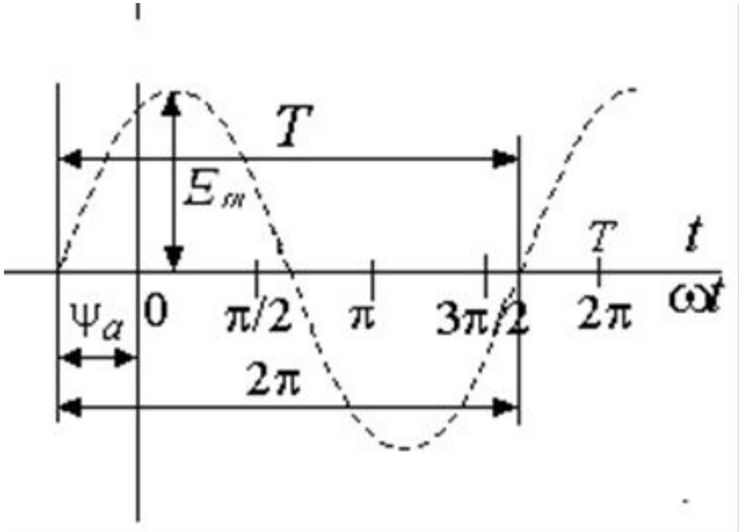
Электротехника и электроника для заочников
Лекция 2
Цепи синусоидального напряжения

Мириленко Андрей Петрович, к.т.н.
кафедра Электротехники

Основные понятия

Цепи синусоидального напряжения – электрические величины изменяются по синусоидальному закону.
В частности ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e)$$



e – мгновенное значения
E_m — амплитудные значения
$(\omega t + \Psi_e)$ — фаза
Ψ_e — начальная фаза

$\omega = 2\pi f$ - угловая частота [рад/сек]
f — частота [1/сек = Гц]

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Основные понятия

Скачать
http://mirylenka.com/zmpt.zip

ЭиЭ_Бланки_Лабораторные работы 2 Резонанс.doc	274 432
ЭиЭ_Бланки_Лабораторные работы 7_краткая.doc	353 792
ЭЭ_Д_Лекция 10 . Асинхронные машины. Применение...	2 508 643
ЭЭ_Лекция 1 Основные понятия.pptx	578 020
ЭЭ_Лекция 2 Цепи Синусоидального напряжения.pptx	793 440
ЭЭ_Лекция 3 Трехфазные цепи.pptx	572 868

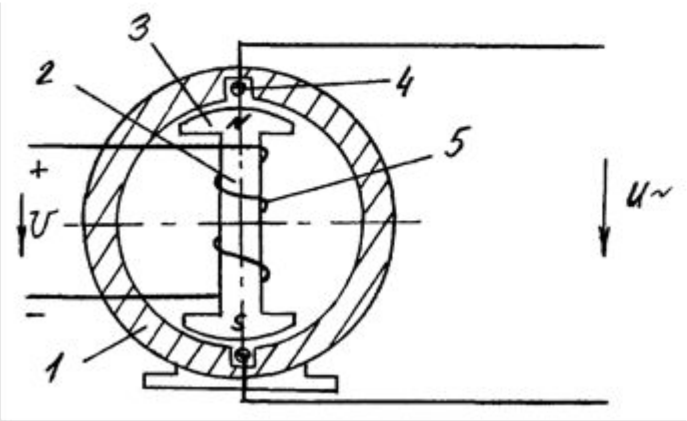
Почему применяют синусоидальный ток

В практике применяются частоты переменного тока от долей герца до миллиардов герц.
В электроэнергетике стран Европы и СНГ стандартная частота 50 Гц, а в США — 60 Гц.
Почему 50 Гц? - компромисс
Если частота ниже 50 Гц – заметно мигание ламп и возрастают размеры оборудования. Если частоту увеличивать, то растут потери на вихревые токи, снижается КПД, увеличиваются механические нагрузки на валах.

Почему переменный?
- удобство производства
- удобство трансформации т.е. повышения или понижения напряжения
- снижение потерь на линиях передач.

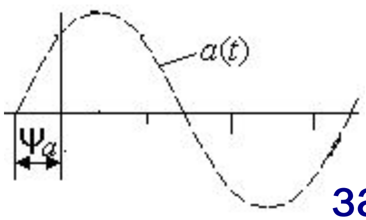
Почему применяют синусоидальный ток

Почему синусоидальный
Форма кривой периодически изменяющегося переменного тока может быть любой (синусоидальной, пилообразной, прямоугольной и т.д.). Но в практике энергетики применяется синусоидальный ток.
- производство электроэнергии естественным образом даёт синусоидальный ток
- оптимальные условия работы электрических установок.



Действующие значения синусоидального тока

Действующее значение численно равное величине постоянного тока, который протекая по некоторому резистору за то же время выделит такое же количество теплоты.



$$E_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_m \sin(\omega t)dt = \frac{E_m}{\omega t}\cos(\omega t)\Big|_0^T = 0$$

за полпериода $$E_{cp} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_m \sin(\omega t)dt = \frac{E_m}{\omega t}\cos(\omega t)\Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}E_m$$

Постоянный ток

Переменный ток

$$Q = \int_0^T i^2 \mathrm{R} dt = \int_0^T I_m^2\, R\sin^2(\omega t)dt$$

$$Q = \int_0^T I_m^2 \frac{1-\cos(2wt)}{2}dt = \frac{I_m^2}{2}\left[\int_0^T Rdt + \int_0^T R\cos(2\omega t)dt\right]$$

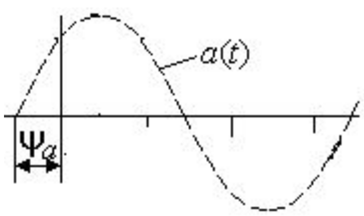
$$Q = I^2 RT$$

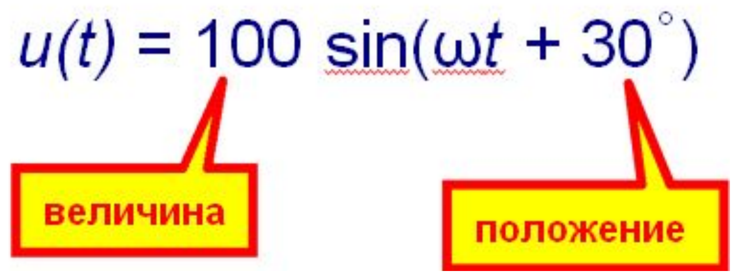
$$Q = \frac{I_m^2 RT}{2} + 0 \quad \Rightarrow \quad I^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

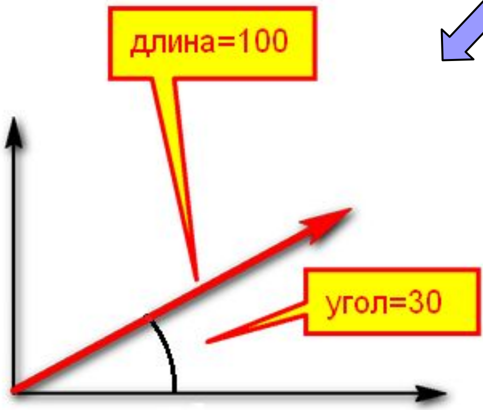
$$I_{действ} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Синусоидальные функции как комплексные числа

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



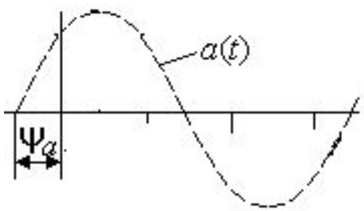




Зачем ?

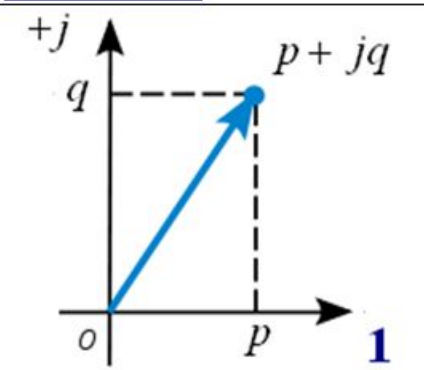
1. Чтобы действия над векторами заменить алгебраическими действиями над комплексными числами.
2. Чтобы все законы сохранили свой вид, только вместо простых чисел мы будем подставлять комплексные

Синусоидальные функции как комплексные числа

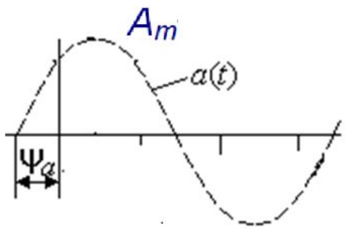


$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

Формы представления

Алгебраическая	Показательная	Тригонометрическая	Векторная
$\dot{A}_m = p + jq$	$\dot{A}_m = A_m e^{j\Psi_a}$	$\dot{A}_m = A_m(\cos\Psi_a + j\sin\Psi_a)$	

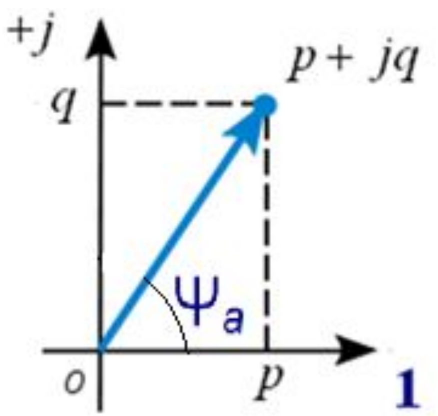
Связь между формами комплексных чисел



$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

$$p = A_m * \cos(\Psi_a)$$
$$q = A_m * \sin(\Psi_a)$$

Векторная



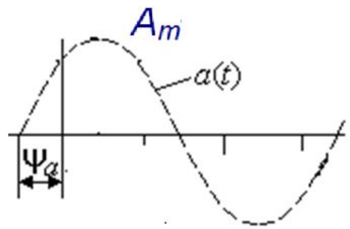
Алгебраическая

$$A_m = p + jq$$

Показательная

$$A_m = A_m e^{j\Psi_a}$$

Пример преобразования комплексных чисел



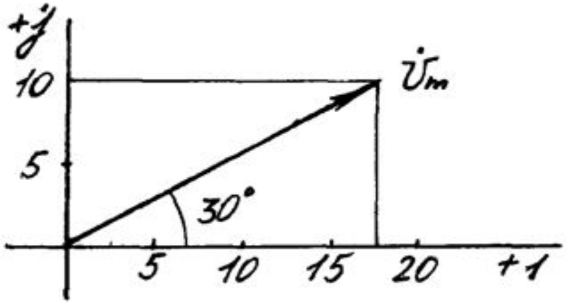
Пусть дана функция напряжение $u(t) = 20\sin(50t + 30)$

Показательная форма $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = 20e^{j30°}$

Тригонометрическая форма $\dot{U}_m = U_m(\cos\psi + j\sin\psi) = 20(\cos 30° + j\sin 30°)$

Алгебраическая форма $\dot{U}_m = U_m(\cos\psi + j\sin\psi) = 20\times\frac{\sqrt{3}}{2} + J20\times\frac{1}{2} = 17{,}3 + j10$

Векторная



Построить вектор можно либо по модулю и фазе [модуль 20 и фаза 30º] либо по координатам (17,3;10).

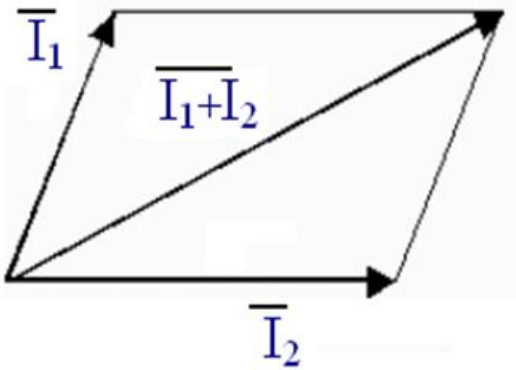
Действия над комплексными числами

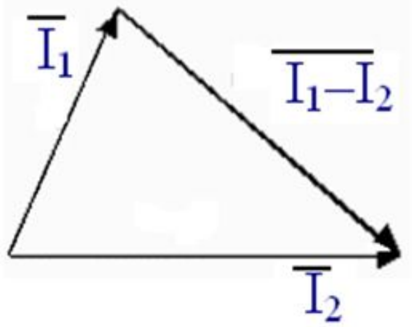
Алгебраическая форма

Сложение	$(a+bj)+(c+dj)=(a+c)+(b+d)j$
Вычитание	$(a+bj)-(c+dj)=(a-c)+(b-d)j$
Умножение	$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$
Деление (домножить на сопряженное)	$\frac{(a+bj)}{(c+dj)}=\frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}=\frac{(ac-bd(\sqrt{-1})^2+bcj-adj)}{(c^2+d^2+cdj-cdj)}=\frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}+\frac{(bc-ad)j}{(c^2+d^2)}$

Действия над комплексными числами

Векторная форма





Скалярное произведение

Скалярное произведение – скалярная величина, равная произведению модулей векторов и косинуса угла между ними.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

В координатной форме скалярное произведение

$$(a + bj) * (c + dj) = ac + bd$$

Скалярное произведение можно применять например при вычислении мощности

Поворот вектора

Умножение вектора на j вызывает его поворот на 90° а на $-j$ даёт поворот на минус 90°

Действия над комплексными числами. Пример

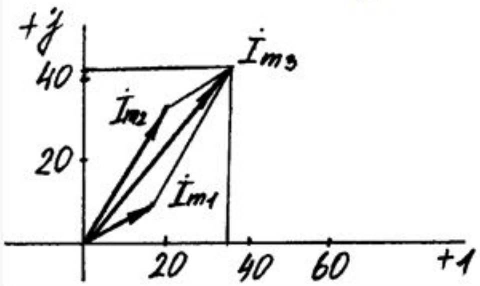
Дано:

ток i1 = 20sin(ωt + 30°), ток i2 = 40sin(ωt + 60°)

Определить ток i3 = i1 + i2,

Вариант 1 В векторной форме

Проведем сложение с помощью векторов на комплексной плоскости Для этого выбираем масштаб тока и откладываем векторы в масштабе на комплексной плоскости.



Вариант 2 В алгебраической форме

Для аналитического сложения запишем комплексные амплитуды токов:

$$\dot{I}_{m1} = 20e^{j30^\circ} = 20\cos 30^\circ + j20\sin 30^\circ = 17{,}3 + j10 \quad A$$

$$\dot{I}_{m2} = 40e^{j60^\circ} = 40\cos 60^\circ + j40\sin 60^\circ = 20 + j34{,}6 \quad A$$

Значит, $\dot{I}_{m3} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = 17{,}3 + j10 + 20 + j34{,}6 = 37{,}3 + j44{,}6 \quad A$

Чтобы записать мгновенное значение тока i_3, определим:

амплитуду $I_{m3} = \sqrt{37{,}3^2 + 44{,}6^2} = 58 \quad A$

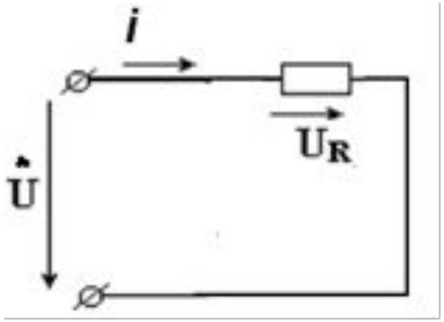
и начальную фазу: $\psi_3 = \mathrm{arctg}\dfrac{44{,}6}{37{,}3} = 50^\circ$.

Тогда i3 = 58sin(ωt + 50°).

Принятые обозначения величин

Обозначения	Название
i, u, e $\quad e \equiv e(t)$	мгновенные значения (соответственно, тока, напряжения, ЭДС)
I_m, U_m, E_m	амплитудные значения
I, U, E	действующие значения
$\dot{I}_m$, $\dot{U}_m$, $\dot{E}_m$	комплексные амплитуды
$\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{E}$	комплексные действующие значения

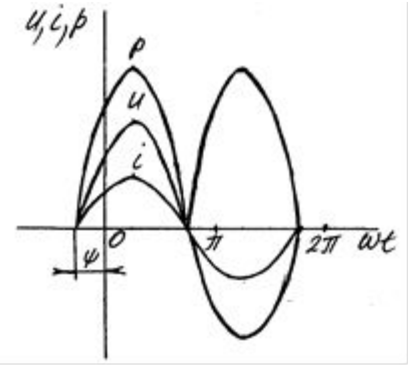
Синусоидальный ток в резисторе



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

В каждый момент времени по закону Ома $i = \dfrac{u}{R}$

$$i = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \Psi_u) \qquad i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$$



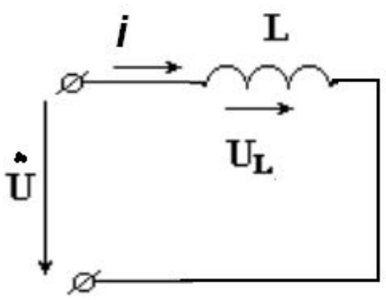
Выводы:

1. Функция тока тоже синусоидальная
2. Амплитудные значения связаны законом Ома следовательно действующие значения тоже связаны законом Ома
3. Начальная фаза тока равна начальной фазе напряжения

Закон Ома верен для всех величин мгновенных, действующих, комплексных

$$u = iR \qquad U_m = I_m R \qquad \dot{U}_m = \dot{I}_m R \qquad \dot{U} = \dot{I}R$$

Синусоидальный ток в индуктивном сопротивлении

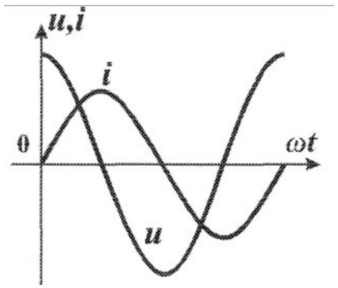


!!! Закона Ома для мгновенных величин тут нет

При протекании переменного тока через индуктивность возбуждается ЭДС самоиндукции уравновешивающее соответствующее напряжение.

$$e_L = -u_L \qquad e_L = -L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \qquad u_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \Psi_i) = L\omega I_m \sin(\omega t + \Psi_i - 90°)$$



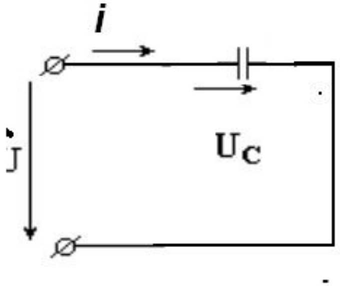
Выводы:

1. Функция тока тоже синусоидальная
2. Начальная фаза напряжения опережает ток на 90º.
3. Сопротивление индуктивности $X_L = \omega L$

Закон Ома для индуктивности

$$I_m = \frac{U_{mL}}{X_L} \qquad I = \frac{U_L}{X_L} \qquad \dot{U} = \dot{I} * j\,X_L$$

Синусоидальный ток в конденсаторе



!!! Закона Ома мгновенных величин тут нет

В емкости есть напряжение между обкладками, которое и уравновешивает соответствующее входное напряжение

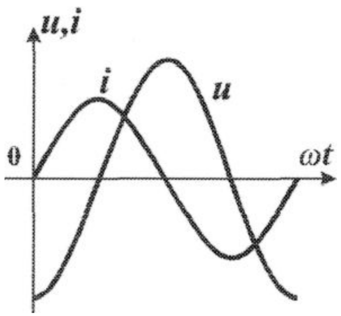
$$Q = UC$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d(U_m \sin(\omega t + \Psi_{UC}))}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \Psi_{UC})$$

$$i = \omega C U_m \sin(\omega t + \Psi_{UC} + 90°)$$

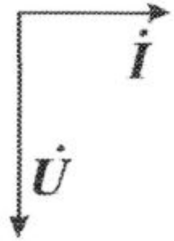
Выводы:

1. Функция тока тоже синусоидальная
2. Начальная фаза напряжения отстает от тока 90º.
3. Сопротивление конденсатора $X_C = \frac{1}{\omega C}$

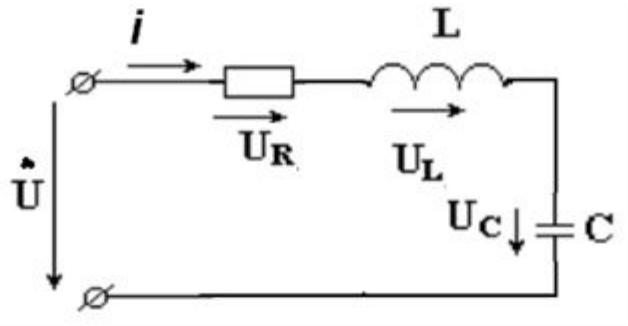


Закон Ома для конденсатора

$$I_m = \frac{U_{mC}}{X_C} \qquad I = \frac{U_C}{X_C} \qquad \dot{U} = I*(-j)X_C$$



Цепь с последовательным соединением R L C элементов



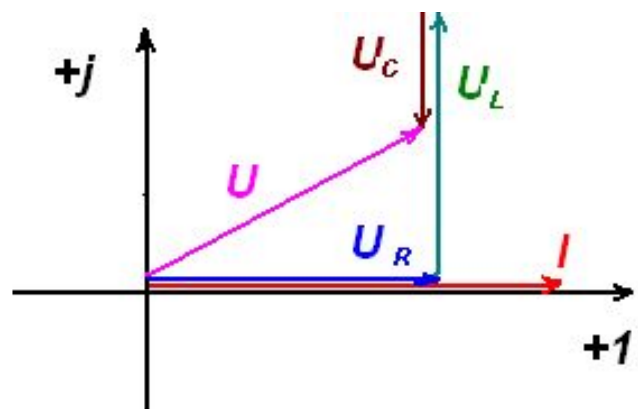
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = IR + j\omega LI - j\frac{1}{\omega C}I$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)}$$

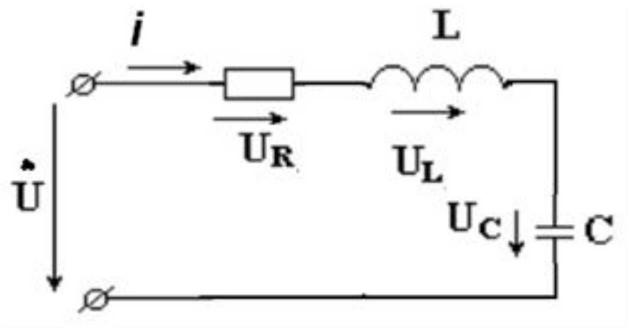
Закон Ома в комплексной форме

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$$



Цепь с последовательным соединением R L C элементов. Пример расчета



U=100В
R=8 Ом
L= 31,8 мГн
C= 796 мкФ

$$X_L = \omega L = 314 \times 31.8 \times 10^{-4} = 10\,Ом \qquad X_C = \frac{1}{\omega \times C} = \frac{1}{314 \times 796 \times 10^{-6}} = 4\,Ом$$

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 8 + j(10-4) = 8 + j6$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{8+j6} = \frac{100(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)} = \frac{800 - j600}{64+36} = 8 - j6\,A$$

$$I = \left|\dot{I}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,A$$

Закон Ома в комплексной форме

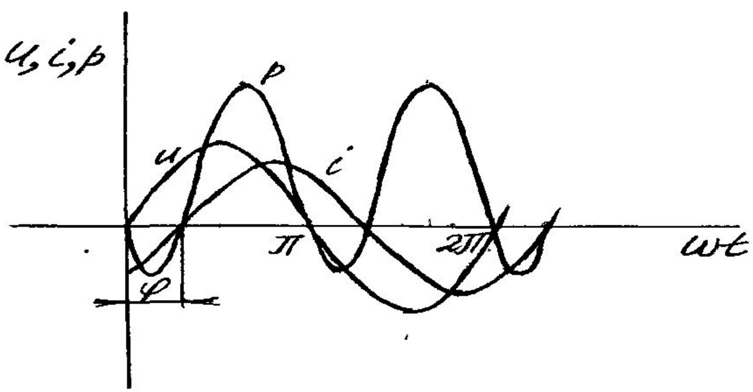
Мощность синусоидального тока

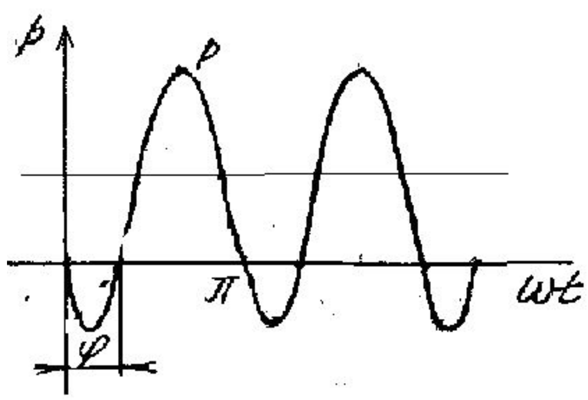
$$u = U_m \sin \omega t \qquad i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Мгновенная мощность $p = ui$

$$p = ui = U_m \sin \omega t \times I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right]$$

$$p = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi).$$





Мощность синусоидального тока 2

- Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и гармоническую составляющую частота которой в 2 раза больше частоты напряжения и тока.
- Два процесса – необратимое преобразование энергии и накопление/возврат источнику.
- Когда мгновенная мощность положительная, энергия поступает в цепь, и когда отрицательная, энергия отдается источнику.
- Такой возврат энергии источнику питания возможен, так как энергия периодически запасается в индуктивности и в емкости, входящих в состав двухполюсника.

Средняя мощность

$$P_{cp}T = U\int_0^T ui\,dt = UI\cos\varphi$$

Интенсивность обмена энергией называют реактивной мощностью.

$$Q = UI\sin\varphi$$

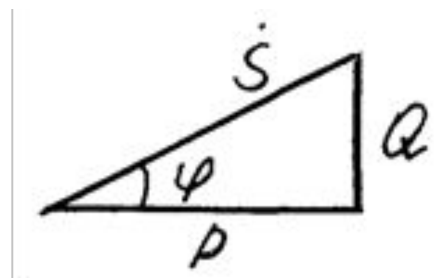
[ВАР] Вольт Ампер реактивные

Полная мощность - физического смысла не имеет [ВА]

$$S = UI$$

$$\frac{P}{S} = \cos\varphi$$

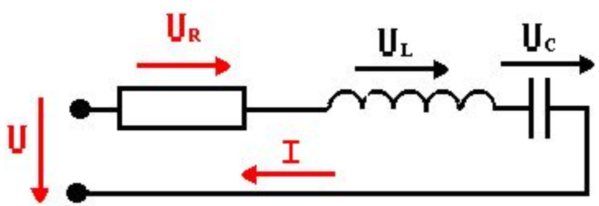
— коэффициент мощности



Резонанс

Резонанс в электрических цепях это такой режим работы, когда при наличии ёмкости и индуктивности входное сопротивление или входная проводимость являются чисто активными. Это приводит к резкому возрастанию электрических величин.

Резонанс напряжений

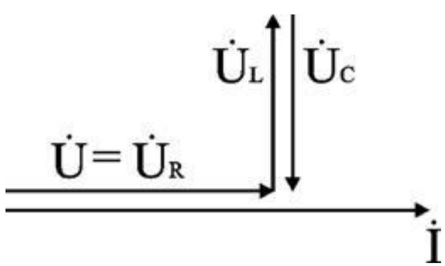


$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Условие резонанса $\underline{Z} = R \qquad X = j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- резонансная частота, частота собственных колебаний



$$I_{рез} = \frac{U}{R}$$

$$U_L = I\omega_0 L = I\frac{1}{\sqrt{LC}}L = I\sqrt{\frac{L}{C}}$$

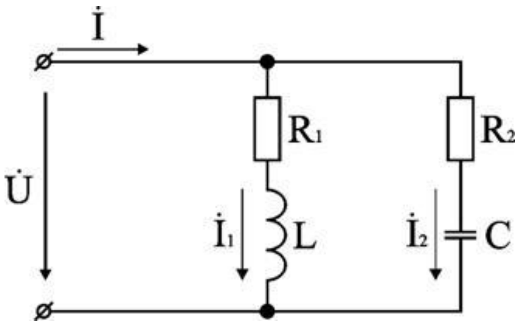
Напряжение может возрасти во много раз

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

волновое сопротивление

Резонанс токов

Резонанс в электрических цепях это такой режим работы, когда при наличии ёмкости и индуктивности входное сопротивление или входная проводимость являются чисто активными. Это приводит к резкому возрастанию электрических величин.



Условие резонанса $$b_C = b$$

$$b_L = \frac{\omega L}{R^2{}_1 + (\omega L)^2} \qquad b_C = \frac{1/\omega C}{R^2{}_1 + (1/\omega C)^2}$$

При выполнении условий резонанса реактивные составляющие токов равны, противоположны по фазе и компенсируют друг-друга.
При этом ток на входе имеет только активную составляющую и уменьшается !!!

$$\frac{\omega L}{R^2{}_1 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R^2{}_1 + (1/\omega C)^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$$

При резонансе токов нет опасных факторов, разве что возрастание токов в ветвях. Но на входе ток уменьшается.