

Тема 4: Відстані та кути у просторі

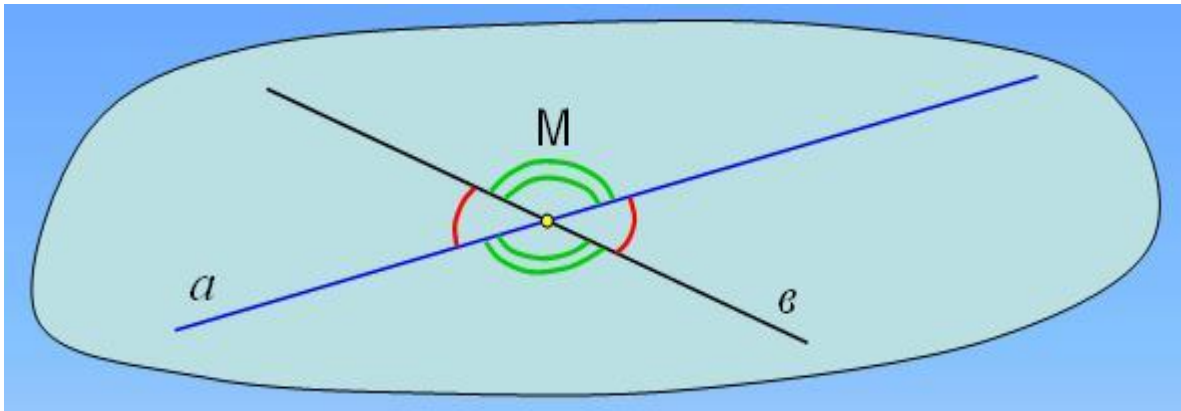
Кути у просторі: кут між прямими у просторі, кут між прямою і площиною

Кути у просторі

Дві прямі, які перетинаються у просторі визначають одну площину, тому означення кута між прямими, які перетинаються у просторі переноситься і в стереометрію

Означення

Менший з кутів, утворених при перетині двох прямих, називають кутом між прямими.



Приклад 1

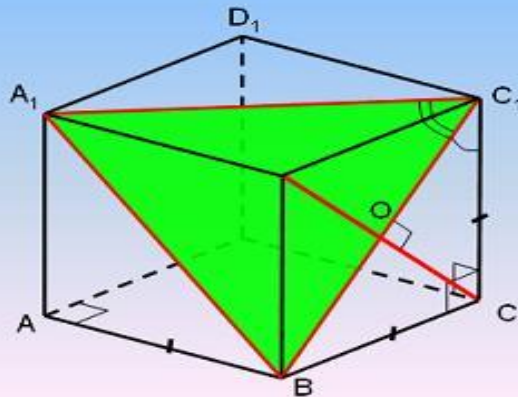
Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти кути між прямими: 1) CC_1 і BC_1 ; 2) BC_1 і CB_1 ; 3) AA_1 і CC_1 ; 4) $A_1 C_1$ і BC_1 .

1) $CC_1, BC_1 = \angle BC_1 C = 45^\circ$ (за властивостями діагоналей квадрата);

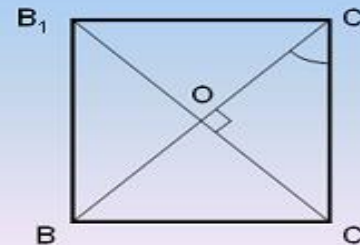
2) $BC_1, CB_1 = \angle C_1 O C = 90^\circ$ (за властивостями діагоналей квадрата);

3) $AA_1, CC_1 = 0^\circ$, тобто $AA_1 \parallel CC_1$;

4) $A_1 C_1, BC_1 = \angle A_1 C_1 B = 60^\circ$ (за властивостями рівностороннього трикутника $\Delta A_1 C_1 B$);

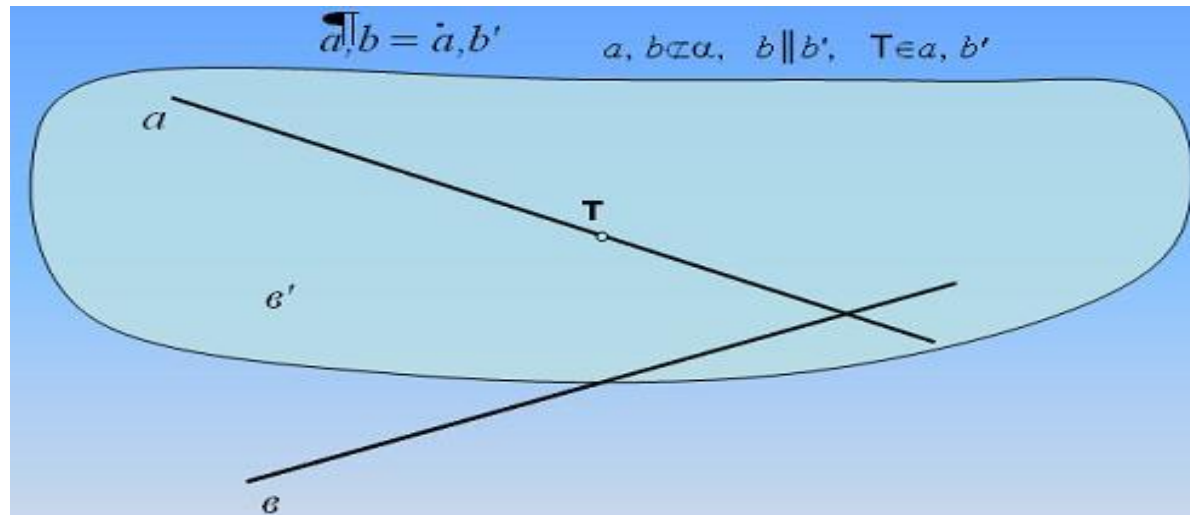


Відповідь: 1) 45° ; 2) 90° ; 3) 0° ; 4) 60° .



Означення

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні мимобіжним



Приклад 2

1) $CC_1 \perp AB = CC_1 \perp DC = 90^\circ$ (за означенням квадрата):

2) $AD_1 \perp CB_1 = BC_1 \perp CB_1 = 90^\circ$ (за властивістю діагоналей квадрата):

3) $AD_1 \perp BA_1 = BC_1 \perp BA_1 = 60^\circ$ (за властивістю рівностороннього трикутника $\triangle A_1C_1B$):

4) $AC_1 \perp BB_1 = AC_1 \perp CC_1 = \angle AC_1C$.

У $\triangle ACC_1$, $\angle C = 90^\circ$: $CC_1 = a$, $AC = a\sqrt{2}$.

$AC_1 = a\sqrt{3}$

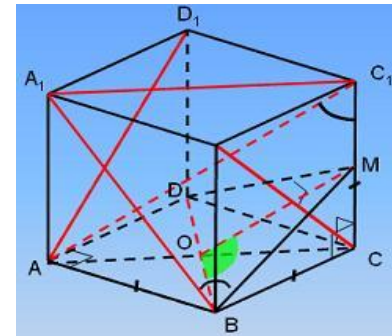
$$\cos \angle C_1 = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle C_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 42'.$$

5) $AC_1 \perp BD = OM$, $BD \perp \angle MOB$, де $O \in BD$, A_1C_1 і M – середина CC_1 .

$\triangle BMD$ – рівнобедрений з основою BD , MO – медіана, а отже висота, тобто $\angle MOB = 90^\circ$.

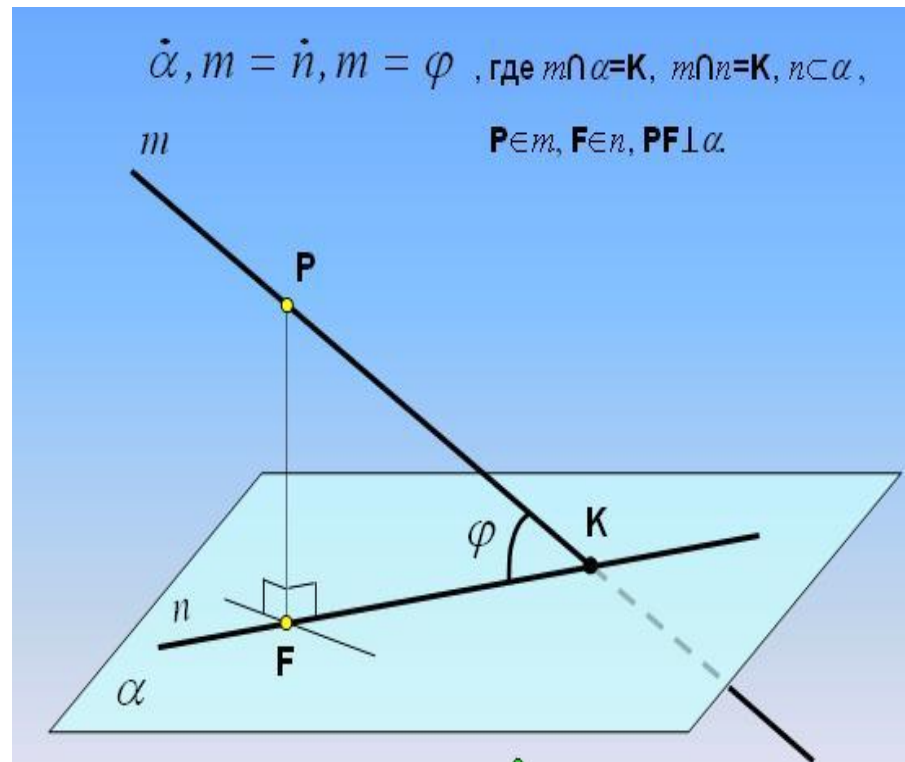
Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
Знайти кути між прямими:

- 1) CC_1 і AB ;
- 2) AD_1 і CB_1 ;
- 3) AD_1 і BA_1 ;
- 4) AC_1 і BB_1 ;
- 5) AC_1 і BD .

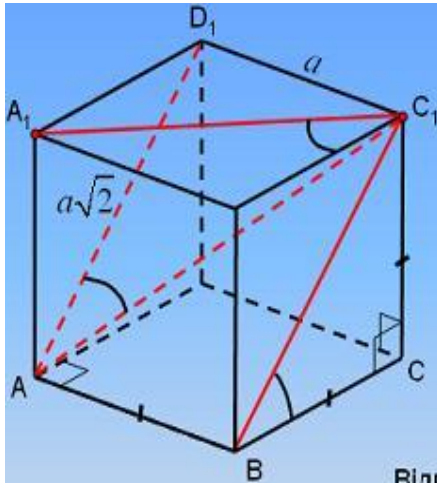


Означення

Кутом між прямою і площиною називається кут між цією прямою і її проекцією на площину.



Приклад 3



Розв'язання.

1) $BC_1, (ABC) = BC_1, BC = 45^\circ$ (за властивістю діагоналей квадрата);

2) $A_1C_1, (CBB_1) = A_1C_1, B_1C_1 = 45^\circ$ (за властивістю діагоналей квадрата);

3) $AC_1, (AA_1D_1) = AC_1, AD_1 = \text{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: 1) 45° ; 2) 45° ; 3) $\text{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Знайти кути між :

1) BC_1 і (ABC) ; 2) A_1C_1 і (CBB_1) ;

3) AC_1 і (AA_1D_1) .