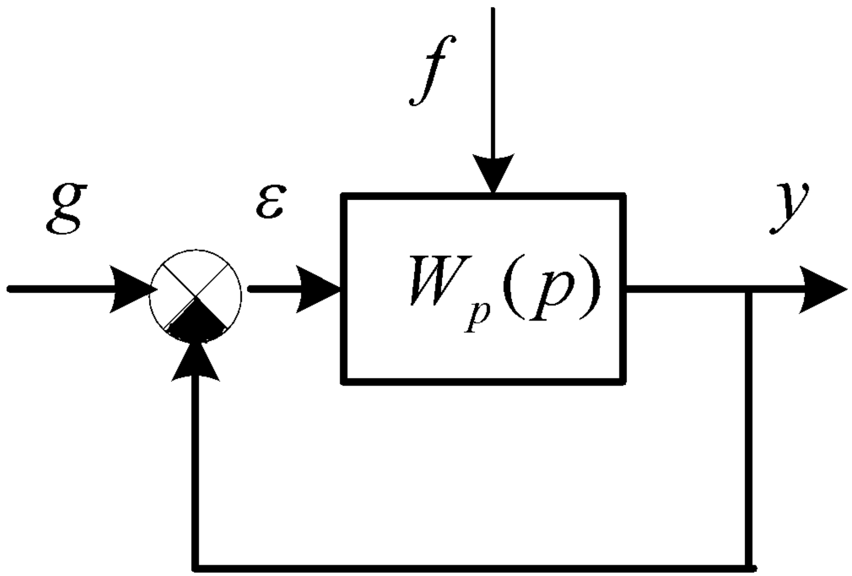
Лекция 10. Основы теории автоматического управления. Передаточные функции и уравнения замкнутой системы

Литература

Введение

Рассмотрим обобщенную структурную схему замкнутой системы, представленную на рис



Введение

$$W_p(p) = \frac{kB(p)}{A(p)}$$

- передаточная функция разомкнутой цепи, в общем случае сложная функция, полученная путем преобразования,

k – коэффициент усиления разомкнутой части системы,

$g(t)$ – внешнее задающее воздействие,

$f(t)$ – возмущающее внешнее воздействие, как правило, не одно и

$\varepsilon(t)$ – сигнал ошибки.

Введение

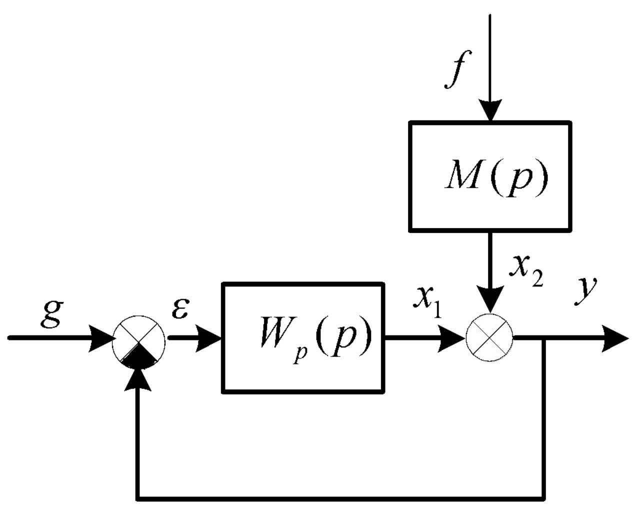
Отрицательная обратная связь между выходом и входом, называется *главной ООС*.

Передаточные функции замкнутой системы записывается *отдельно* для каждой комбинации входа и выхода, то есть *для каждой пары* .

Введение

Возмущающее воздействие может быть приложено в любой точке схемы.

Если при помощи *правила 2* структурных преобразований перенести возмущающее воздействие к выходу системы, то структурная схема примет вид, показанный на рис



Введение

На выходе имеем условно $y = x_1 + x_2$

хотя на самом деле $M(p)$

входит в общую схему как часть $W_p(p)$

Введение

Основные соотношения, описывающие динамику системы, в изображениях по Лапласу будут иметь вид

$$\varepsilon(p) = g(p) - y(p)$$

$$y(p) = W_p(p)\varepsilon(p) + M(p) f(p)$$

Введение

В расчетах автоматических систем применяют три основных вида передаточных функций замкнутой системы.

1. Главная передаточная функция замкнутой системы, которая определяется при условии $f(t)=0$

$$\Phi(p) = W_ç(p) = \frac{y(p)}{g(p)}$$

С учетом выражений имеем

$$y(p) = W_p(p)\big(g(p) - y(p)\big)$$

Введение

Откуда

$$\Phi(p) = \frac{W_{\partial}(p)}{1 + W_{\partial}(p)} = \frac{kB(p)}{A(p) + kB(p)}$$

Введение

2. Передаточная функция замкнутой системы для ошибки по задающему воздействию $f(t)=0$

$$\Phi_{\varepsilon g}(p)=\frac{\varepsilon(p)}{g(p)}=1-\Phi(p)$$

$$\Phi_{\varepsilon g}(p)=1-\Phi(p)=\frac{1}{1+W_{\partial}(p)}=1-\frac{kB(p)}{A(p)+kB(p)}=\frac{A(p)}{A(p)+kB(p)}$$

Введение

3. Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию $f(t)$ определяется при условии равенства нулю задающего воздействия $g(t)=0$

$$\Phi_f(p)=\frac{y(p)}{f(p)}$$

Из формул при выполнении условия $g(t)=0$, следует

$$y(p)=-W_p(p)y(p)+M(p)f(p),$$

$$y(p)\left[1+W_p(p)\right]=M(p)f(p),$$

Введение

Откуда

$$\Phi_f(p) = \frac{M(p)}{1+W_p(p)} = \frac{R(p)}{A(p)+kB(p)}$$

4. Передаточная функция для ошибки по возмущающему воздействию $\Phi_{\varepsilon f}(p)$

будет той же, что и для регулируемой величины , но с обратным знаком $\Phi_f(p)$

$$\Phi_{\varepsilon f}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{f(p)} = -\Phi_f(p)$$

Введение

Важно отметить, что знаменатель всех видов передаточных функции замкнутой системы один и тот же.

Для замкнутой системы в целом, зная передаточные функции, можно перейти к дифференциальному уравнению, представленному в изображениях по Лапласу

$$y(p) = \Phi(p)g(p) + \Phi_f(p)f(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)}g(p) + \frac{M(p)}{1+W_p(p)}f(p),$$

$$y(p) = \frac{kB(p)}{A(p)+kB(p)}g(p) + \frac{R(p)}{A(p)+kB(p)}f(p).$$

Введение

Следовательно, дифференциальное уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\left[A(p)+kB(p)\right]y(p)=kB(p)g(p)+R(p)f(p)$$

Итак, зная передаточную функцию звеньев системы, можно исключительно алгебраическим путем определить общее дифференциальное уравнение всей замкнутой системы в целом при любой её сложности. Это является одним из основных преимуществ использования аппарата передаточных функций.

Введение

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$D(p) = A(p) + kB(p) = 0$$

Прядок дифференциального уравнения замкнутой системы, как и разомкнутой цепи, определяется степенью полинома $A(p)$, но коэффициенты существенно отличаются за счет прибавления многочлена $kB(p)$. Поэтому все динамические и частотные свойства замкнутой САУ будут отличаться от динамических и частотных свойств разомкнутой цепи, состоящей из тех же звеньев.

Введение

В классической форме записи дифференциальное уравнение, описывающее динамику САУ, можно представить в виде

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m g^{(m)} + \dots + b_1 \dot{g} + b_0 g + \beta_r f^{(r)} + \dots + \beta_0 f(t)$$

На основе передаточной функции по ошибке от задающего воздействия и возмущающего воздействия можно выразить ошибку, вернее изображение ошибки, в виде

$$\varepsilon(p) = \Phi_{\varepsilon g}(p) g(p) - \Phi_{\varepsilon f}(p) f(p)$$

Введение

Следовательно, дифференциальное уравнение для ошибки в изображениях по Лапласу имеет вид

$$\left[A(p)+kB(p)\right]\varepsilon(p)=A(p)g(p)-R(p)f(p)$$

Левая часть дифференциального уравнения, или характеристическое уравнение для ошибки САУ, точно такое же, что и для задающего воздействия. А вот правая часть меняется существенно перед задающим воздействием $g(t)$, хотя перед возмущающим воздействием $f(t)$ изменился только знак.

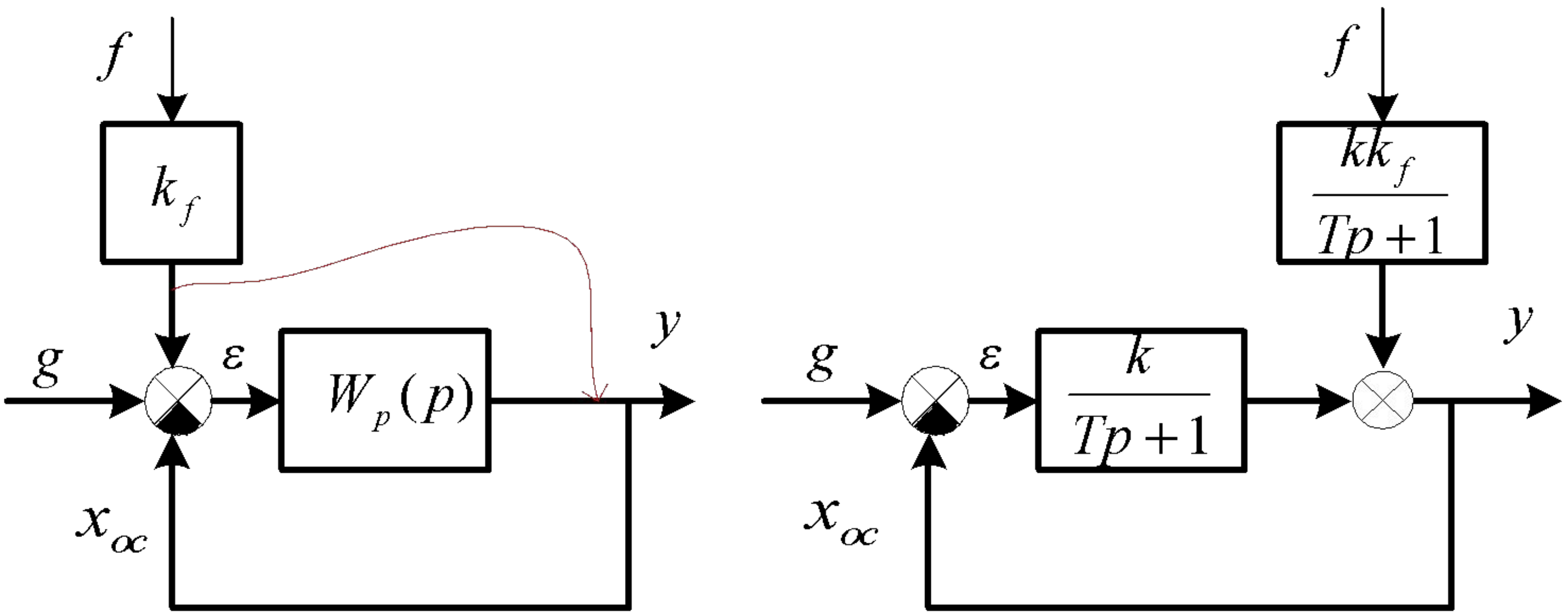
Введение

Физический смысл рассмотренной динамической модели таков: все изменения регулируемой величины под влиянием возмущающего воздействия сказываются целиком на ошибке системы.

Пример

Пример вывода различных передаточных функций и дифференциальных уравнений для САУ первого порядка. На рис. приведены структурная схема САУ и преобразованная структурная схема САУ, в которой осуществлен перенос точки возмущающего воздействия с входа системы на выход.

Пример



f
k_f
g
ε
$W_p(p)$
y
x_{oc}
f
$\frac{kk_f}{Tp+1}$
g
ε
$\frac{k}{Tp+1}$
y
x_{oc}

Пример

Главная передаточная функция САУ имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{W_{\partial}(p)}{1 + W_{\partial}(p)} = \frac{\dfrac{k}{Tp+1}}{1 + \dfrac{k}{Tp+1}} = \frac{k}{Tp + (1+k)}$$

Передаточная функция замкнутой системы для ошибки по задающему воздействию

$$\Phi_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_{\partial}(p)} = \frac{1}{1 + \dfrac{k}{Tp+1}} = \frac{Tp+1}{Tp + (1+k)}$$

Пример

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию $f(t)$ определяется при условии равенства нулю задающего воздействия $g(t) = 0$ и равна

$$\Phi_f(p) = \frac{M(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{\dfrac{kk_f}{Tp+1}}{1 + \dfrac{k}{Tp+1}} = \frac{kk_f}{Tp + (1+k)}$$

Пример

Передаточная функция для ошибки по возмущающему воздействию $\Phi_{\varepsilon f}(p)$ будет той же, что передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию $\Phi_f(p)$, но с обратным знаком

$$\Phi_{\varepsilon f}(p) = -\frac{kk_f}{Tp + (1 + k)}$$

Пример

Дифференциальное уравнение замкнутой системы в изображениях по Лапласу в классическом виде

$$y(p) = \Phi(p)g(p) + \Phi_f(p)f(p) = \frac{k}{Tp + (1+k)}g(p) + \frac{kk_f}{Tp + (1+k)}f(p)$$

$$Tpy(p) + (1+k)y(p) = kg(p) + kk_f f(p)$$

$$T\dot{y} + (1+k)y(t) = kg(t) + kk_f f(t)$$

Пример

Дифференциальное уравнение для ошибки в изображениях по Лапласу и классическом виде соответственно

$$\varepsilon(p) = \frac{Tp+1}{Tp+(1+k)} g(p) - \frac{kk_f}{Tp+(1+k)} f(p)$$

$$Tp\varepsilon(p) + (1+k)\varepsilon(p) = Tpg(p) + g(p) - kk_f f(p)$$

$$T\dot{\varepsilon}(t) + (1+k)\varepsilon(t) = T\dot{g}(t) + g(t) - kk_f f(t)$$

Решив уравнения можно получить аналитическое выражение переходных функций выходного сигнала или сигнала ошибки.

Пример

Используя формулу главной передаточной $\Phi(p)$ функцией можно определить выражение для АФЧХ замкнутой системы посредством формальной замены оператора $j\omega$ в передаточной функции на

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}$$

$$W_p(j\omega) = \frac{kB(j\omega)}{A(j\omega)}$$

представляет собой выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой цепи для данной системы.