Лекция 4

Тема: *"Первообразная и неопределенный интеграл"*

Первообразная функции.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;b)$, называется ***первообразной функции*** $f(x)$, если всюду на этом интервале выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Отыскание по данной функции ее первообразной составляет **основную задачу интегрального исчисления**.

Теорема. Любая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную.

Теорема. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет первообразную $F(x)$, то на этом отрезке она имеет бесконечное множество первообразных и любая первообразная имеет вид:

$$F(x) + C,$$

где C - произвольная константа.

Неопределенный интеграл.

Определение. ***Неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак неопределенного интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Из этого определения и вышеприведенной теоремы, вытекает формула:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Действие отыскания неопределенного интеграла называется ***интегрированием***.

Замечание. Из факта существования первообразной не следует, что у элементарной функции $f(x)$ первообразная $F(x)$ также является элементарной функцией.

Например, интегралы: $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (интегральный синус), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (интегральный косинус) и $\int e^{-x^2} dx$ (интеграл вероятностей) не выражаются в элементарных функциях.

Интегралы такого типа называются «не берущимися», а соответствующие первообразные находятся приближенно с помощью различных приемов.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx\ .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\ .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

Замечание. Формула $\int dF(x) = F(x) + C$ остается справедливой, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1.	$\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C, \ (p \neq -1)$		$\int dx = x + C \quad (p = 0)$
2.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$		
3.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	**5.**	$\int \mathrm{tg}x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
4.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	**6.**	$\int \mathrm{ctg}x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
7.	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$		
8.	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$		
9.	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$		$\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$
10.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$		$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
11.	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$		$\int e^x dx = e^x + C$
12.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$		
13.	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x - a}{x + a}\right\rvert + C$		$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a + x}{a - x}\right\rvert + C$

Замечание. Все приведенные в этой таблице формулы сохраняют вид, если в обе части формул вместо x подставить любую дифференцируемую функцию x.

Рассмотрим основные приемы интегрирования.

Подведение функции под знак дифференциала.

Это самый универсальный прием практического интегрирования.
Он состоит в преобразовании подынтегрального выражения к виду дифференциала от некоторой функции. При этом под знак дифференциала становится первообразная самой функции.

Например, учитывая что $dy = y'dx$, имеем:

$$\cos x\,dx = d(\sin x),\quad \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = d(e^x - tgx),\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x,\quad \frac{dx}{x} = d\ln x.$$

Тогда $\int \cos x\,dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d(\arcsin x) = \arcsin x + C$ и

$$\int \frac{dx}{x} = \int d(\ln x) = \ln x + C$$

А так же, например, так как $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, то в силу замечания получаем:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

$$\int (e^x - tgx)\left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int (e^x - tgx)\, d(e^x - tgx) = \frac{(e^x - tgx)^2}{2} + C,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin x\, d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C,$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Интегрирование методом замены переменной.

Имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)dt\ ,$$

в справедливости которой можно убедиться, найдя дифференциалы от обеих ее частей.

Замечание. Для запоминания этой формулы заметим, что правая ее часть получается, если в интеграле $\int f(x)dx$ заменить x на $\varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$.

Пример. Найти интеграл $\int \cos kx\, dx$.

Решение: Обозначим $kx = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{k}$, тогда $\int \cos kx\, dx = \dfrac{1}{k}\int \cos t\, dt = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 9x^2\sqrt[3]{x^3+10}\,dx$.

Решение: $$\int 9x^2\sqrt[3]{x^3+10}\,dx=\begin{vmatrix} x^3+10=t \\ 3x^2dx=dt \end{vmatrix}=3\int t^{\frac{1}{3}}dt=$$

$$=3\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{9}{4}t\sqrt[3]{t}+C=\frac{9}{4}(x^3+10)\sqrt[3]{x^3+10}+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$.

Решение: Применим подстановку

$$t=x+\sqrt{x^2\pm a^2}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{dt}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{dt}{t}.$$

Тогда $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

Интегрирование методом разложения.

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму нескольких функций и применении свойств 1 и 2 неопределенного интеграла.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx$.

Решение: $$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx = \int \left(x^2 - 10 + \frac{5}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx - 10 \int dx + 5 \int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 10x - C_2 - \frac{5}{x} + C_3 = \frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Решение: Можно показать, что $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$.

Поэтому:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Интегралы, в которых подынтегральная функция есть произведение синусов и косинусов разных аргументов также могут быть разложены на слагаемые с помощью тригонометрических формул:

$$\sin nx\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$
$$\sin nx\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$
$$\cos nx\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x).$$

Пример. Найти интеграл $\int\sin 2x\cos x\,dx$.

Решение: $\int\sin 2x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$.

Интегрирование по частям.

Так как $d(uv)=udv+vdu$, то проинтегрировав обе части этого равенства, получим:

$$\int udv=uv-\int vdu\,.$$

Эта формула называется ***формулой интегрирования по частям***.

Рассмотрим важнейшие случаи применения этой формулы.

1) Подынтегральная функция есть произведение многочлена $P_n(x)$ степени n на показательную или тригонометрическую функции:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx \quad \text{или} \quad \int P_n(x)\sin\alpha x\,dx \quad \text{или} \quad \int P_n(x)\cos\alpha x\,dx\,.$$

В этих случаях в качестве u выбирается многочлен $P_n(x)$:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx \Rightarrow u = P_n(x),\ du = P_n'(x)dx,\ dv = e^{\alpha x}dx = d\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right),\ v = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha},$$

$$\int P_n(x)\sin\alpha x dx \Rightarrow u = P_n(x),\ du = P_n'(x)dx,\ dv = \sin\alpha x dx = d\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right),\ v = -\frac{\cos\alpha x}{\alpha},$$

$$\int P_n(x)\cos\alpha x dx \Rightarrow u = P_n(x),\ du = P_n'(x)dx,\ dv = \cos\alpha x dx = d\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right),\ v = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}.$$

2) Подынтегральная функция есть произведение многочлена $P_n(x)$ степени n на логарифмическую или обратную тригонометрическую функции:

$$\int P_n(x)\ln x\, dx \quad \text{или} \quad \int P_n(x)\arcsin\alpha x\, dx \quad \text{или} \quad \int P_n(x)\operatorname{arctg}\alpha x\, dx$$

В этих случаях подынтегральное выражение разбивается на множители и преобразуется так:

$$\int P_n(x)\ln x dx \Rightarrow u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x},\ dv = P_n(x)dx,\ v = \int P_n(x)dx,$$

$$\int P_n(x)\arcsin\alpha x dx \Rightarrow u = \arcsin\alpha x,\ du = \frac{\alpha dx}{\sqrt{1-(\alpha x)^2}},\ dv = P_n(x)dx,\ v = \int P_n(x)dx,$$

$$\int P_n(x)\operatorname{arctg}\alpha x dx \Rightarrow u = \operatorname{arctg}\alpha x,\ du = \frac{\alpha dx}{1+(\alpha x)^2},\ dv = P_n(x)dx,\ v = \int P_n(x)dx.$$

3) В некоторых других случаях, которые проиллюстрируем на примерах.

Пример. Найти интеграл $\int e^{ax}\sin nx\, dx$.

Решение: $\int e^{ax}\sin nx\,dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin nxdx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| = -\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx + \frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nxdx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos nxdx,\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| = -\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx + \frac{a}{n}\left(\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx - \frac{a}{n}\int e^{ax}\sin nxdx\right) =$$

$$= -\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx + \frac{a}{n^2}e^{ax}\sin nx - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\sin nxdx \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\sin nxdx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

Аналогично можно найти интеграл $\int e^{ax}\cos nxdx = \frac{e^{ax}(a\cos nx + n\sin nx)}{a^2+n^2} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

Решение:

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2-a^2},\ du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \text{ откуда}$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Рассмотрим как находятся интегралы от простейших дробей:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $(n=2,3,\ldots)$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(D=p^2-4q<0)$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(D=p^2-4q<0, n=2,3,\ldots)$.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов являются табличными интегралами.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int(x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$

III. Интеграл от дроби третьего типа относятся к интегралам, содержащим квадратный трехчлен ax^2+bx+c, при нахождении которых используется подстановка:

$$\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=ax+\frac{b}{2}=t.$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=t,\ dx=dt\\ x+\frac{p}{2}=t,\ x=t-\frac{p}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t-\frac{p}{2})^2+p(t-\frac{p}{2})+q}dt=\int\frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})}dt.$$

Если ввести обозначение: $q-\frac{p^2}{4}=a^2>0$, то

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{2a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

Заменяя t и a их выражениями, получим:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{4}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Для вычисления интеграла от дроби третьего типа можно поступить иначе.
В числителе дроби, стоящей под интегралом, записываем производную знаменателя, т.е. $2x + p$.
Тождественными преобразованиями из $2x + p$ получаем заданный числитель $Mx + N$.
Для этого $2x + p$ умножаем на $N/2$ и к полученному произведению прибавляем $N - Mp/2$.

Очевидно, что $(2x+p)\dfrac{M}{2}+N-\dfrac{Mp}{2}=Mx+N$.

Преобразованная дробь $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ примет вид $\dfrac{(2x+p)\dfrac{M}{2}+N-\dfrac{Mp}{2}}{x^2+px+q}$ и представляется как сумма двух дробей:

$$\frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{N-\dfrac{Mp}{2}}{x^2+px+q}.$$

Числитель первой дроби равен производной знаменателя, поэтому интеграл от нее равен натуральному логарифму модуля знаменателя.
Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяем полный квадрат:

$$x^2+px+1=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Замечание. Если в знаменателе дроби вместо трехчлена $x^2 + px + q$ находится трехчлен $ax^2 + bx + c$, то для сведения этого случая к предыдущему необходимо коэффициент a вынести за скобку.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x+3}{x^2+4x+29}dx$.

Решение: $\int \frac{x+3}{x^2+4x+29}dx = \left| \frac{1}{2}(x^2+4x+29)' = x+2 = t, dx = dt \right| = \int \frac{t+1}{t^2+25}dt =$

$$\int \frac{t}{t^2+25}dt + \int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{1}{2}\ln(t^2+25) + \frac{1}{5}arctg\frac{t}{5} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+29) + \frac{1}{5}arctg\frac{x+2}{5} + C.$$

Этот же интеграл найдем другим способом.

Производная знаменателя равна $2x+4$, тогда преобразуем дробь:

$$\frac{x+3}{x^2+4x+29} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4+2}{x^2+4x+29}.$$

Почленным делением числителя на знаменатель, разбиваем дробь на две дроби и в знаменателе второй дроби выделяем полный квадрат:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4+2}{x^2+4x+29} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+29} + \frac{1}{(x+2)^2+25}.$$

Тогда интеграл равен:

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+29}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+29)}{x^2+4x+29} + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+29) + \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{5} + C.$$

IV. Применим к интегралу от простейшей дроби IV типа ту же подстановку, что и к интегралу от дроби III типа:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Для вычисления второго интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$

применяется следующая ***рекуррентная формула***:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Она позволяет свести интеграл от дроби IV типа с показателем степени n к интегралу от дроби IV типа с показателем степени n-1.

Рекуррентная формула выводится следующим образом:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$, имеем: $I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}=\left|\begin{matrix}u=t,\, du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n},\, v=\dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\end{matrix}\right|=\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

Тогда $I_n=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\dfrac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

Решение: Последовательно применяем рекуррентную формулу:

$I_4=\dfrac{5}{6}I_3+\dfrac{x}{6(x^2+1)^3}$; $I_3=\dfrac{3}{4}I_2+\dfrac{x}{4(x^2+1)^2}$; $I_2=\dfrac{1}{2}I_1+\dfrac{x}{2(x^2+1)}$, $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+1}=\mathrm{arctg}x+C$

Тогда $I_2=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\dfrac{x}{2(x^2+1)}\Rightarrow$

$$I_3=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}\right)+\frac{x}{4(x^2+1)^2}=\frac{3}{8}\mathrm{arctg}x+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$I_4=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{8}\mathrm{arctg}x+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}\right)+\frac{x}{6(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{5}{16}\mathrm{arctg}x+\frac{5x}{16(x^2+1)}+\frac{5x}{24(x^2+1)^2}+\frac{x}{6(x^2+1)^3}+C.$$

Спасибо за внимание