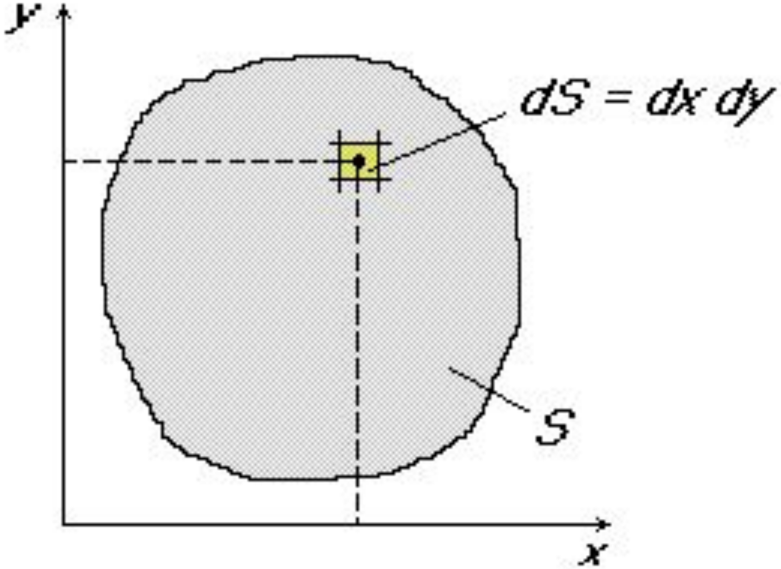
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

Стержень

1. ПЛОЩАДЬ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

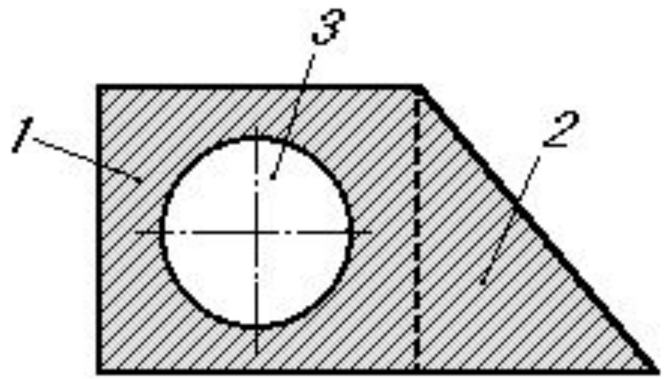


$$S = \iint_S dx\,dy = \int_S dS$$

Размерность $[м^2, см^2]$

1. ПЛОЩАДЬ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ (продолжение)

Сложная фигура

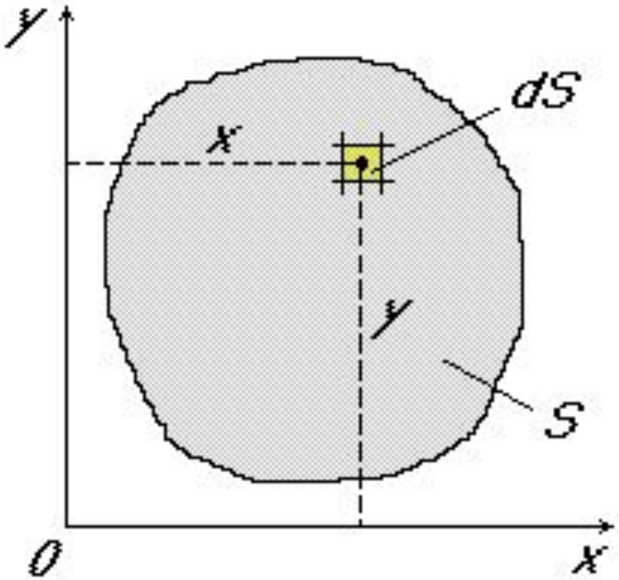


$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i > 0$$

i - номер фигуры.

$(S_3 < 0)$

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ



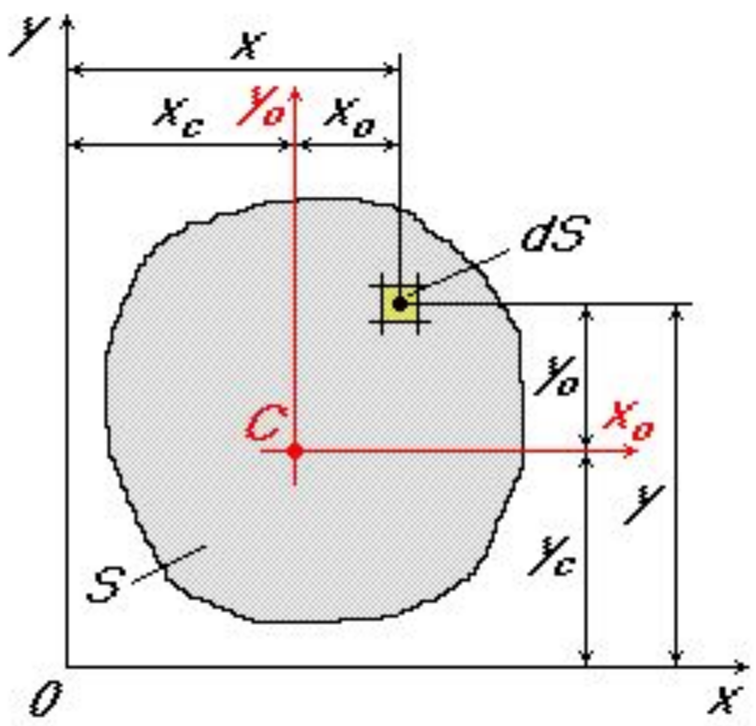
$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_S y\,dS; \\ S_y &= \int_S x\,dS \end{aligned}\right\} -$$ статические моменты площади относительно осей x и y (соответственно).

Размерность $[м^3; см^3]$

$$(S_x, S_y) \gtrless 0$$

Оси, относительно которых $S_x = S_y = 0$, называются **центральными**.
Точка пересечения центральных осей совпадает **с центром** тяжести сечения.

ИЗМЕНЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



$x = x_o + x_c;$

$y = y_o + y_c.$

Дано:

C – центр тяжести сечения;

x_o, y_o – центральные оси;

$S_{xo} = S_{yo} = 0;$

x_c, y_c – координаты центра тяжести сечения в осях x и y.

Определить:

$S_x = ?; \quad S_y = ?$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

Запишем статические моменты сечения относительно осей x и y:

$$S_x = \int_S y\, dS = \int_S (y_0 + y_c)\, dS = \int_S y_0\, dS + y_c \int_S dS;$$

$$S_y = \int_S x\, dS = \int_S (x_0 + x_c)\, dS = \int_S x_0\, dS + x_c \int_S dS;$$

После преобразований:

$$S_x = \int_S y_0\, dS + y_c \cdot S = S_{x0} + y_c \cdot S;$$

$$S_y = \int_S x_0\, dS + x_c \cdot S = S_{y0} + x_c \cdot S;$$ отсюда:

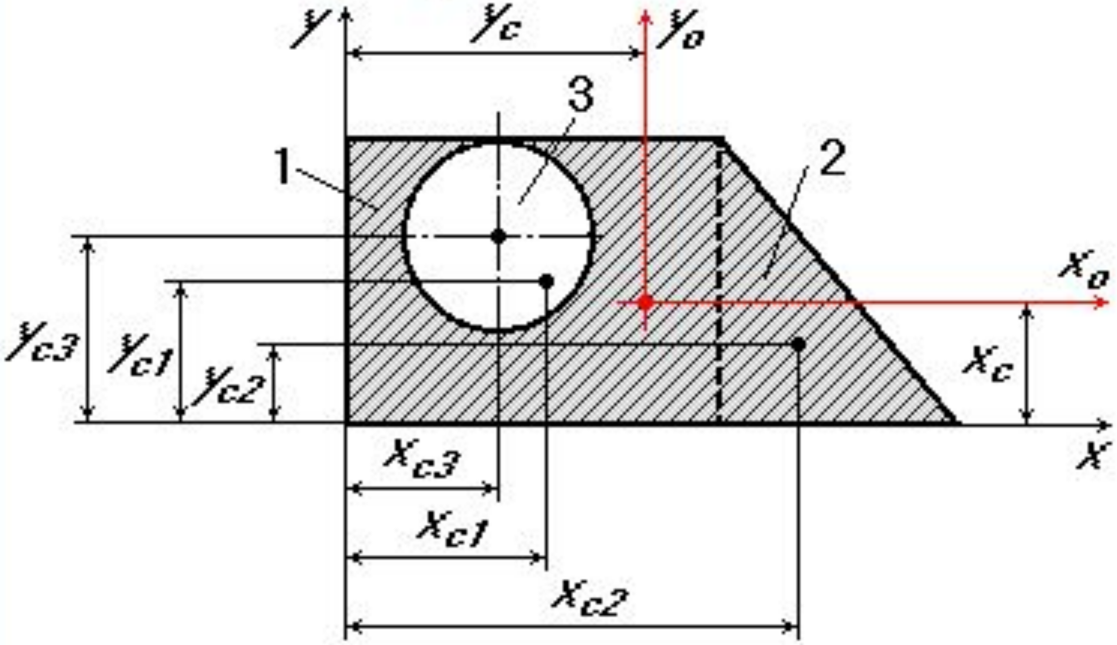
$$S_x = y_c \cdot S; \qquad S_y = x_c \cdot S;$$

Определим положение центра тяжести сечения:

$$y_c = \frac{S_x}{S}; \qquad x_c = \frac{S_y}{S}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

Сложная фигура



i - номер фигуры.

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{ci} S_i = y_{c1} S_1 + y_{c2} S_2 - y_{c3} S_3;$$

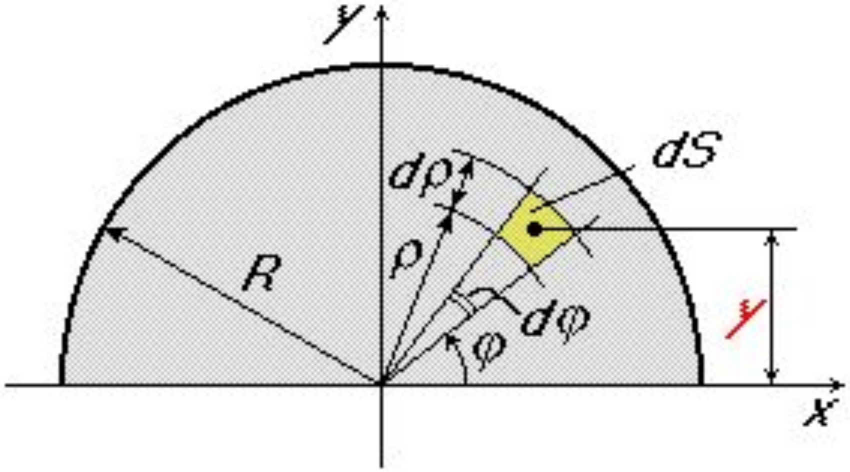
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} S_i};$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_{ci} S_i = x_{c1} S_1 + x_{c2} S_2 - x_{c3} S_3;$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} S_i}.$$

ПРИМЕР

Определение центра тяжести полукруга



Дано: R

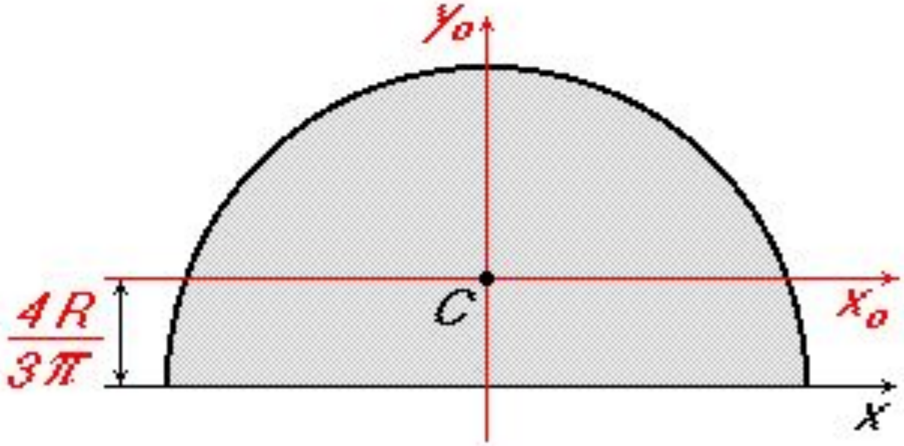
$y_c = ?$

Выбираем начальные оси x и y. Центр тяжести расположен на оси y - оси симметрии сечения.

Площадь элементарной площадки:

$dS = \rho\, d\varphi\, d\rho$; $y = \rho \sin\varphi$.

ПРИМЕР (продолжение)



Статический момент сечения:

$$S_x = \int_S y\,dS = \int_0^R \int_0^\pi \rho \cdot \sin\varphi \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho;$$

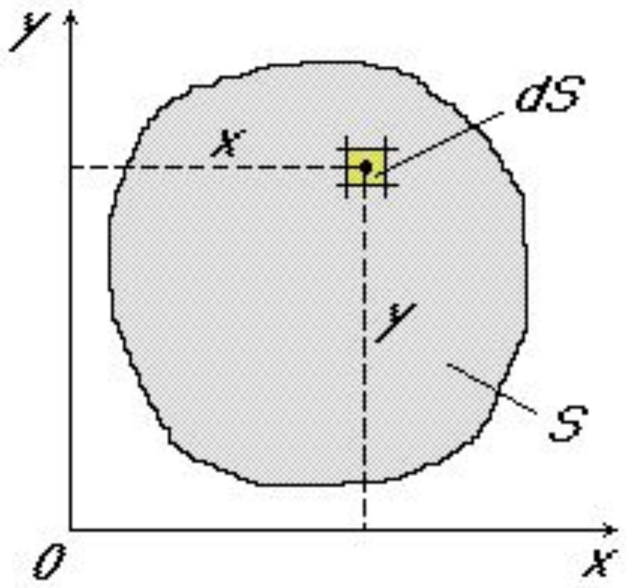
$$S_x = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{2}{3} R^3;$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2;$$

$$y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{2R^3 \cdot 2}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ



$$I_x = \int_S y^2 dS;$$

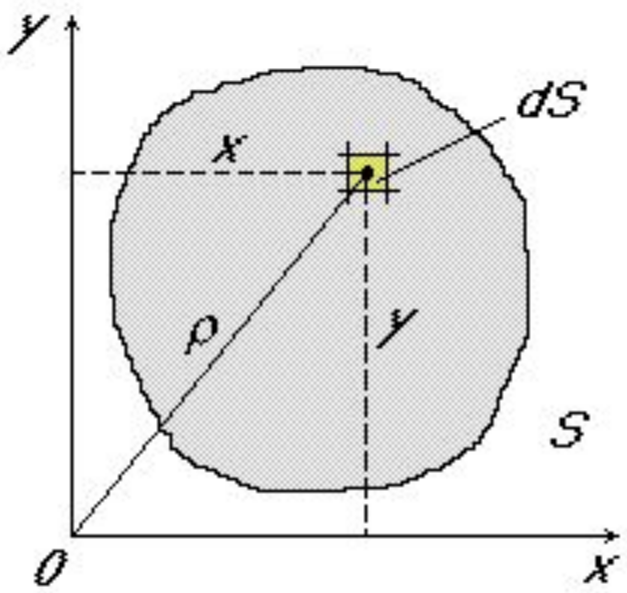
$$I_y = \int_S x^2 dS;$$

$$I_{xy} = \int_S xy\, dS.$$

Осевые (относительно осей x и y) и **центробежный** моменты инерции сечения.

Размерность $[м^4, см^4]$

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ (продолжение)



$$I_p = \int_S \rho^2 dS = \int_S (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y$$ - **полярный**

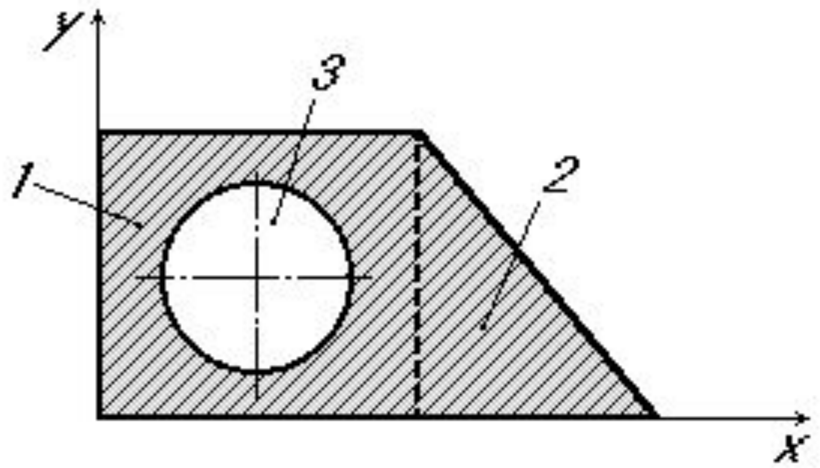
момент инерции сечения относительно точки 0.

Размерность $[м^4, см^4]$

$$I_x, I_y, I_p > 0; \quad I_{xy} \lessgtr 0$$

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ (продолжение)

Сложная фигура



$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_x^{(i)};$$

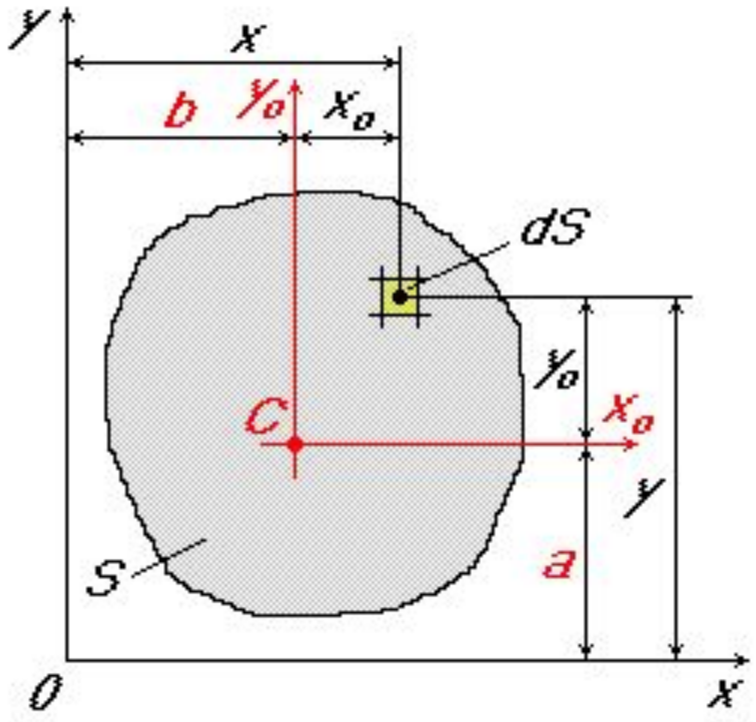
$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_y^{(i)};$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xy}^{(i)};$$

$$I_\rho = \sum_{i=1}^{n} I_\rho^{(i)};$$

i - номер фигуры.

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



$x = x_0 + b$;

$y = y_0 + a$.

Дано:

C – центр тяжести сечения;

x_0-y_0– центральные оси;

$S_{x0} = S_{y0} = 0$;

I_{x0}, I_{y0}, $I_{x0\,y0}$;

a, b – координаты центра тяжести сечения в осях x и y.

Определить:

I_x, I_y, I_{xy} = ?

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ (продолжение)

Запишем осевые моменты инерции сечения относительно осей x и y:

$$I_x = \int_S y^2\,dS = \int_S (y_0 + a)^2 dS = \int_S y_0^2 dS + 2a\int_S y_0\,dS + a^2\int_S dS =$$

$$= I_{x0} + 2a\cdot S_{x0} + a^2 S;$$ **отсюда:**

$$I_x = I_{x0} + a^2 S;$$ **аналогично для оси y:**

$$I_y = I_{y0} + b^2 S;$$

При переходе к центральным осям:

$$I_{x0} = I_x - a^2 S;$$

$$I_{y0} = I_y - b^2 S.$$

Из всех моментов инерции относительно параллельных осей моменты инерции относительно центральной оси - минимальные

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ (продолжение)

Определим центробежный момент инерции сечения

относительно осей x и y:

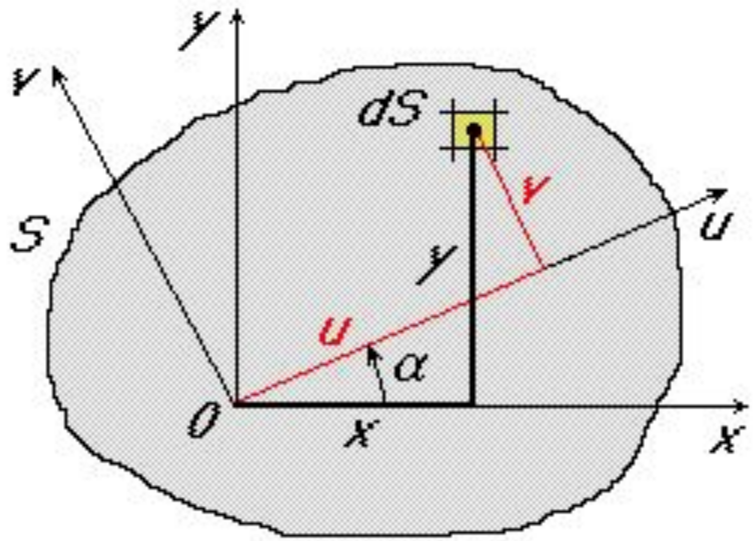
$$I_{xy} = \int_S xy\, dS = \int_S (x_o + b)(y_o + a)\, dS$$

$$= \int_S x_o y_o\, dS + b\int_S y_o\, dS + a\int_S x_o\, dS + ab\int_S dS =$$

$$= I_{xo\,yo} + b\, S_{xo} + a\, S_{yo} + abS;$$ отсюда:

$$I_{xy} = I_{xo\,yo} + a \cdot b \cdot S.$$

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



Дано:

оси x и y

$I_x,\ I_y,\ I_{xy}$

α

Найти I_u, I_v, I_{uv}.

Определим координаты u и v площадки dS в новой системе координат:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha;$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ (продолжение)

Определим **осевые** моменты инерции сечения относительно осей **u** и **v**:

$$I_u = \int_S v^2 dS = \int_S (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dS =$$

$$= \cos^2\alpha \int_S y^2 dS - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_S xy\, dS + \sin^2\alpha \int_S x^2 dS;$$

$$I_v = \int_S u^2 dS = \int_S (y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 dS =$$

$$= \sin^2\alpha \int_S y^2 dS + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_S xy\, dS + \cos^2\alpha \int_S x^2 dS;$$

$$I_u = I_x\cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha + I_y\sin^2\alpha;$$

$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha + I_y\cos^2\alpha$$

Если сложить величины моментов инерции относительно осей u и v, то получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p = const$$

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ (продолжение)

Определим **центробежный** момент инерции сечения относительно осей **u** и **v**:

$$I_{uv}=\int_S uv\,dS=\int_S (y\sin\alpha+x\cos\alpha)(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\,dS=$$

$$=\cos^2\alpha\int_S xy\,dS-\sin^2\alpha\int_S xy\,dS+\sin\alpha\cos\alpha\int_S y^2dS-\sin\alpha\cos\alpha\int_S x^2dS$$

Отсюда:

$$I_{uv}=I_{xy}\cos 2\alpha+\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\alpha$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Если $I_u + I_v = I_x + I_y = const$ сумма остается неизменной, то существуют оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений (I_{max} и I_{min}), то есть

$I_u + I_v = I_x + I_y = I_{max} + I_{min} = const$. Такие оси называются ГЛАВНЫМИ.

Найдем положение этих осей, приравняв $\dfrac{dI_u}{d\alpha} = 0$.

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = 2\cos\alpha_0(-\sin\alpha_0)\cdot I_x - \cos 2\alpha_0\cdot 2\cdot I_{xy} + 2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\cdot I_y = 0.$$ Отсюда:

$$-2\left(I_{xy}\cos 2\alpha_0 + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0\right) = -2\,I_{uv} = 0.$$

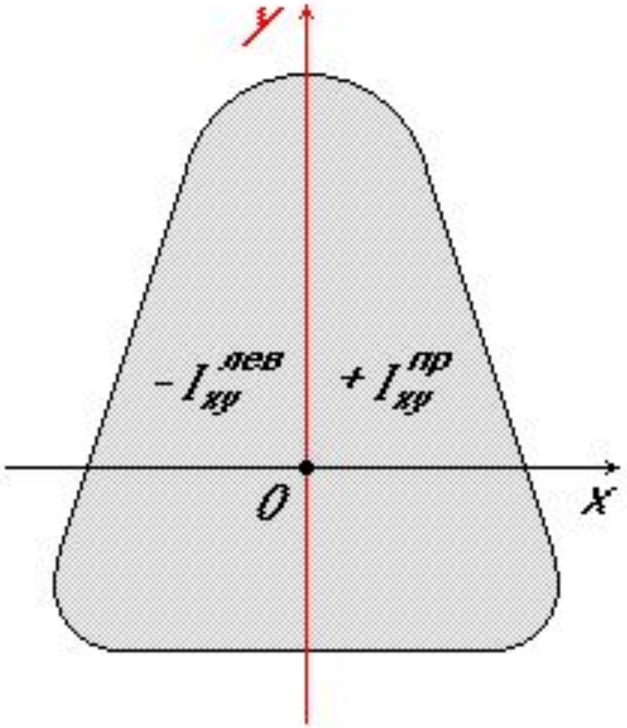
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Экстремальные значения осевых моментов инерции сечения:

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

СИММЕТРИЧНОЕ СЕЧЕНИЕ



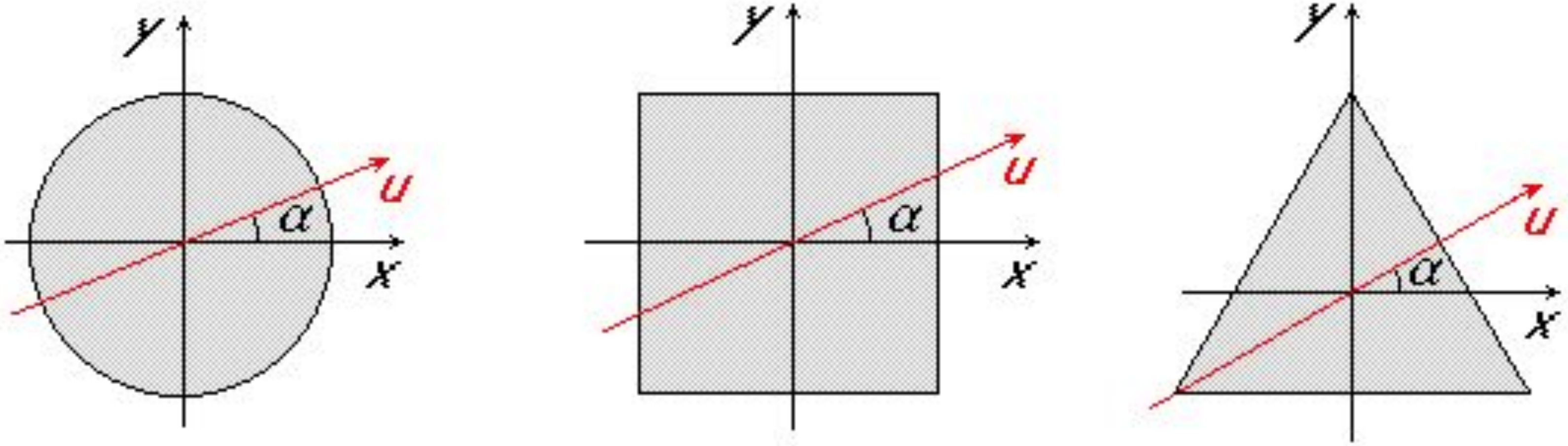
Ось y – ось симметрии

$$-I_{xy}^{лев} = I_{xy}^{пр};$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{пр} + I_{xy}^{лев} = 0.$$

Оси x и y – главные оси инерции.

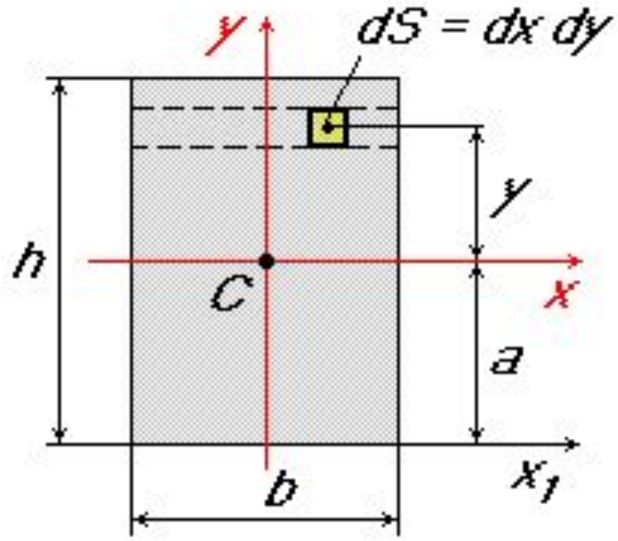
ПРАВИЛЬНЫЕ ФИГУРЫ



$I_x = I_y$; $I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha = I_x$.

Любая ось *u* - главная центральная ось.

ПРЯМОУГОЛЬНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ



Дано:

Оси x и y - главные и центральные;

$$b \times h$$

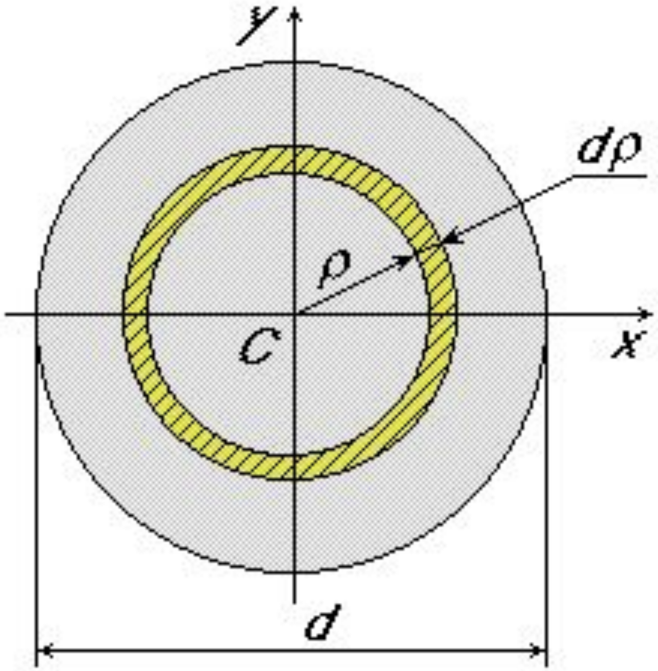
$$I_x,\ I_y,\ I_{x1} = ?$$

$$I_x = \int_S y^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\, dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \frac{b h^3}{12};$$

$$I_x = \frac{b h^3}{12}; \qquad I_y = \frac{h b^3}{12};$$

$$I_{x1} = I_x + a^2 S = \frac{b h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b h; \qquad I_{x1} = \frac{b h^3}{3}.$$

КРУГЛОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ



Дано:

Оси x **и** y **– главные центральные оси;**

$$\frac{d}{I_\rho,\ I_x,\ I_y = ?}$$

$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS \qquad dS = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho;$$

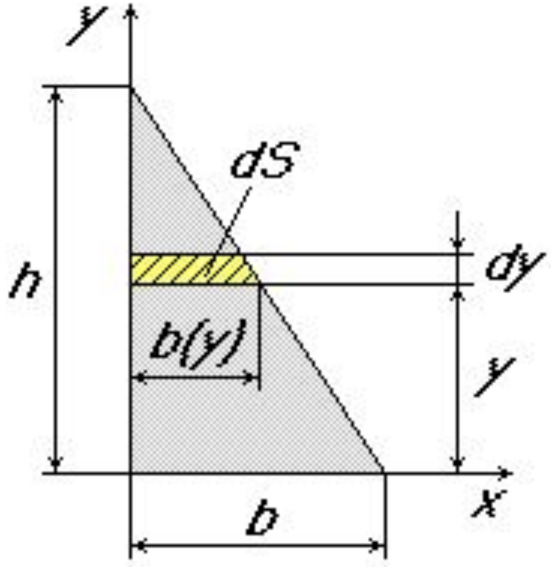
$$I_\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{2\pi}{4} \rho^4 \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$I_\rho = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y;$$

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \qquad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Пример. Определение моментов инерции сечения относительно осей x и y.



Дано:

Оси x и y

b и h

$I_x,\ I_y = ?$

$$I_x = \int_S y^2 dS$$

$$dS = b(y)\,dy = \frac{h}{b}(h - y)\,dy;$$

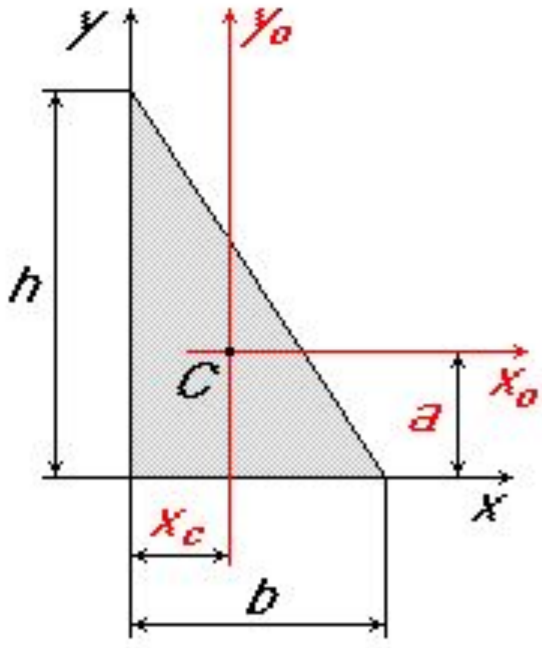
$$\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h}; \qquad b(y) = \frac{b}{h}(h-y);$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy;$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК (продолжение)

Пример. Определение моментов инерции сечения относительно центральных осей x_o и y_o.



Дано:

Оси x_o и y_o – центральные оси;

b и h; $a = \dfrac{h}{3}$; $x_c = \dfrac{b}{3}$;

$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$;

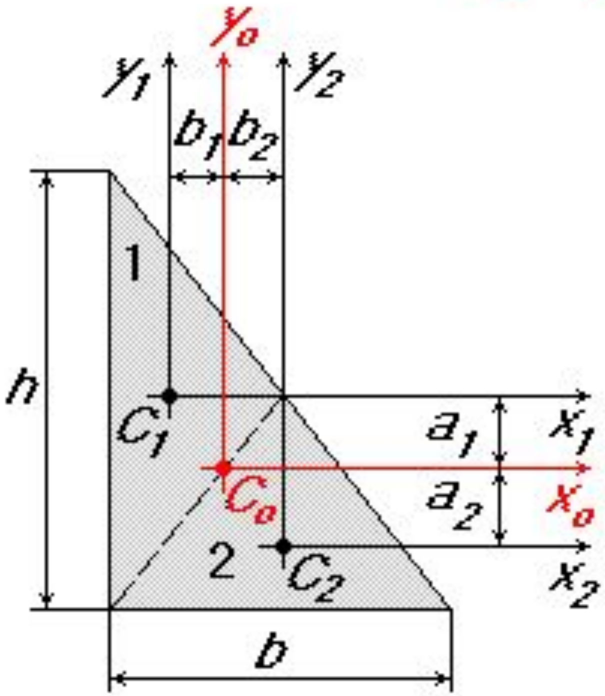
I_{xo}, $I_{yo} = ?$

$$I_{xo} = I_x - a^2 S = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} b\,h;$$

$$I_{xo} = \frac{bh^3}{36}; \qquad I_{yo} = \frac{hb^3}{36}.$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК (продолжение)

Пример. Определим центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей x_o и y_o .



Дано: b и h

Оси x_o и y_o - центральные

$I_{xo\,yo} = ?$

x_1 - ось симметрии фигуры 1; $I_{x1\,y1} = 0;$

y_2 - ось симметрии фигуры 2; $I_{x2\,y2} = 0;$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} h \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \frac{h}{2} b = \frac{bh}{4};$$

$$b_1 = -\frac{1}{6} b; \; a_1 = \frac{1}{6} h; \; b_2 = \frac{1}{6} b; \; a_2 = -\frac{1}{6} h;$$

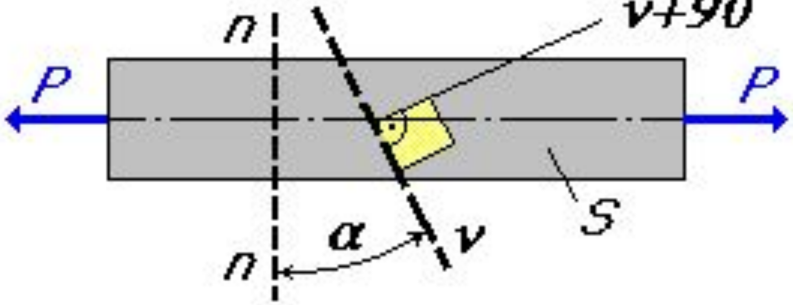
$$I_{xo\,yo} = I_{x1\,y1} + a_1 b_1 S_1 + I_{x2\,y2} + a_2 b_2 S_2 = -\frac{h}{6} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{bh}{4} - \frac{h}{6} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{bh}{4};$$

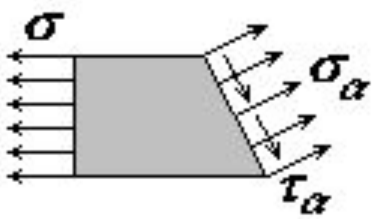
$$I_{xo\,yo} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

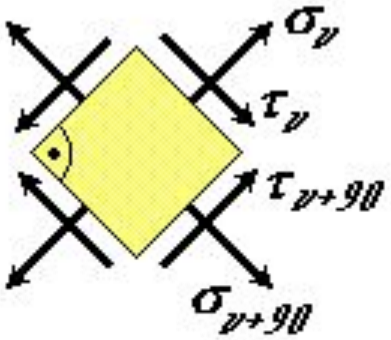
СДВИГ и КРУЧЕНИЕ

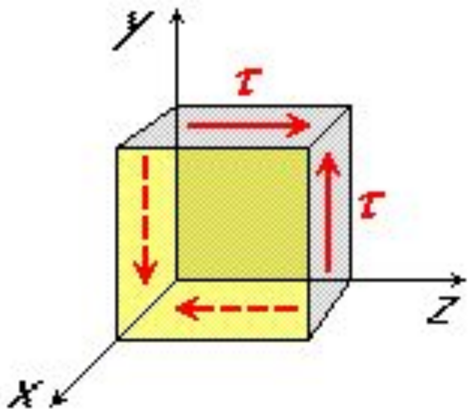
Чистый сдвиг

На примере растяжения





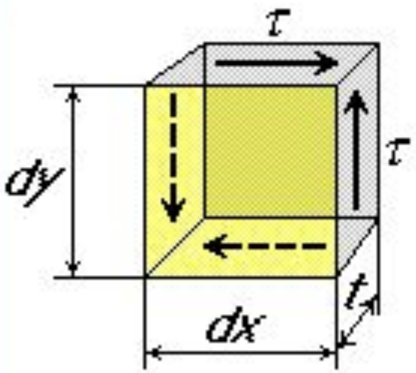


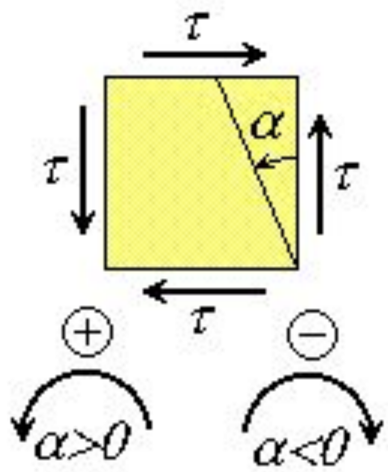


$$\tau_\nu = -\tau_{\nu+90}$$

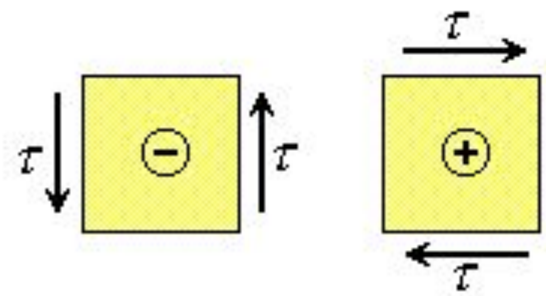
Чистый сдвиг – напряженное состояние, на гранях прямоугольного параллелепипеда возникают только **касательные напряжения**.

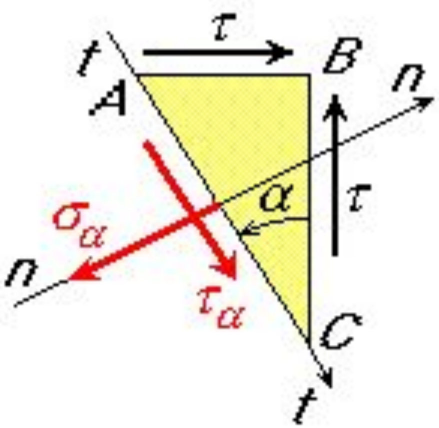
ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ





Правило знаков:





$$\Sigma F_{n-n} = -\sigma_\alpha \cdot AC \cdot t + \tau \cdot AB \cdot t \cdot \cos\alpha + \tau \cdot BC \cdot t \cdot \sin\alpha = 0;$$

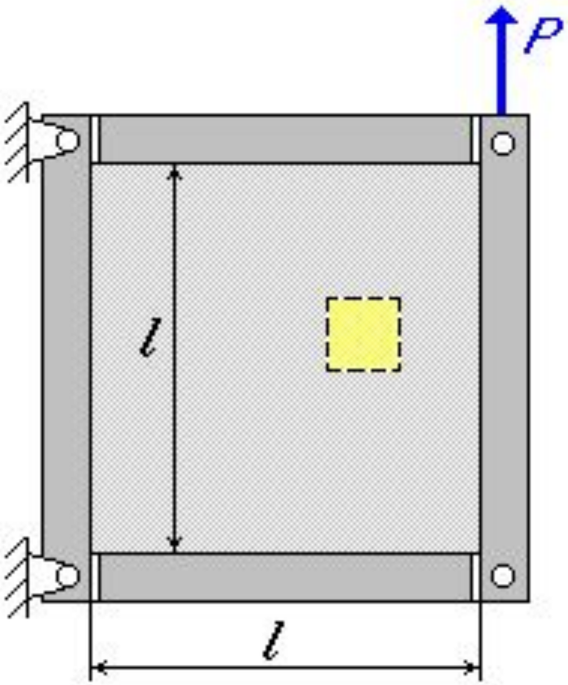
$$\Sigma F_{t-t} = \tau_\alpha \cdot AC \cdot t - \tau \cdot BC \cdot t \cdot \cos\alpha + \tau \cdot AB \cdot t \cdot \sin\alpha = 0;$$

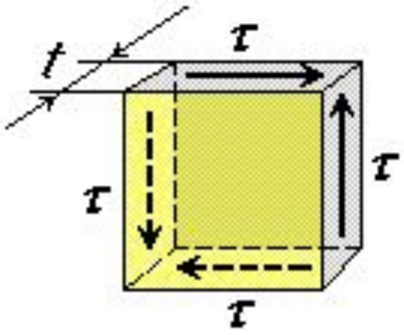
$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha$$

ОДНОРОДНЫЙ ЧИСТЫЙ СДВИГ

а) пластина



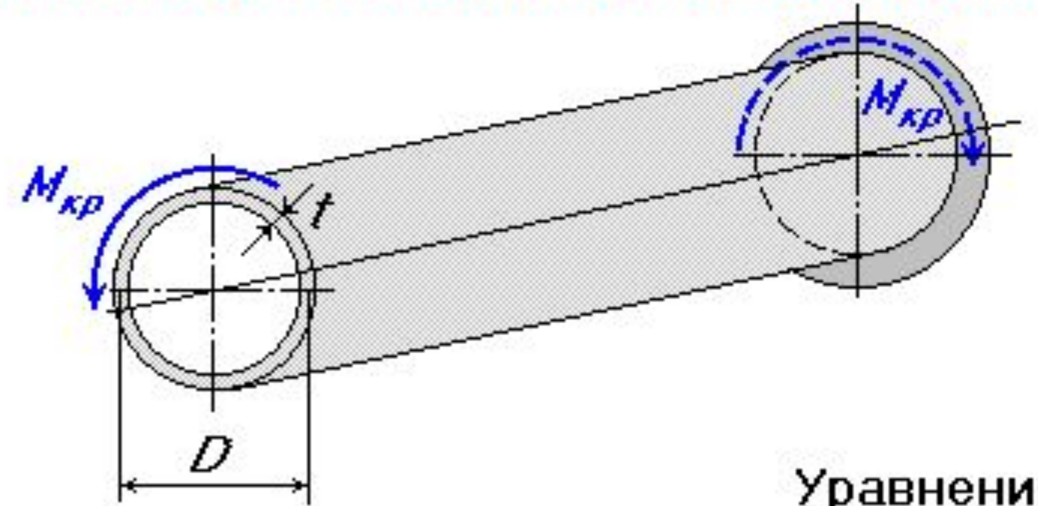


$$\tau = \frac{P}{l \cdot t}$$

t - толщина пластины

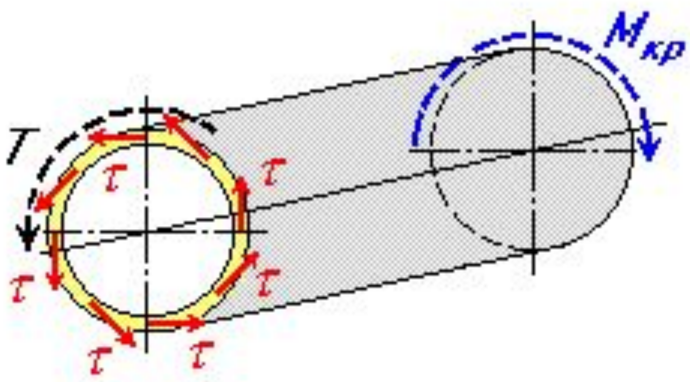
ОДНОРОДНЫЙ ЧИСТЫЙ СДВИГ (продолжение)

б) тонкостенная цилиндрическая трубка $(t << D)$



t - толщина трубки;

D - средний диаметр трубки;



$\tau = const$;

Уравнения равновесия:

$T = M_{кр}$; $\quad M_{кр} = T = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot t\, \dfrac{D}{2}$;

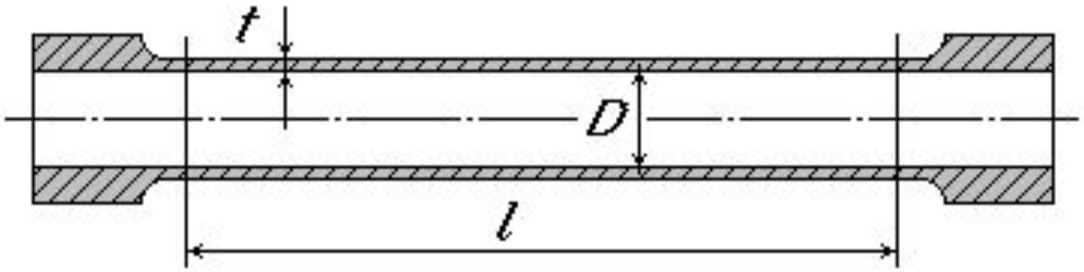
$$\tau = \frac{2T}{\pi D^2 t};$$

$\tau = f(M_{кр})$; $\quad \tau = f(T)$.

ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ЧИСТОГО СДВИГА

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие.

а) образец - тонкостенная трубка:



б) схема нагружения и деформирования:

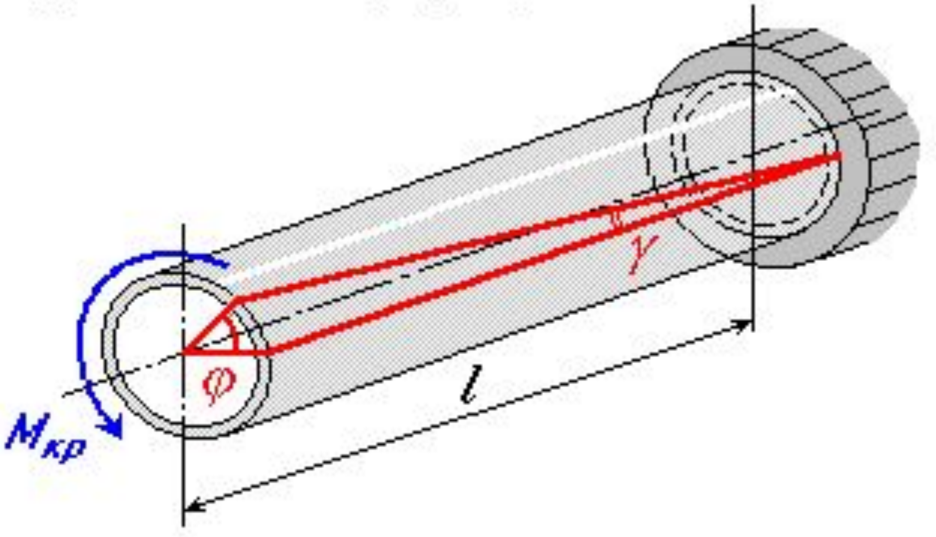


ДИАГРАММА СДВИГА (КРУЧЕНИЯ) ОБРАЗЦА ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Во время испытаний замеряют $M_{кр}$ и взаимный угол поворота сечений φ на длине l - получают диаграмму $M_{кр} = f(\varphi)$

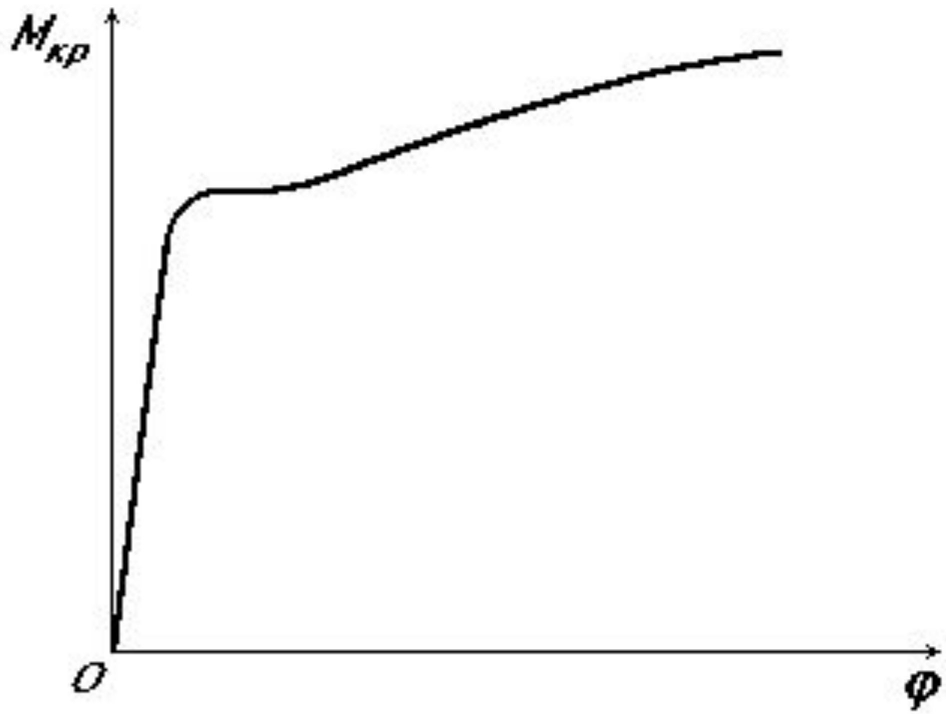
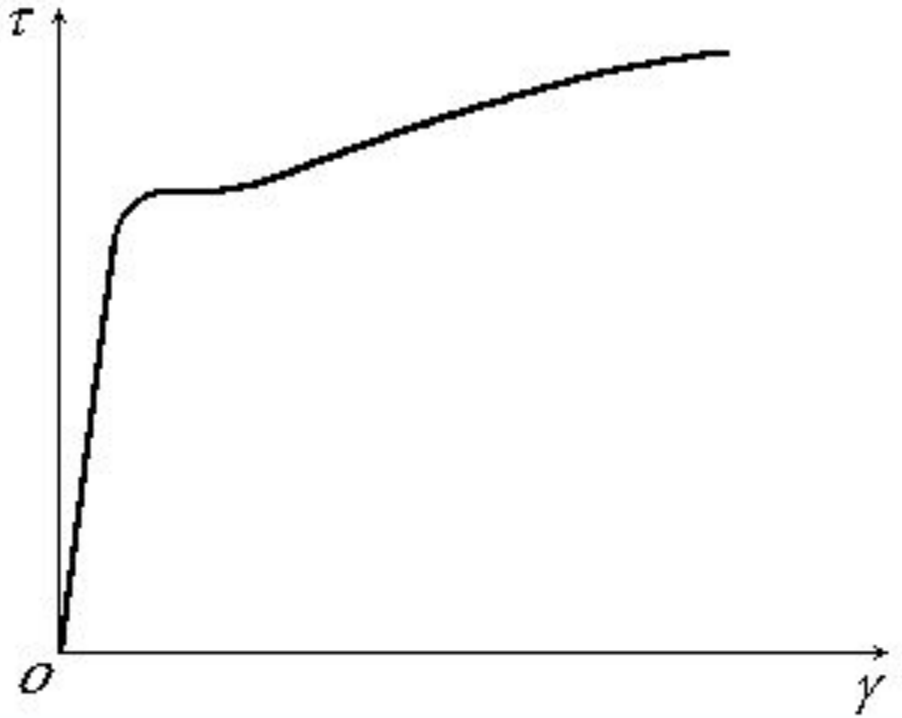


ДИАГРАММА СДВИГА (КРУЧЕНИЯ) МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

При получении диаграммы сдвига для материала $\tau = f(\gamma)$ перестроим диграмму сдвига образца с помощью выражений:

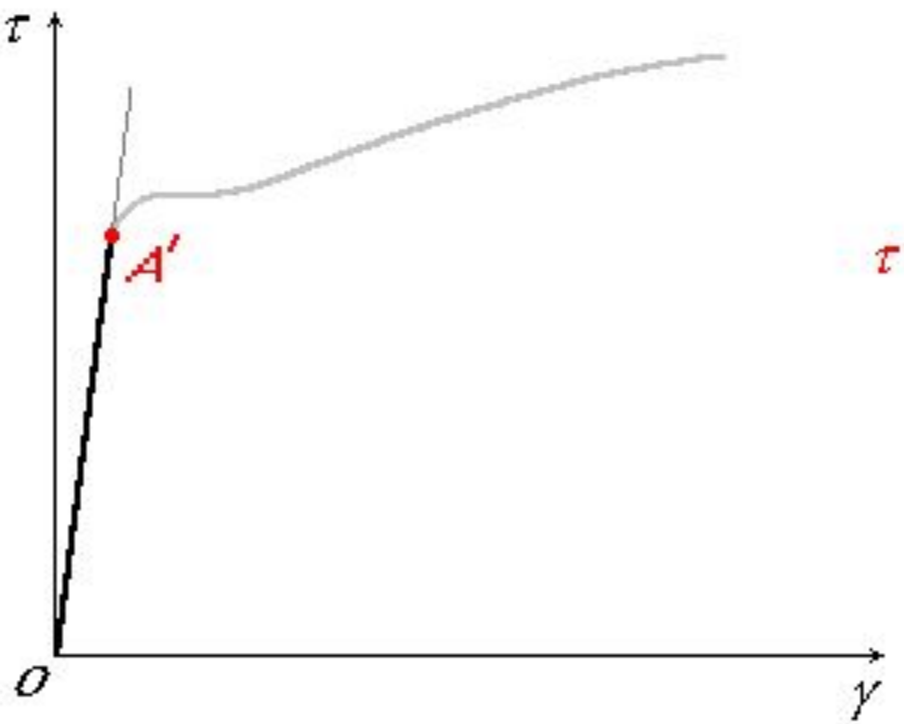
$$\tau = \frac{2M_{кр}}{\pi D^2 t} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\varphi \cdot D}{2l}$$



Сопоставление диаграммы сдвига с диаграммой растяжения для одного и того же материала показывает их качественное сходство.

ХАРАКТЕРНЫЕ ЗОНЫ

Зона упругости



OA' – зона упругости (прямая пропорциональности);

$\tau = G \cdot \gamma$ – закон Гука при сдвиге;

G – модуль сдвига или модуль упругости II рода;

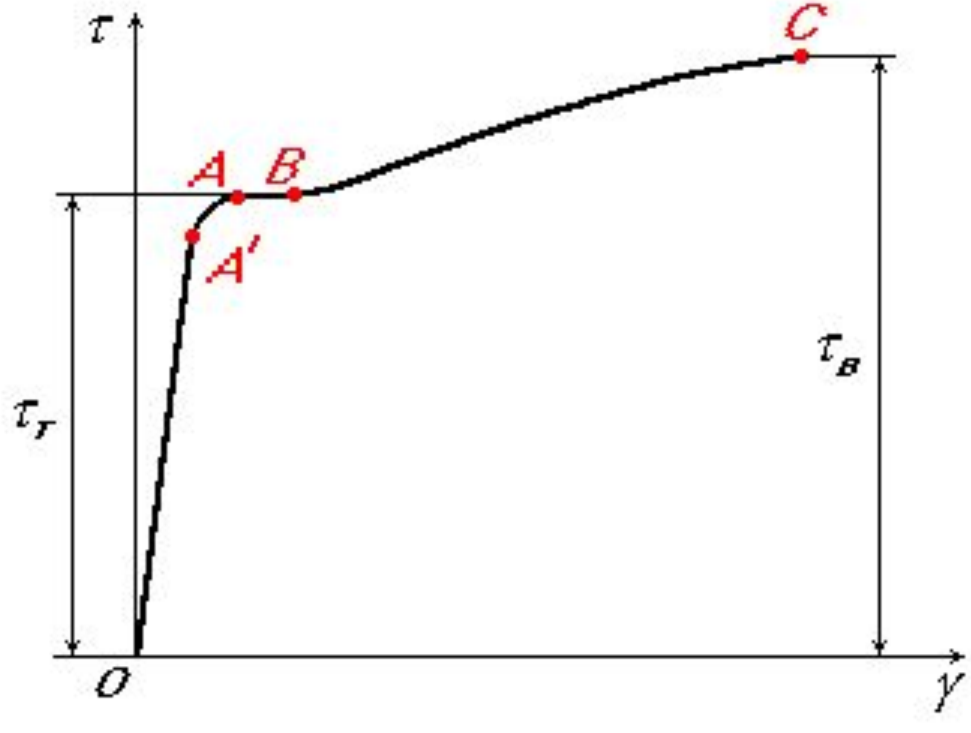
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)};$$

E – модуль продольной упругости (I рода или модуль Юнга);

μ – коэффициент Пуассона.

ХАРАКТЕРНЫЕ ЗОНЫ (продолжение)

Зоны текучести и упрочнения



AB - зона текучести (площадка текучести);

$\tau_т$ - предел текучести при сдвиге (кручении);

$$\tau_т = (0{,}5...0{,}6)\sigma_т$$

BC - зона упрочнения;

$\tau_в$ - предел прочности (временное сопротивление) при сдвиге.

ПРОСТЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

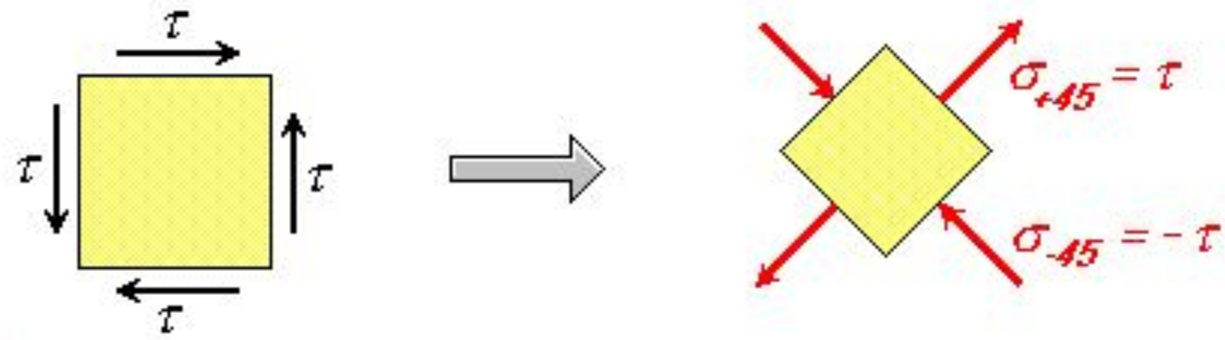
$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha;$ $\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha;$

1) $\tau_\alpha = \tau_{max} = \tau;$ $\cos 2\alpha = 1;$ $\alpha = 0;$ τ_{max} – в поперечных сечениях;

2) $\sigma_\alpha = \sigma_{max} = \tau;$ $\sin 2\alpha = 1;$ $2\alpha = 90^o;$ $\alpha = 45^o;$

а) $\alpha = +45^o;$ $\sigma_{+45} = \tau;$ $\tau_{+45} = 0;$

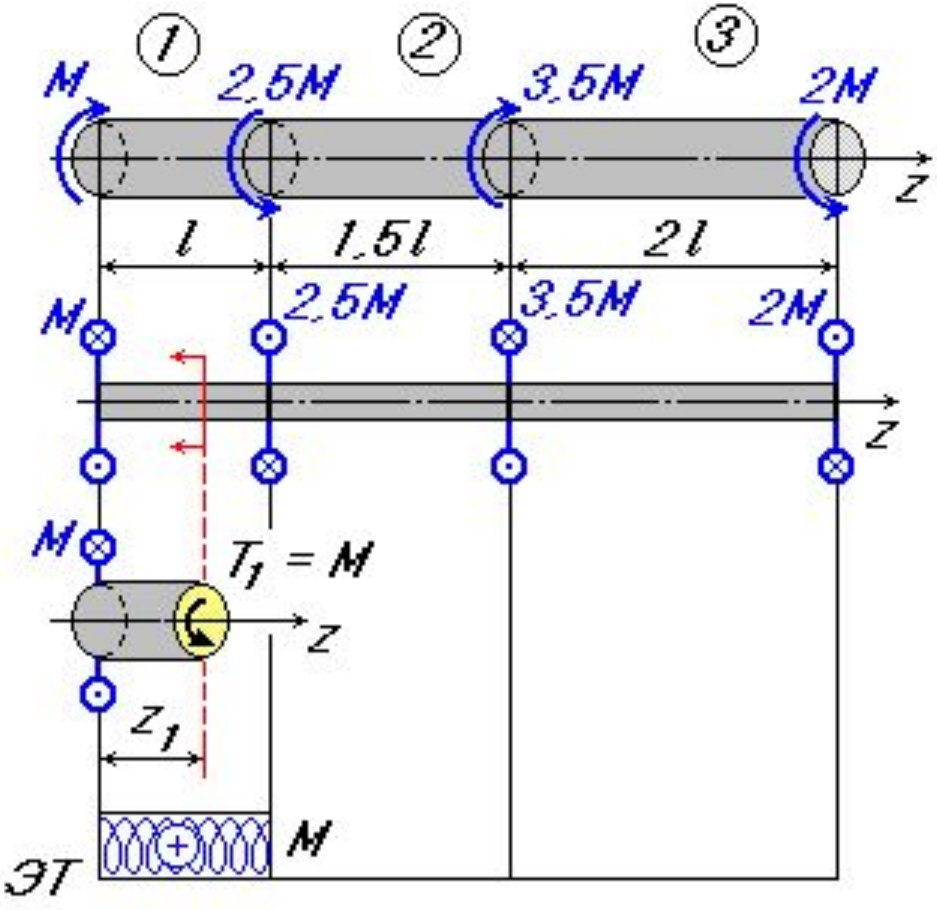
б) $\alpha = -45^o;$ $\sigma_{-45} = -\tau;$ $\tau_{-45} = 0;$



Чистый сдвиг может быть представлен как одновременное **растяжение** и **сжатие** по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ПРИ КРУЧЕНИИ

График, показывающий изменеие крутящего момента по длине стержня (вала), называется эпюрой крутящих моментов ЭТ.



Пример 1.

Вал под действием внешних (скручивающих) моментов находится в равновесии:

$$\Sigma M_z = M - 2{,}5M + 3{,}5M - 2M = 0;$$

С помощью метода сечений определим крутящие моменты в поперечных сечениях вала. Разобьем вал на три участка.

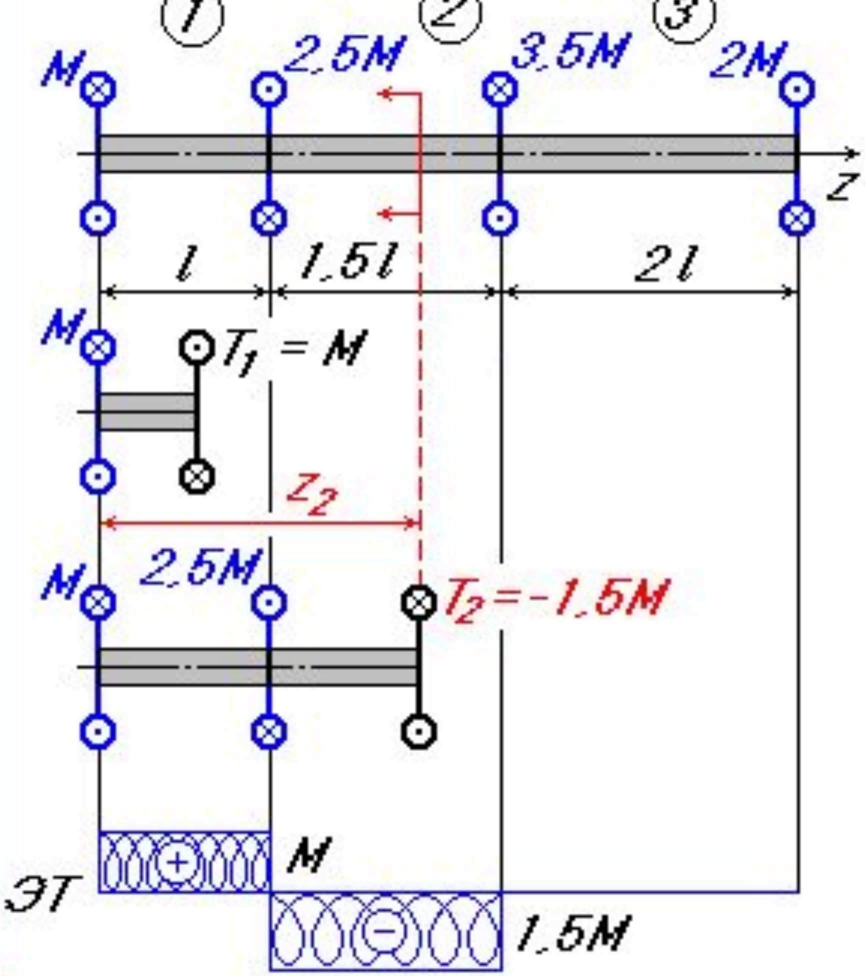
1-й участок $(0 < z_1 < l)$

$T_1 = M$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ПРИ КРУЧЕНИИ

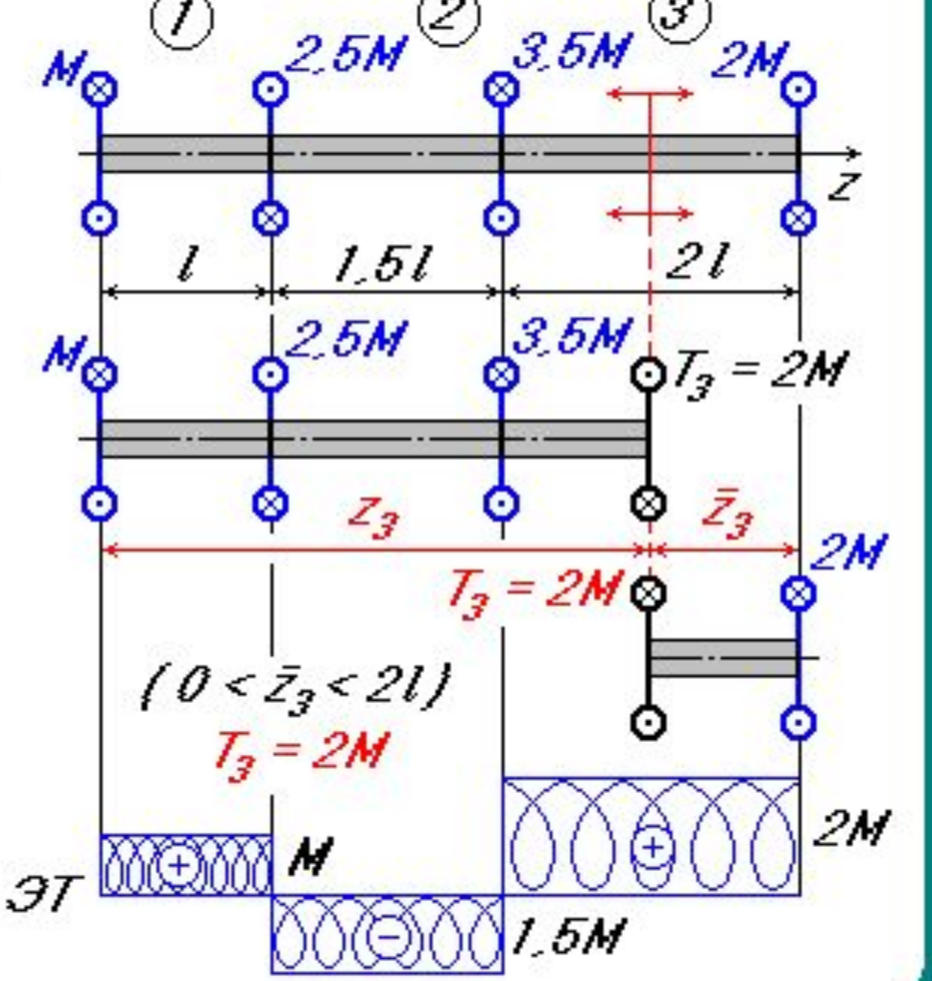
2-й участок $(l < z_2 < 2{,}5l)$

$T_2 = M - 2{,}5M = -1{,}5M$



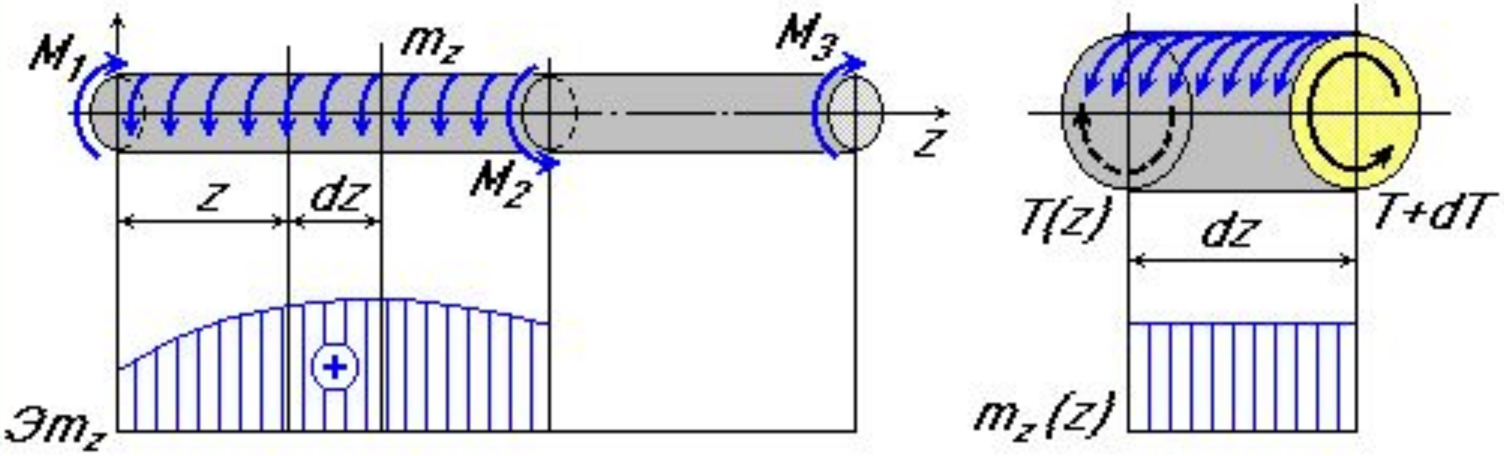
3-й участок $(2{,}5l < z_3 < 4{,}5l)$

$T_3 = M - 2{,}5M + 3{,}5M = 2M$



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СКРУЧИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Вал (стержень) находится в равновесии под действием системы внешних (скручивающих) моментов.



Бесконечно малый отрезок dz находится в равновесии под действием распределенных скручивающих моментов m_z и крутящих моментов, отличающихся на бесконечно малую величину dT:

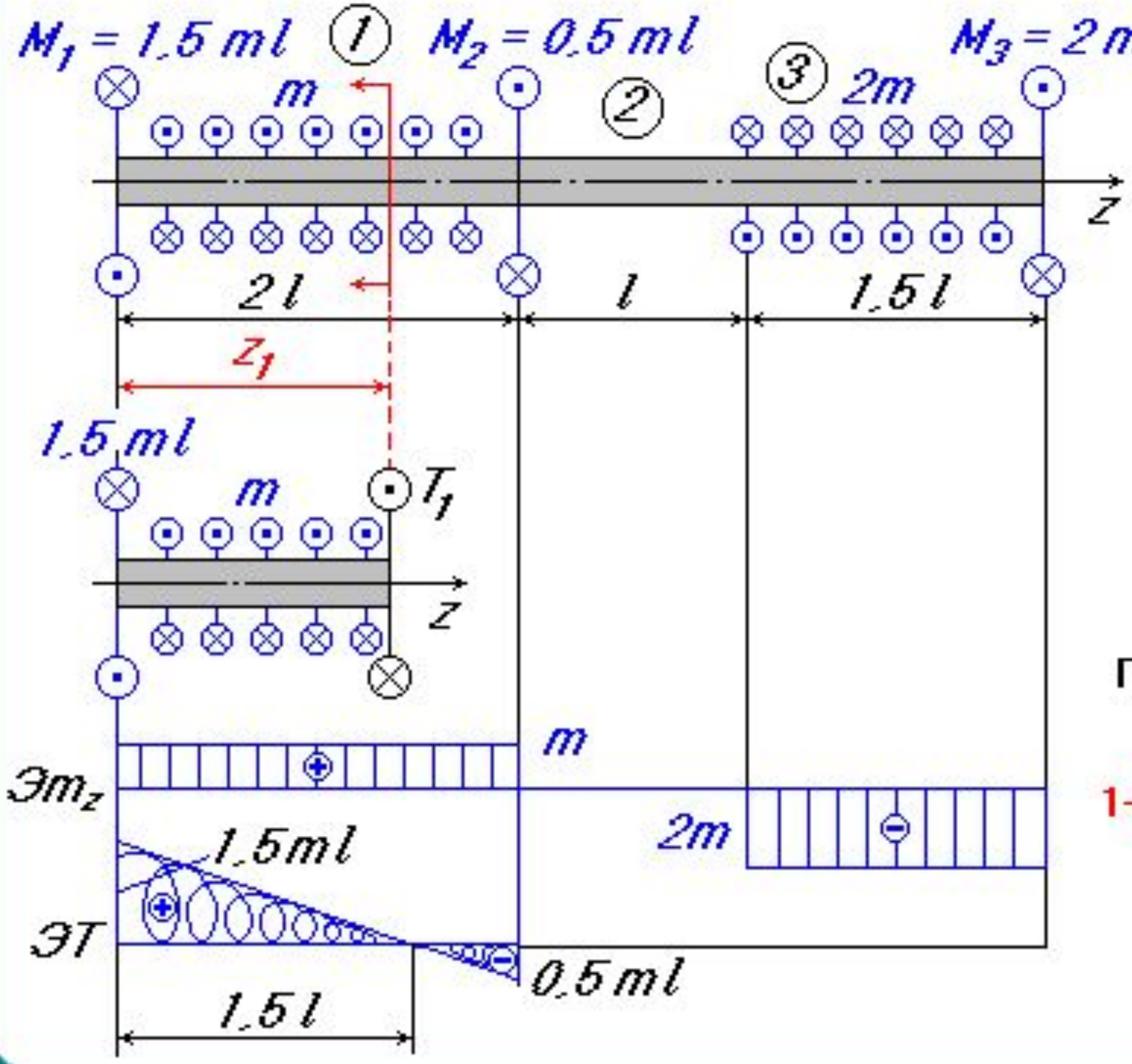
$$\Sigma M_z = T(z) - m_z\,dz - (T+dT) = 0; \qquad \frac{dT}{dz} = -m_z;$$

После интегрирования: $T(z) = T(0) - \int_0^z m_z\,dz$

Здесь $T(0)$ - постоянная интегрирования - значение крутящего момента в начале участка (при $z = 0$).

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Уравнение равновесия: $\Sigma M_z = 1{,}5ml - m \cdot 2l - 0{,}5ml + 2m \cdot 1{,}5l - 2ml = 0;$



Пример 2. Заданы скручивающие сосредоточенные моменты:

$M_1 = 1{,}5\,ml,$

$M_2 = 0{,}5\,ml,$

$M_3 = 2\,ml$

и распределенные моменты m и $2m$.

Построить $Эm_z$ и $ЭТ$.

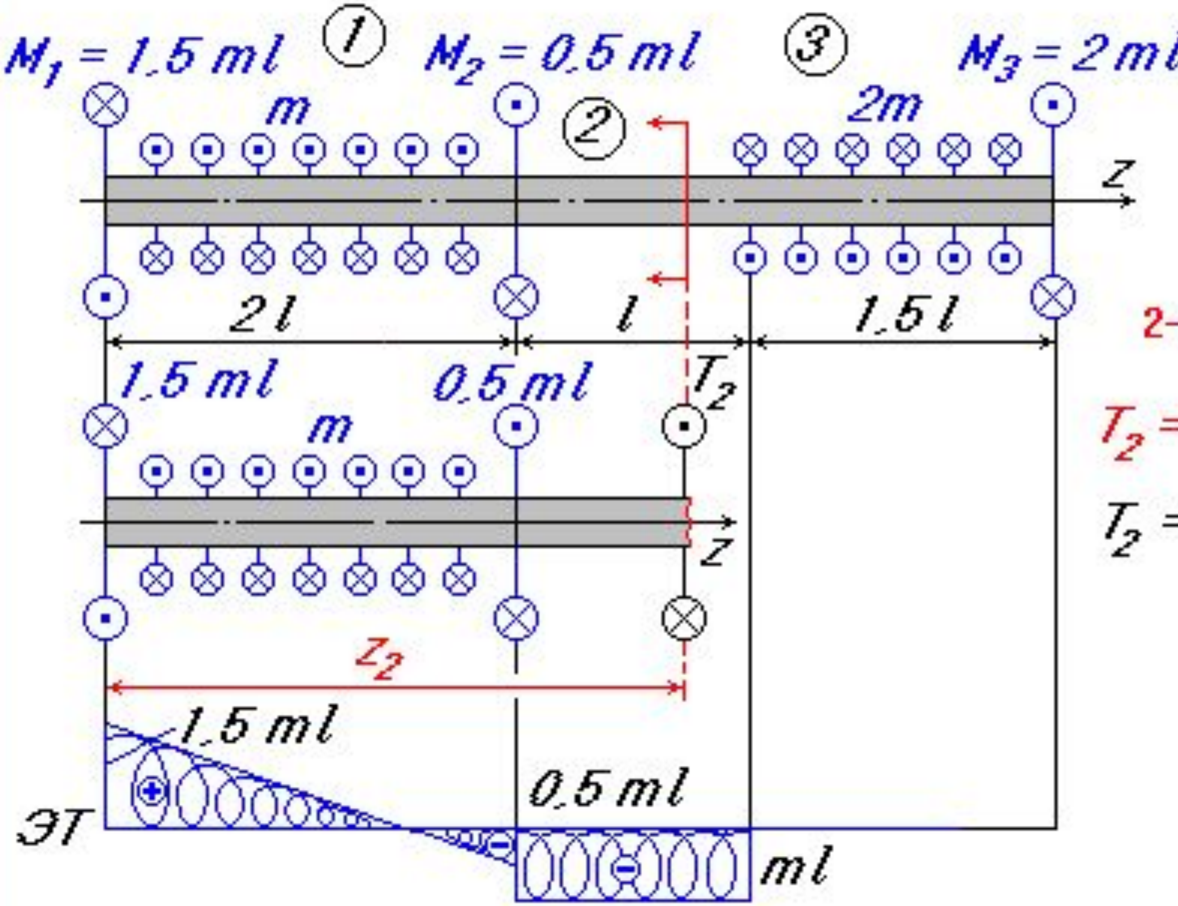
1-й участок $(0 < z_1 < 2l)$

$T_1 = 1{,}5\,ml - m \cdot z;$

$T(0) = 1{,}5\,ml;$

$T(2l) = -0{,}5\,ml.$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ (продолжение)



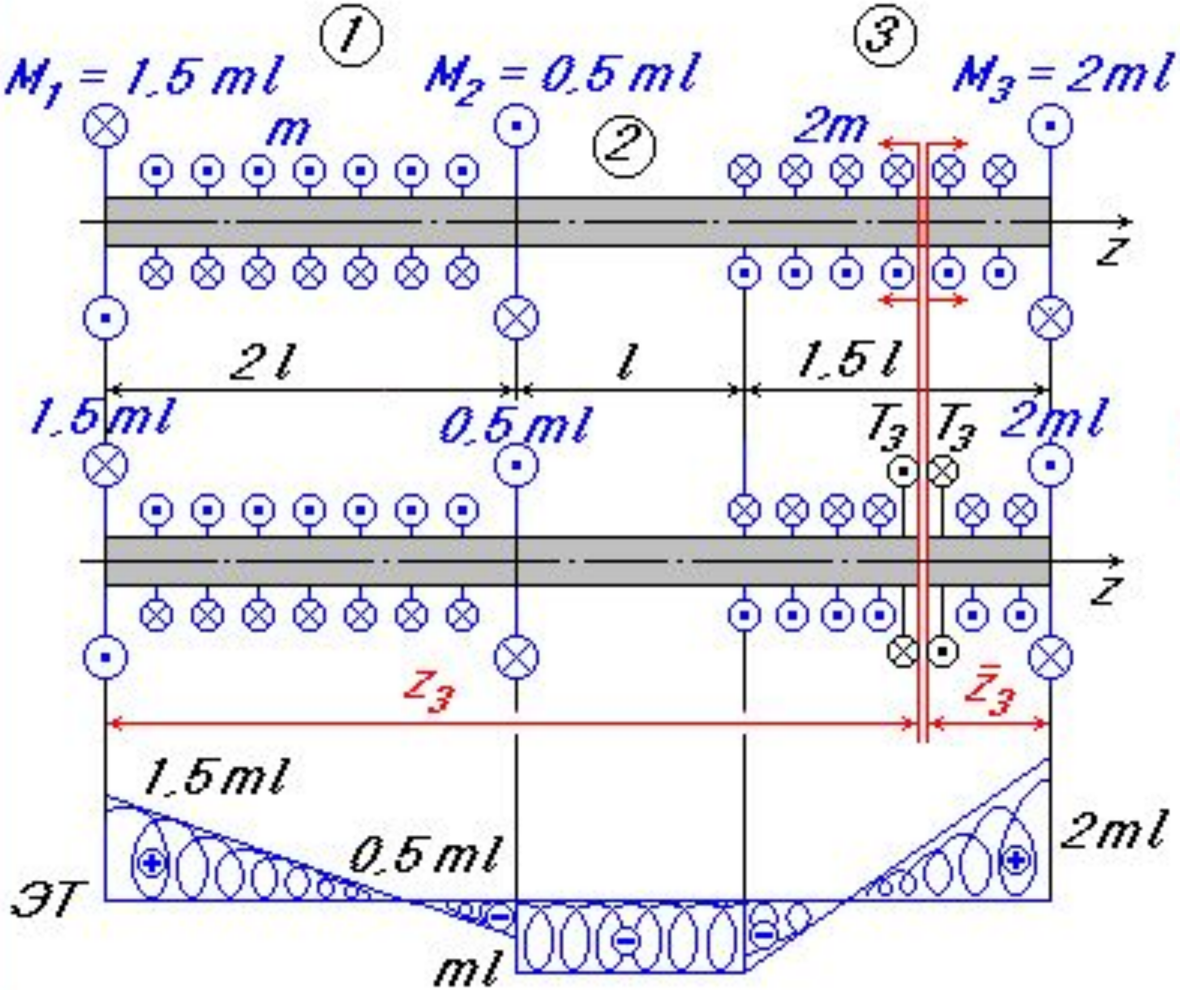
Пример 2.

2-й участок $(2l < z_2 < 3l)$

$T_2 = 1{,}5\,ml - m \cdot 2l - 0{,}5\,ml$

$T_2 = -ml = const.$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ (продолжение)



Пример 2.

3-й участок

$(3l < z_3 < 4,5l)$

$T_3 = 1,5ml - m\,2l -$

$- 0,5ml + 2m(z - 3l)$

$(0 < \bar{z}_3 < 1,5l)$

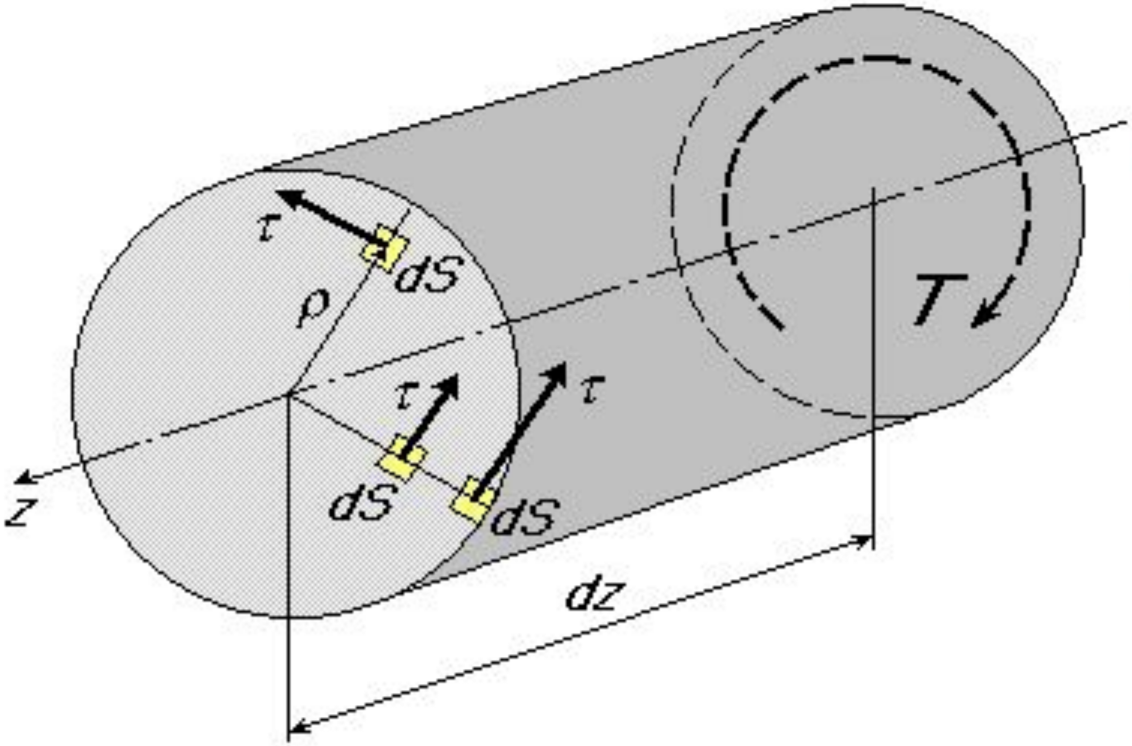
$T_3 = 2ml - 2m\,\bar{z}_3$

$T_3(0) = 2ml$

$T_3(1,5l) = -ml$

1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равновесие части стержня длиной dz



$\Sigma M_z = 0;$

$$T = \int_S \tau \rho \, dS \qquad (1)$$

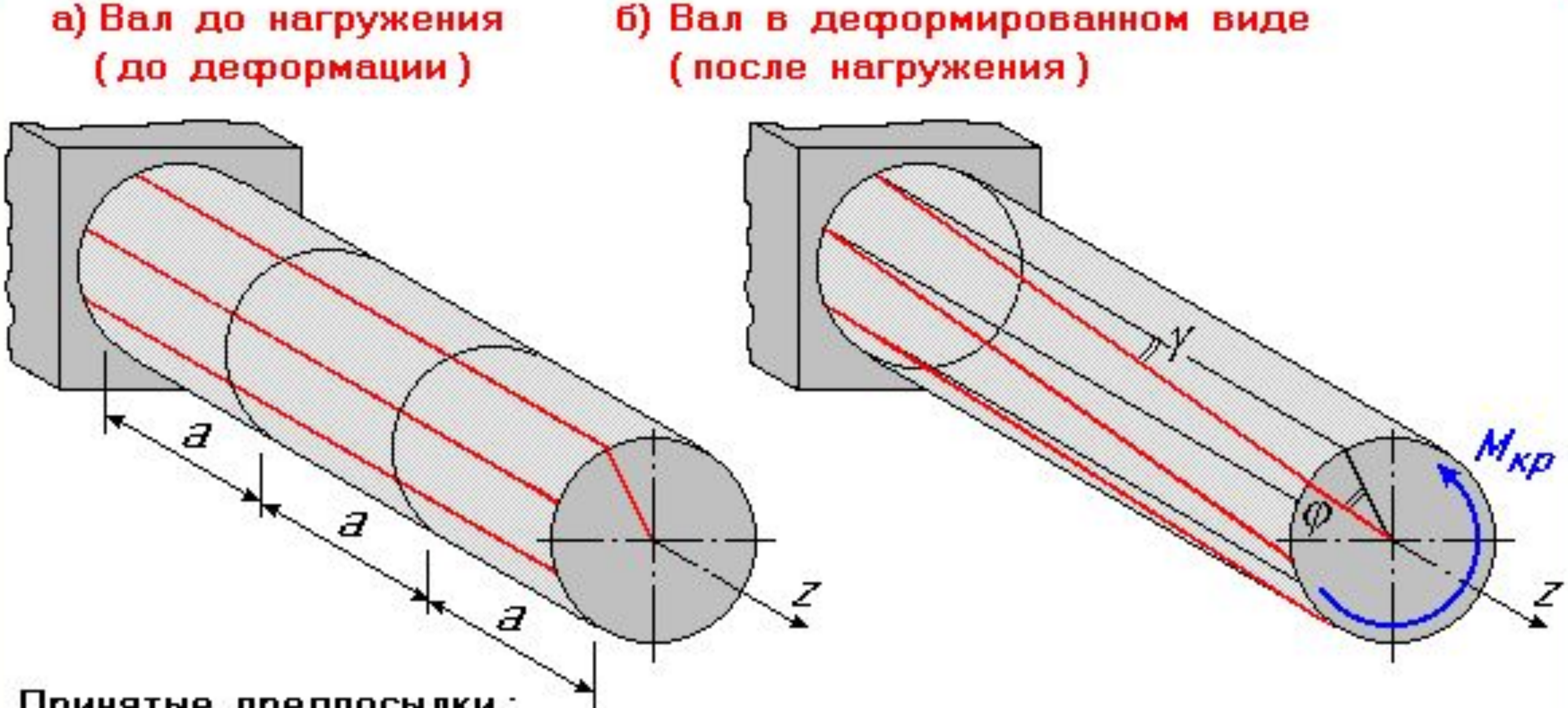
условия равновесия

T - крутящий момент;

ρ - расстояние от оси z вращения вала до площадки dS;

Из условия равновесия (1) нельзя найти $\tau = \tau(\rho)$, так как выражению (1) удовлетворяют разные законы изменения τ от ρ.

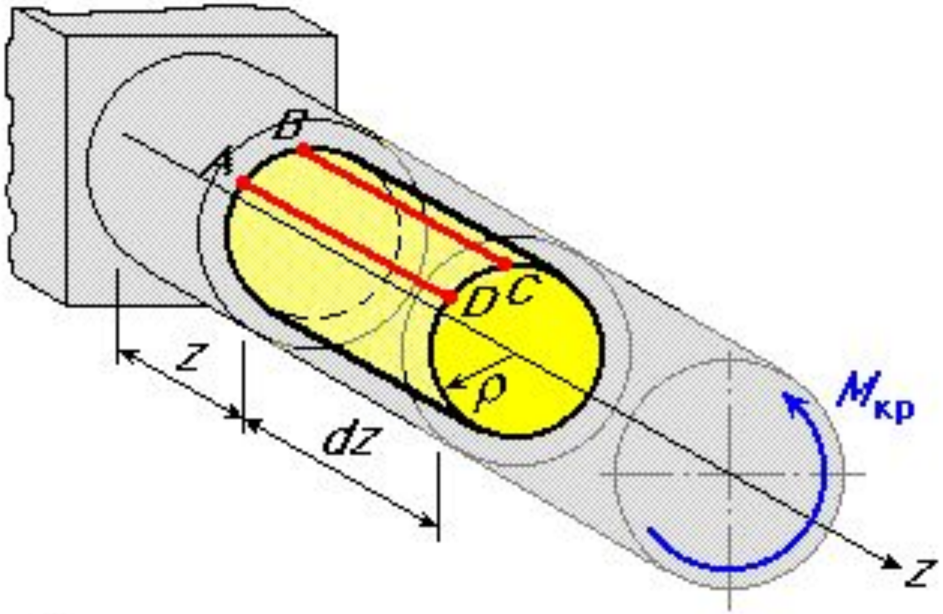
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

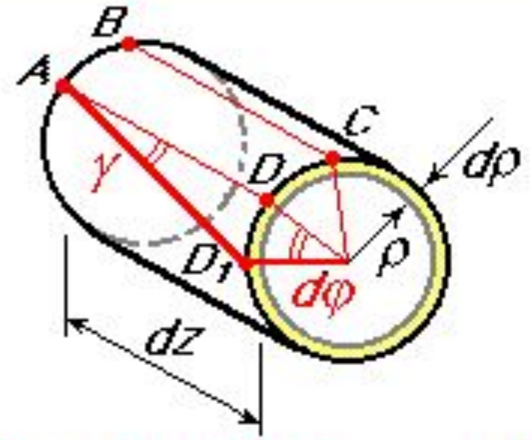


Принятые предпосылки:

1) Поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений - гипотеза Бернулли)
2) Радиусы в поперечных сечениях остаются прямыми и лежат в тех же плоскостях. Они поворачиваются на некоторый угол.
3) Расстояние между поперечными сечениями остаются неизменными и после деформации.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ (продолжение)





$DD_1 = \rho\, d\varphi = \gamma\, dz$ (2)

- условия совместности деформаций ;

$d\varphi$ - угол поворота правого торцевого сечения DC относительно левого сечения AB ;

γ - угол сдвига цилиндрической поверхности.

Из выражения (2) имеем $\gamma = \rho \dfrac{d\varphi}{dz}$ (2*)

Обозначим: $\theta = \dfrac{d\varphi}{dz}$ - относительный угол закручивания.

$\gamma = \rho\theta$ (2**)

3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Для решения статических уравнений используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости - закон Гука):

$\tau = G\gamma$ (3) - закон Гука при сдвиге.

Решаем систему уравнений (1) - (3) трех сторон задачи:

$\tau = \rho G\theta$ (4) Для сечения $G\theta = const$

$\tau = f(\rho)$ - линейная функция.

Выражение (4) в уравнение (1):

$$T = \int_S \tau\rho\, dS = \int_S \rho G\theta\rho\, dS = G\theta\int_S \rho^2 dS$$

Обозначим: $I_\rho = \int_S \rho^2 dS$ - полярный момент инерции сечения.

$T = GI_\rho\theta$ или $\theta = \dfrac{T}{GI_\rho}$ $\left[\dfrac{рад}{м}\right]$ (5)

GI_ρ - жесткость сечения вала при кручении.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СЕЧЕНИЮ ПРИ КРУЧЕНИИ

Выражение (5) в выражение (4)

$$\tau = \rho G \theta = \rho G \frac{T}{G I_\rho};$$

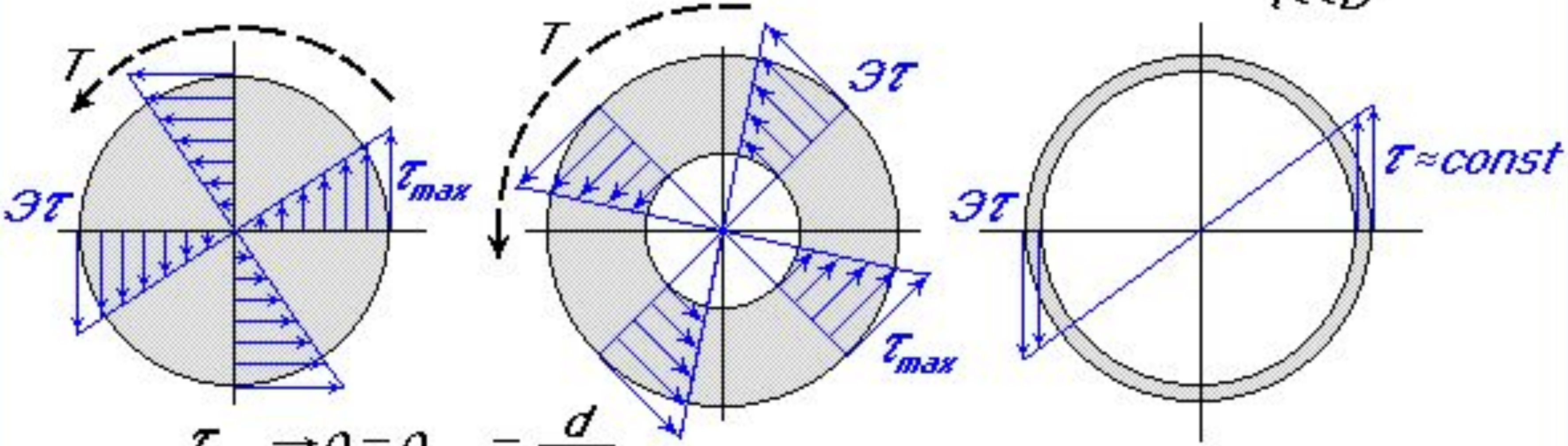
$$\boxed{\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho} \quad \text{(II)}$$

а) сплошное круглое сечение

б) кольцевое сечение

в) тонкостенное кольцевое сечение (тонкостенная трубка)

$t << D$



$$\tau_{max} \rightarrow \rho = \rho_{max} = \frac{d}{2}$$

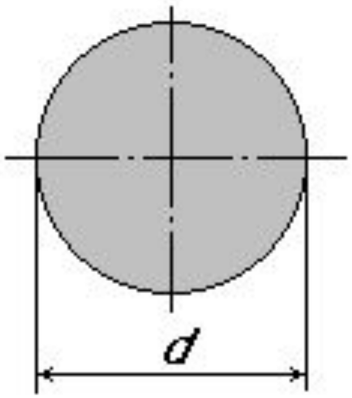
$$\tau_{max} = \frac{T}{I_\rho} \rho_{max}; \quad W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{max}}$$

- полярный момент сопротивления при кручении круглого поперечного сечения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯРНОГО МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения при кручении.

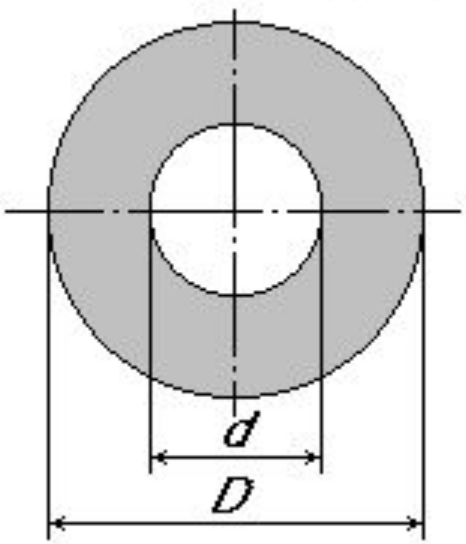
а) сплошное круглое сечение



$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}};\quad I_p = \frac{\pi d^4}{32};\quad \rho_{max} = \frac{d}{2};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

б) кольцевое сечение



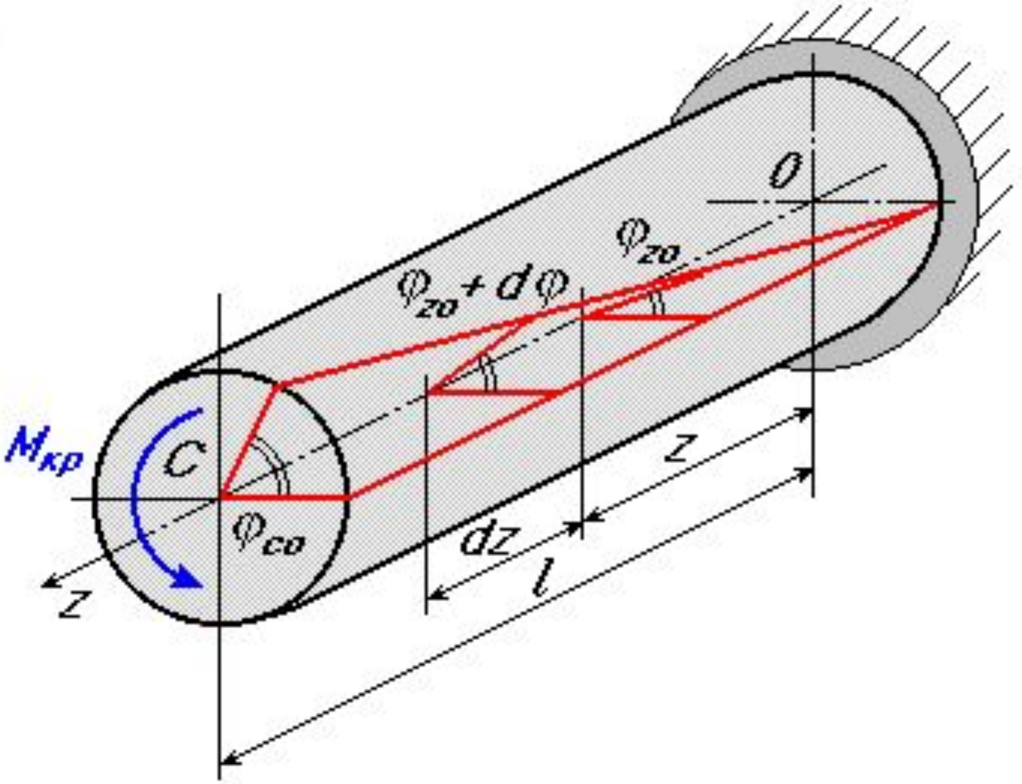
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - c^4\right)$$

$$c = \frac{d}{D};\quad \rho_{max} = \frac{D}{2};$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - c^4\right);$$

$$\cancel{W_p = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ



$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_p};$$

$$d\varphi = \frac{T\,dz}{GI_p};$$

$$\varphi_{zo} = \int_0^z \frac{T\,dz}{GI_p};$$

$$\varphi_{co} = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{T\,dz}{GI_p};$$

Для постоянного сечения с постоянным крутящим моментом:

$$\varphi_{zo} = \frac{Tz}{GI_p}; \qquad \varphi_{co} = \frac{Tl}{GI_p}.$$

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Вал круглого поперечного сечения.

а) Условия прочности:

$max\,\tau < [\,\tau\,]\,;\qquad [\,\tau\,] = \dfrac{\bar{\tau}}{[\,n\,]}\,;$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau_T \text{ - пластичный материал;} \\ \tau_B \text{ - хрупкий материал;} \end{cases}$$

$$max\,\tau = \frac{T_{max}}{W_p} \leqslant [\,\tau\,]\,.$$

Порядок расчета:

1. *Выбор опасного сечения — ЭТ*
2. *Выбор опасной точки в сечении — Эτ*
3. *Материал вала*
4. *Условия прочности*

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ
(продолжение)

б) Условия жесткости:

1) $max\,\theta = \dfrac{T_{max}}{G\,I_p} \leqslant [\,\theta\,]$;

2) $max\,\varphi = [\,\varphi\,]$;

Здесь: $[\,\theta\,]$ и $[\,\varphi\,]$ - допустимые углы закручивания (относительный и абсолютный);

Порядок расчета:

1. Построение эпюры крутящих моментов (ЭТ)

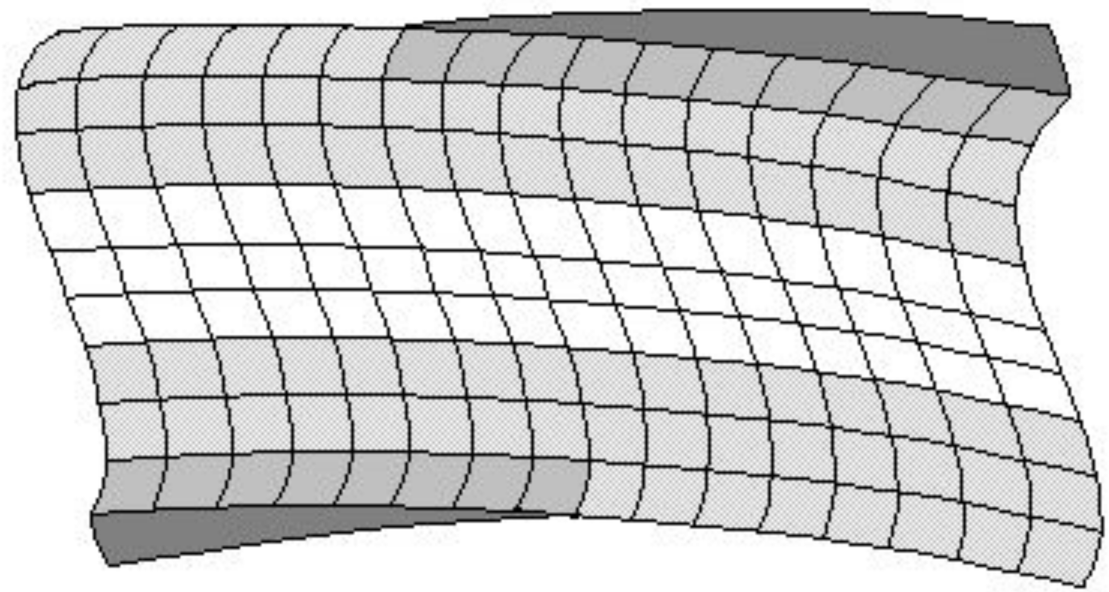
2. Выбор опасного относительного угла закручивания Эθ

3. Выбор наибольшего угла закручивания Эφ

4. Условия жесткости по $max\,\theta$ и $max\,\varphi$.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ (ВАЛА) С НЕКРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Задача об определении напряжений в стержне не может быть решена методами сопротивления материалов. Гипотеза плоских сечений не применима.



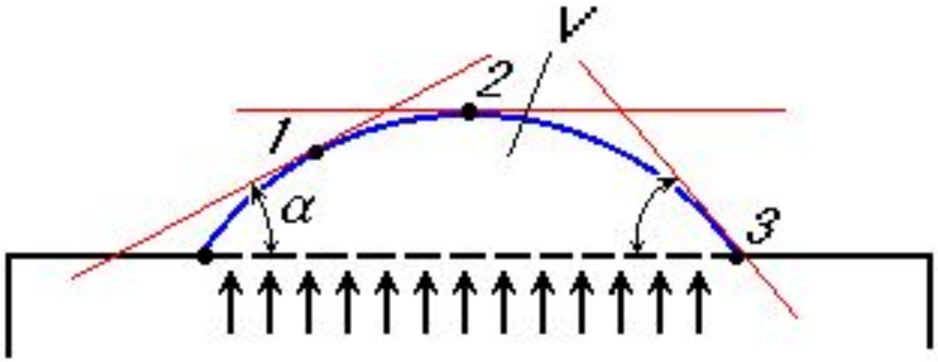
Сечения стержня заметно искривляются.
Общие соображения относительно распределения τ и приведены готовые формулы.

ПОНЯТИЕ О МЕМБРАННОЙ (ПЛЕНОЧНОЙ) АНАЛОГИИ

В задачах механики совершенно различные по физической сущности задачи сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Задача о кручении стержня любого поперечного сечения сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру того же очертания и нагруженного равномерно распределенным давлением.

а) направление τ в какой-либо точке сечения стержня совпадает с касательной к горизонтали изогнутой поверхности пленки;

ПОНЯТИЕ О МЕМБРАННОЙ (ПЛЕНОЧНОЙ) АНАЛОГИИ
(продолжение)

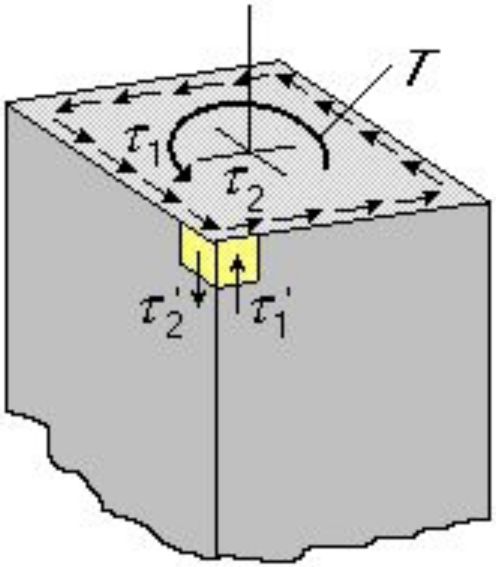


б) величина $\tau \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha$ в точке поперечного сечения пропорционально тангенсу угла между линией наибольшего ската в соответствующей точке и плоскостью сечения.

в) аналогом крутящего момента T является объем, заключенный между поверхностью пленки и плоскосью контура сечения.

$$T \Rightarrow V$$

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



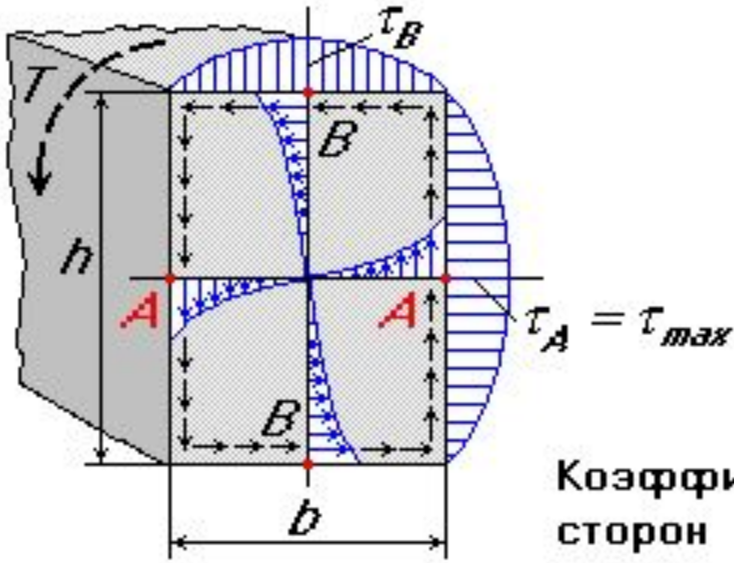
$$\tau_1 = \tau_1' = 0;$$

$$\tau_2 = \tau_2' = 0.$$

Касательные напряжения вблизи внешнего угла в поперечном сечении отсутствуют.

Касательные напряжения τ вблизи контура направлены по касательной к контуру.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ (продолжение)



$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{T}{\alpha h b^2};$$

$$\tau_B = \eta\, \tau_{max};$$

h - большая, b - малая стороны прямоугольника;

$$\theta = \frac{T}{G\beta h b^3}; \quad \varphi = \frac{Tl}{G\beta h b^3}$$

Коэффициенты α, β и η зависят от отношения сторон h/b и числовые значения приведены в таблице.

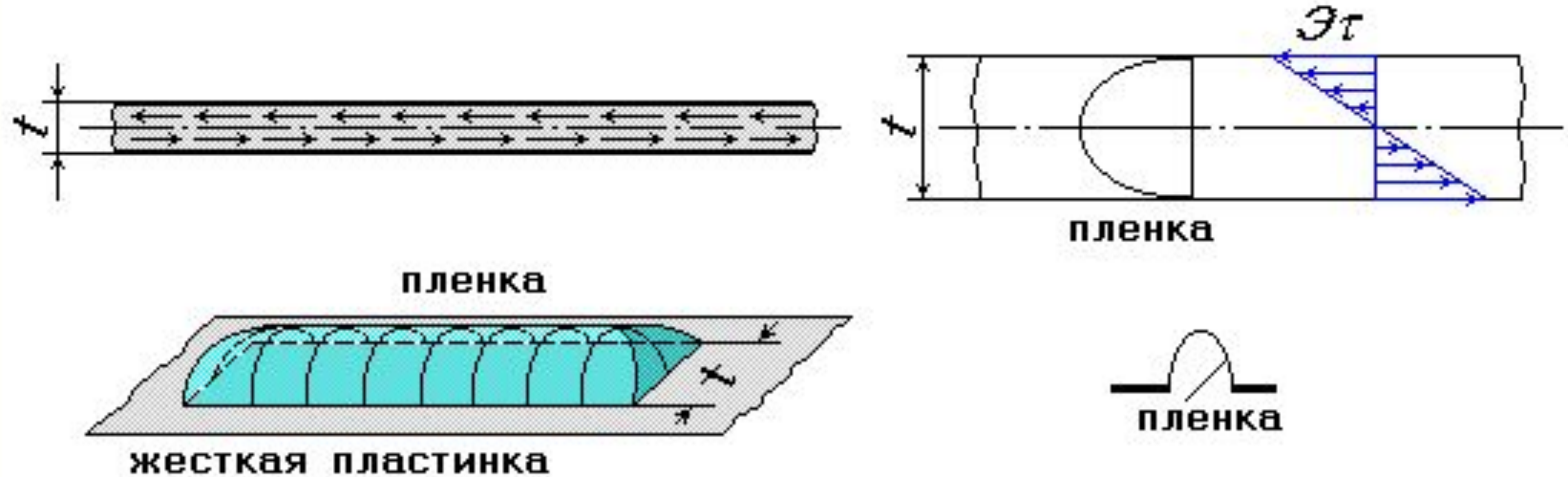
h/b	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	10	∞
α	0,208	0,231	0.246	0,258	0,267	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0.229	0,249	0,263	0,313	0,333
η	1.000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,742	0,742

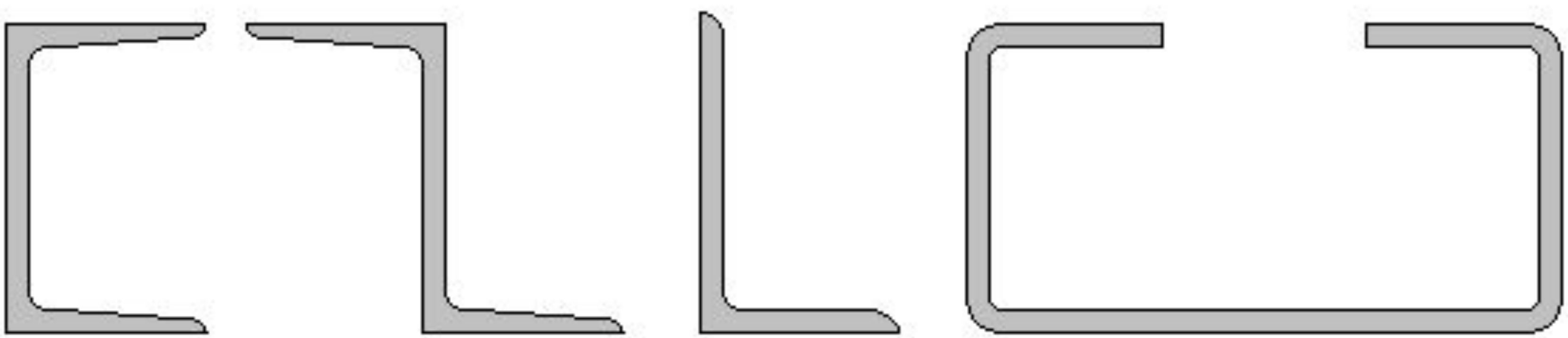
$W_k = \alpha h b^2$ - геометрический фактор прочности;

$I_k = \beta h b^3$ - геометрический фактор жесткости.

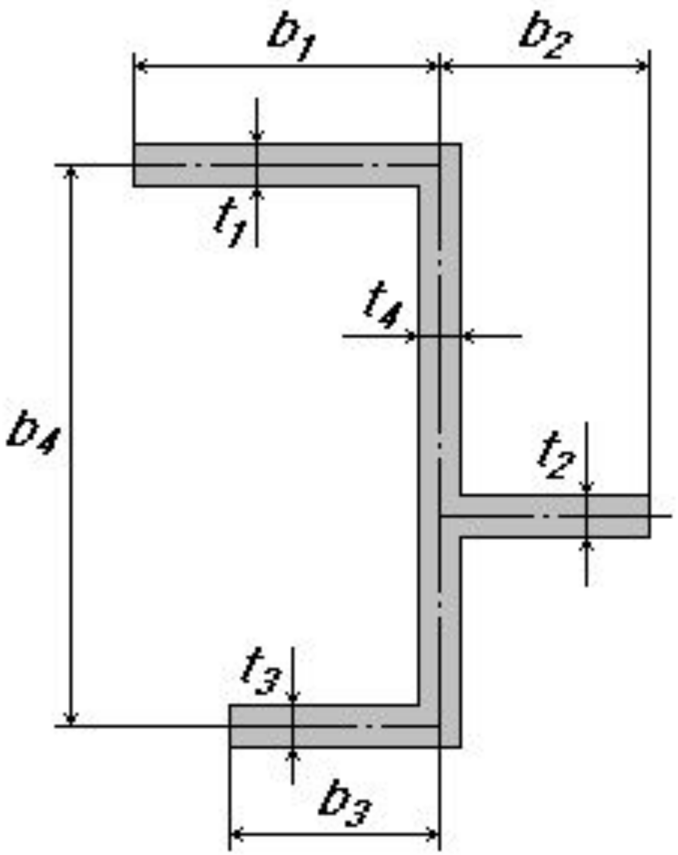
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Типичные формы профилей





КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ (продолжение)



$$\tau_{max} = \frac{T \cdot t_{max}}{I_k}; \qquad \theta = \frac{T}{G \cdot I_k};$$

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_k}; \qquad I_k = \frac{1}{3}\eta \sum_{i=1}^{n} b_i t_i^3;$$

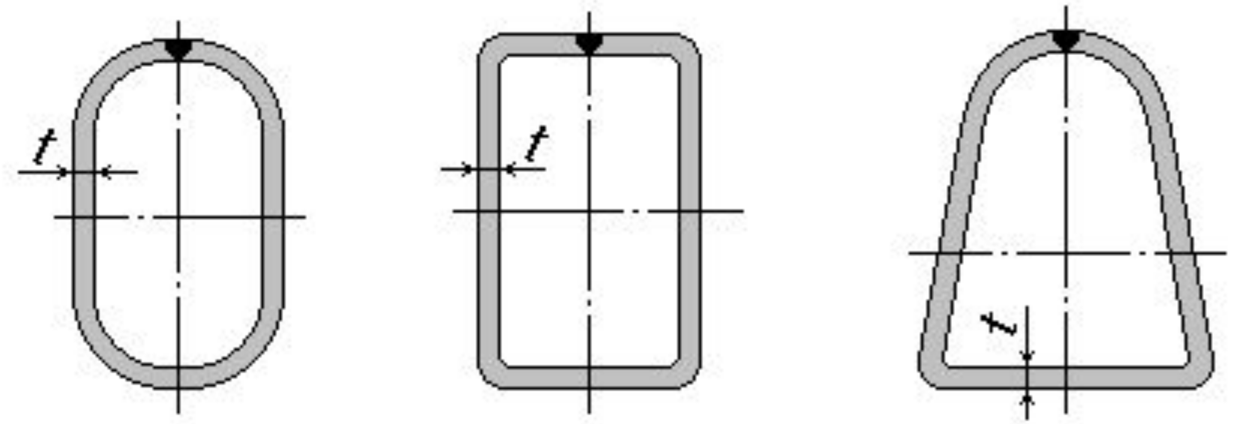
I_k - геометрический фактор жесткости при кручении открытого профиля;

η - коэффициент, учитывающий места перехода сечений.

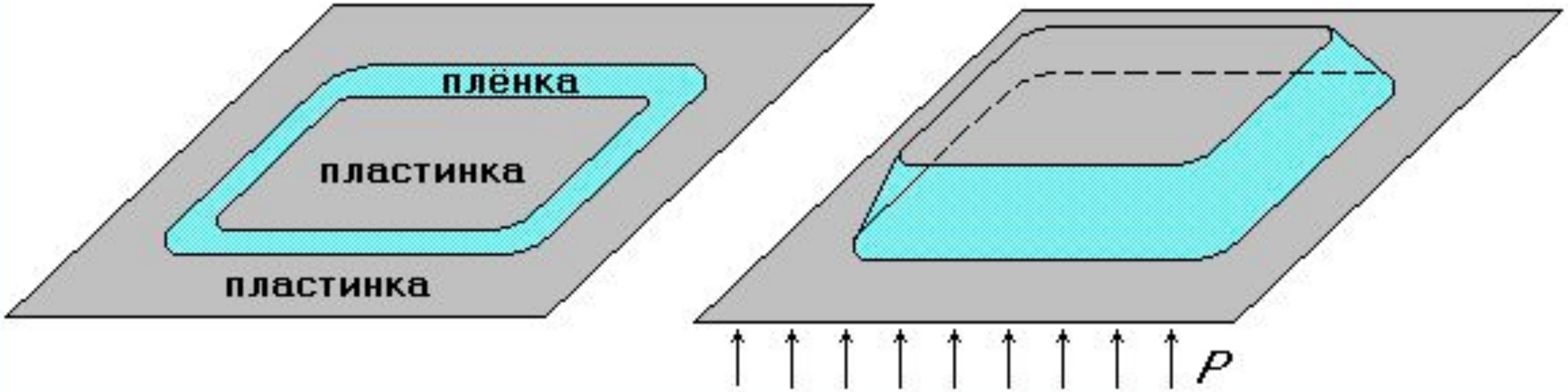
$\eta = 1{,}05...1{,}20;$ обычно $\eta \approx 1{,}0$

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Типичные формы профиля



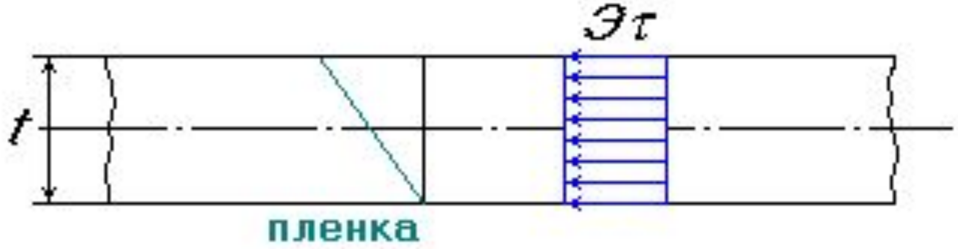
Плёночная аналогия



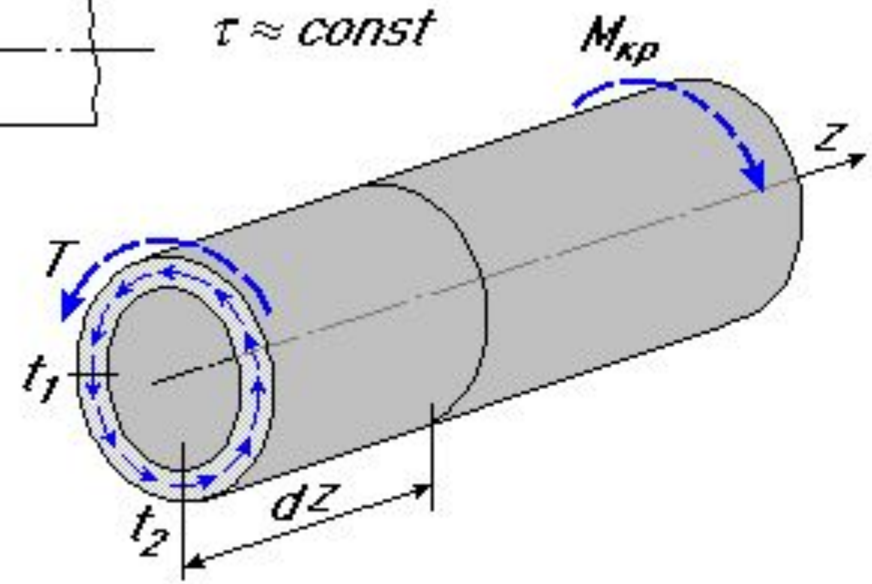
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ (продолжение)

$V \Longrightarrow T$

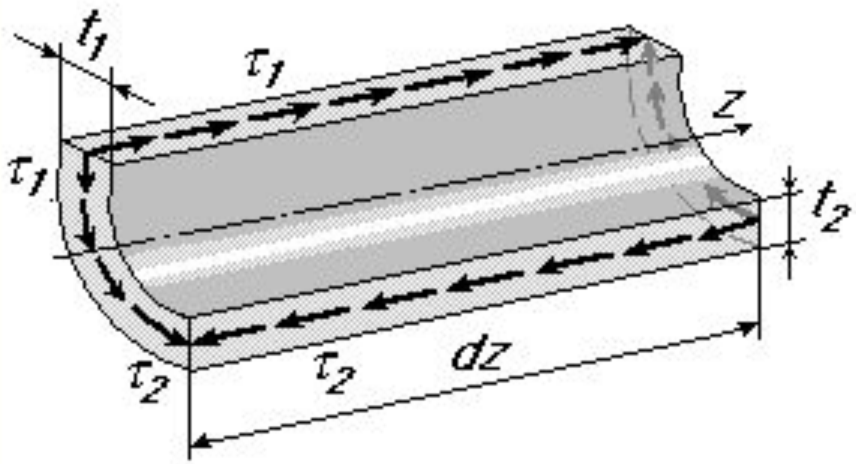
$\mathrm{tg}\,\alpha \Longrightarrow \tau$



$\tau \approx const$



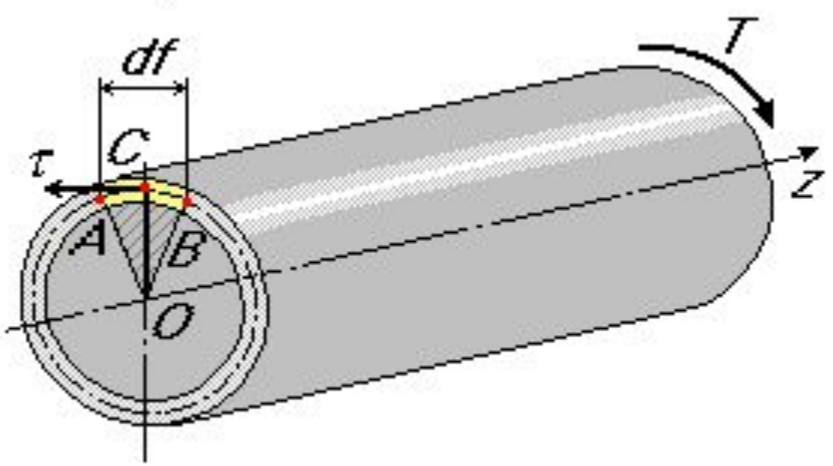
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ (продолжение)



$$\Sigma F_{z\text{-}z} = \tau_1 \cdot t_1 \cdot dz - \tau_2 \cdot t_2 \cdot dz = 0;$$

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_i \cdot t_i = \tau \cdot t = const;$$

$$\tau_{max} \cdot \delta_{min} = \tau_{min} \cdot \delta_{max} = const;$$



$$dS = AB \cdot \delta = \delta \cdot df; \quad AB \cdot OC = 2S_{\Delta OAB};$$

$$T = \int_S \tau \cdot dS \cdot OC = \int_f \tau \cdot \delta \cdot OC\, df =$$

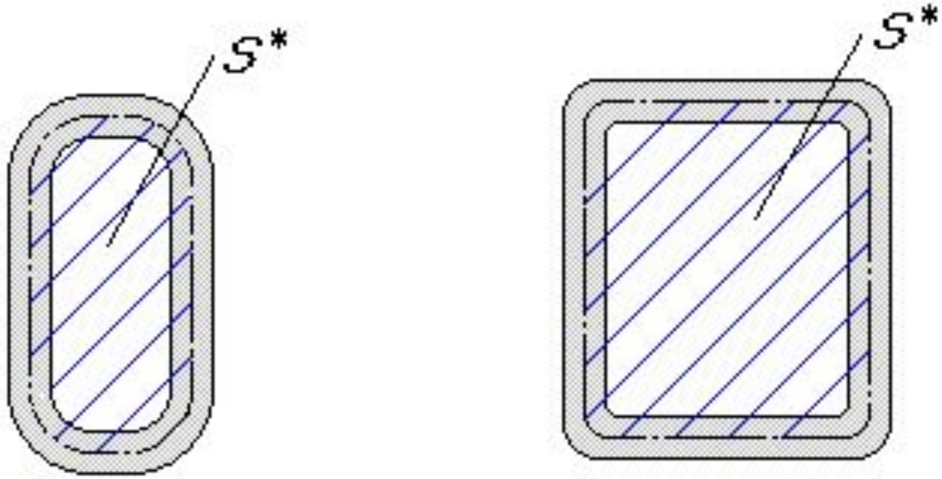
$$= \tau \cdot \delta \int_f OC\, df = \tau \cdot \delta \cdot 2S^*;$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{\delta_{min}\, 2S^*} .$$

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ (продолжение)

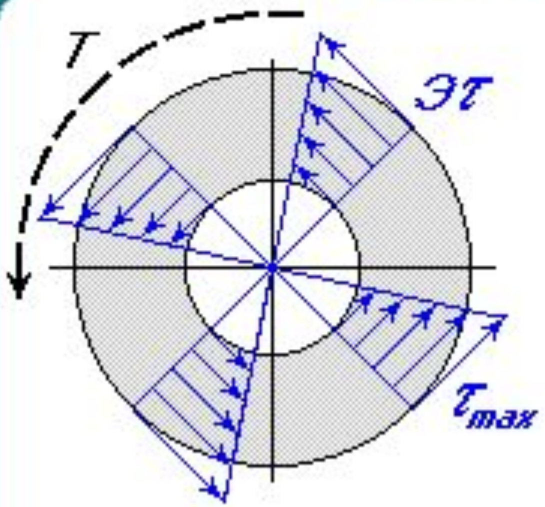
Здесь: f - периметр поперечного сечения (длина средней линии);

S^* - площадь, ограниченная средней линией профиля.



$$\theta = \frac{T \cdot f}{4G(S^*)^2 t};$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ (ВАЛА) ПРИ КРУЧЕНИИ



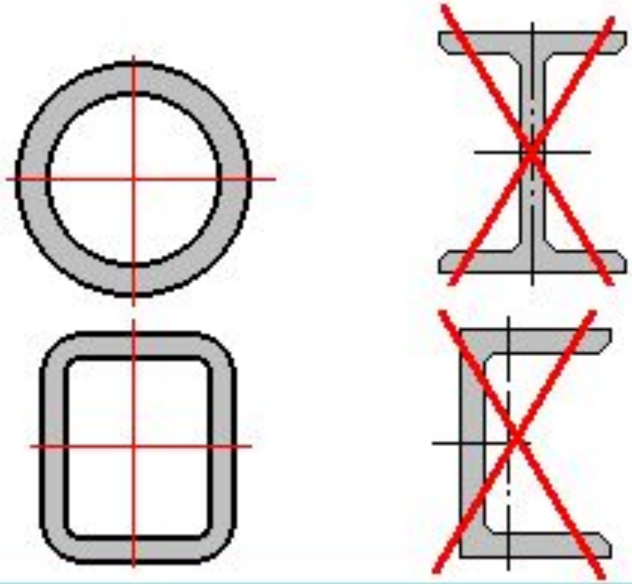
Условия прочности:

$$\max \tau < [\tau] ; \qquad \tau_{max} = \frac{T}{W_к}$$

Для круглого поперечного сечения :

$$W_к \Longrightarrow W_р$$

$$\omega_к = \sqrt{\frac{W_к^2}{S^3}}$$



Тип сечения	$\omega_к$
Швеллер , двутавр	0,04... 0,07
Прямоугольник $h/b=10$	0,1
Квадрат	0,21
Круглое сечение	0,28
Кольцевое сечение :	
$c = d / D = 0,5$	0,37
$c = 0,9$	1,16

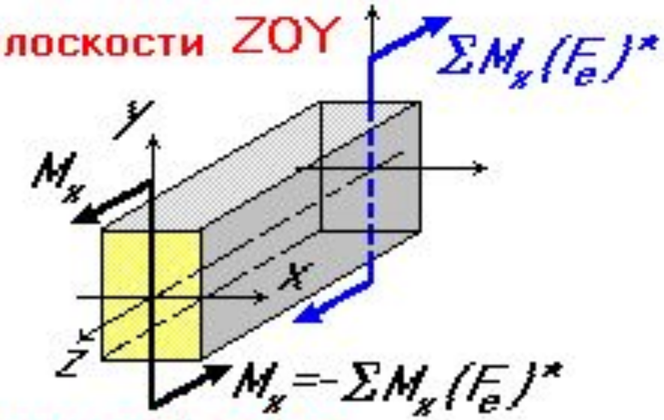
ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Изгиб - вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x и M_y ($N=0,\ T=0$)

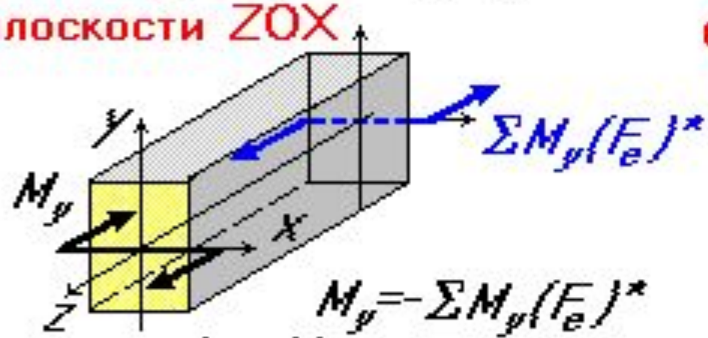
Классификация видов изгиба:

1. Чистый изгиб

а) в плоскости ZOY

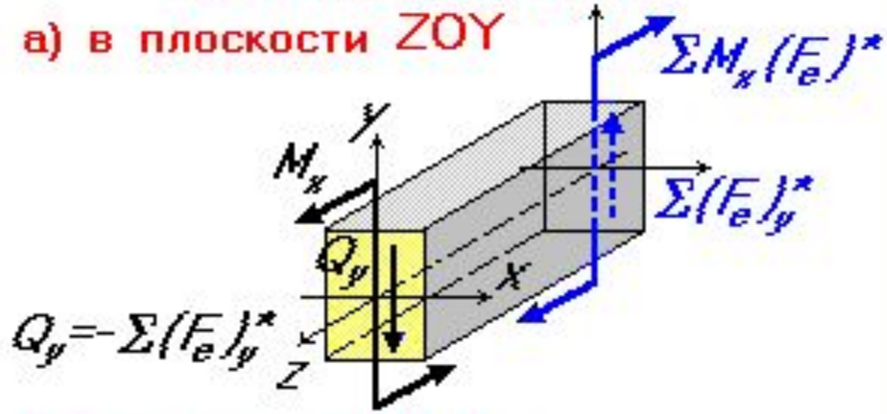


б) в плоскости ZOX

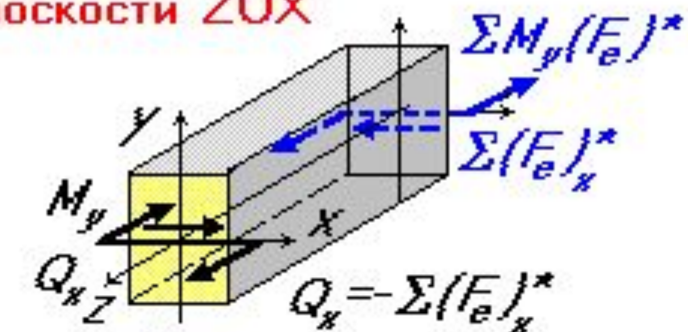


2. Поперечный изгиб

а) в плоскости ZOY

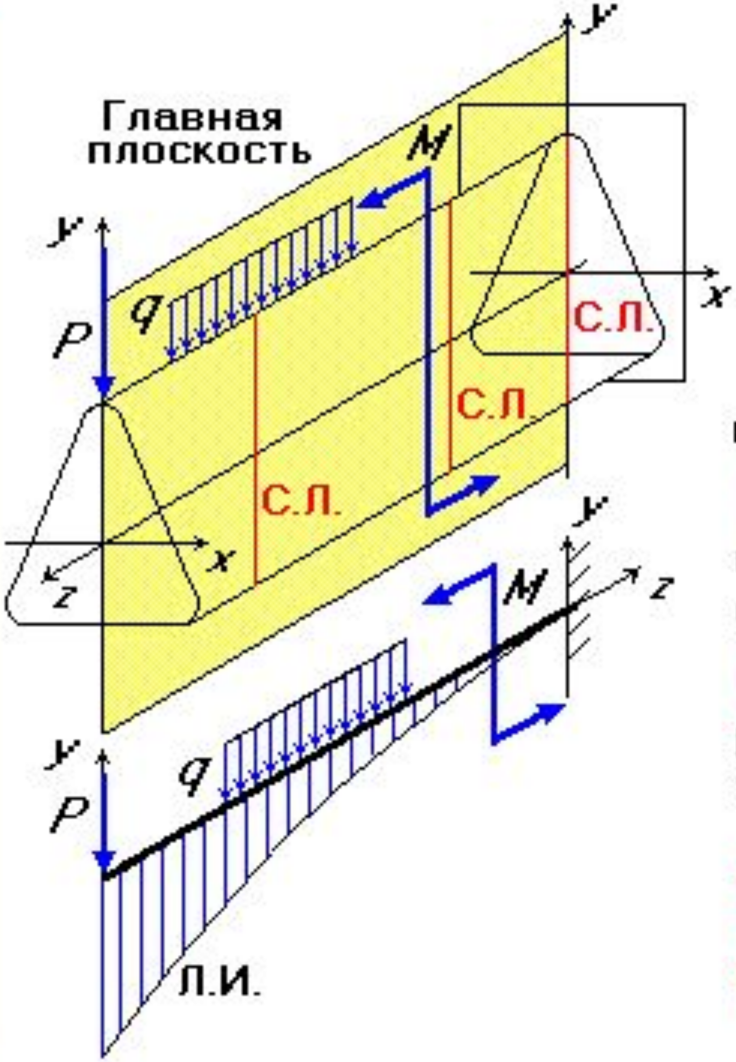


б) в плоскости ZOX



Здесь символ $(F_e)^*$ -обозначает внешние силы, действующие на отсеченную часть.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗГИБА



Плоский, прямой и косой изгибы.

Если все нагрузки и реакции связей действуют в одной плоскости, являющейся главной плоскостью стержня, то изгиб называется **плоским**.

Балка - это прямой стержень, работающий при плоском изгибе.

Силовая линия (С.Л.) - след пересечения плоскости действия В.С.Ф. (M и Q) с плоскостью поперечного сечения.

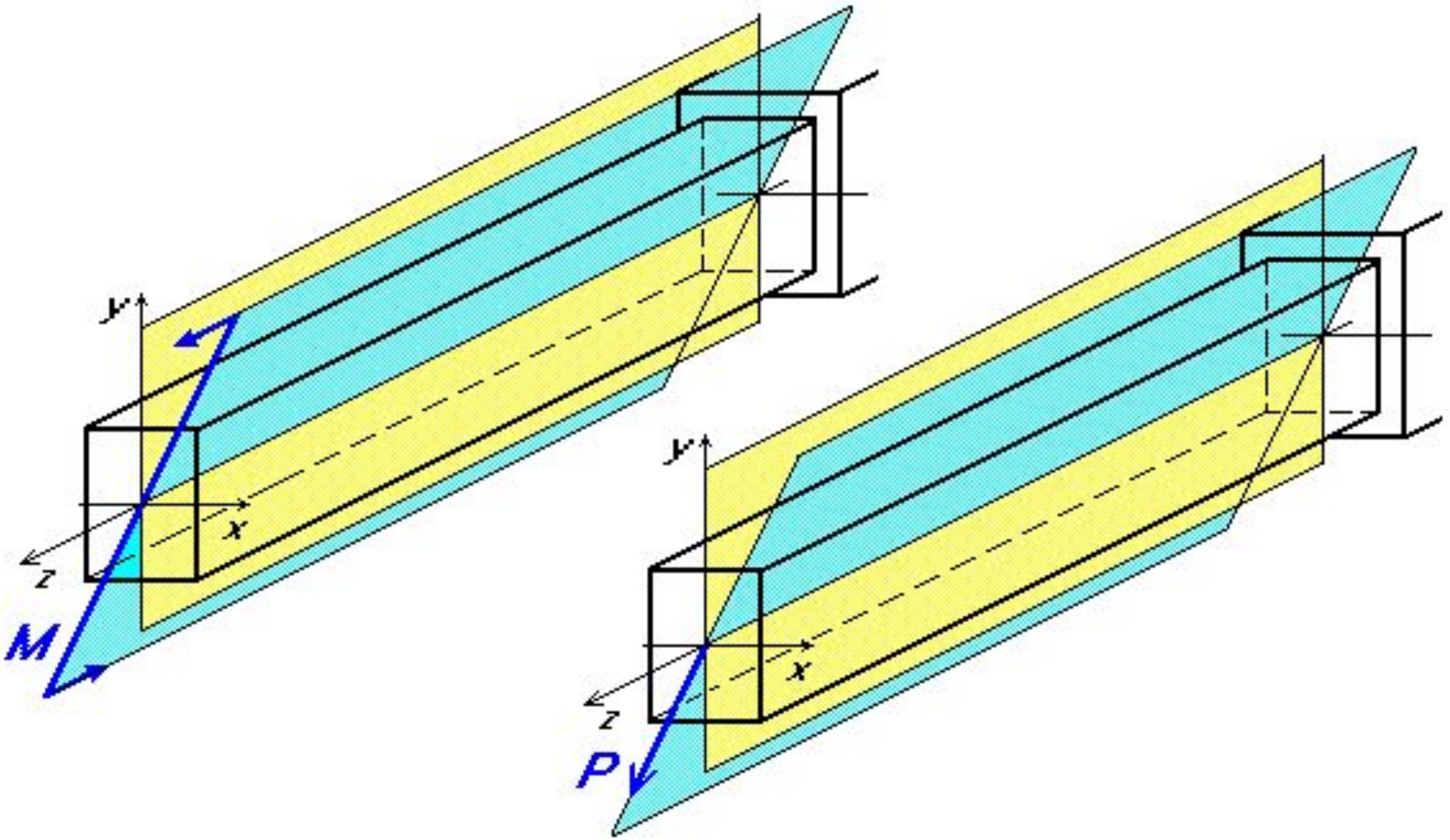
Линия изгиба (Л.И.) - направление перемещения при изгибе точки центра тяжести сечения.

Прямой изгиб - С.Л. и Л.И. совпадают.

Косой изгиб - С.Л. и Л.И. не совпадают.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗГИБА (продолжение)

Примеры косого изгиба :



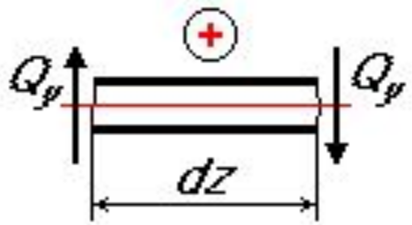
ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ (ВСФ) В БАЛКЕ

Расчетная схема балки изображается линией, представляющей собой ось стержня.

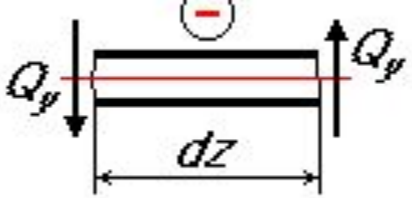
Для наглядного представления характера изменения ВСФ по длине балки строят эпюры .

ПРАВИЛА ЗНАКОВ:

а) для поперечной силы

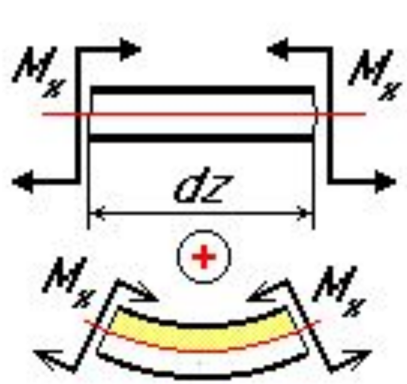


Поворот элемента dz по часовой стрелки

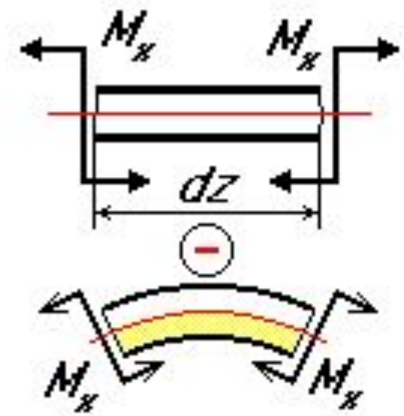


Поворот элемента dz против часовой стрелки

б) для изгибающего момента ;

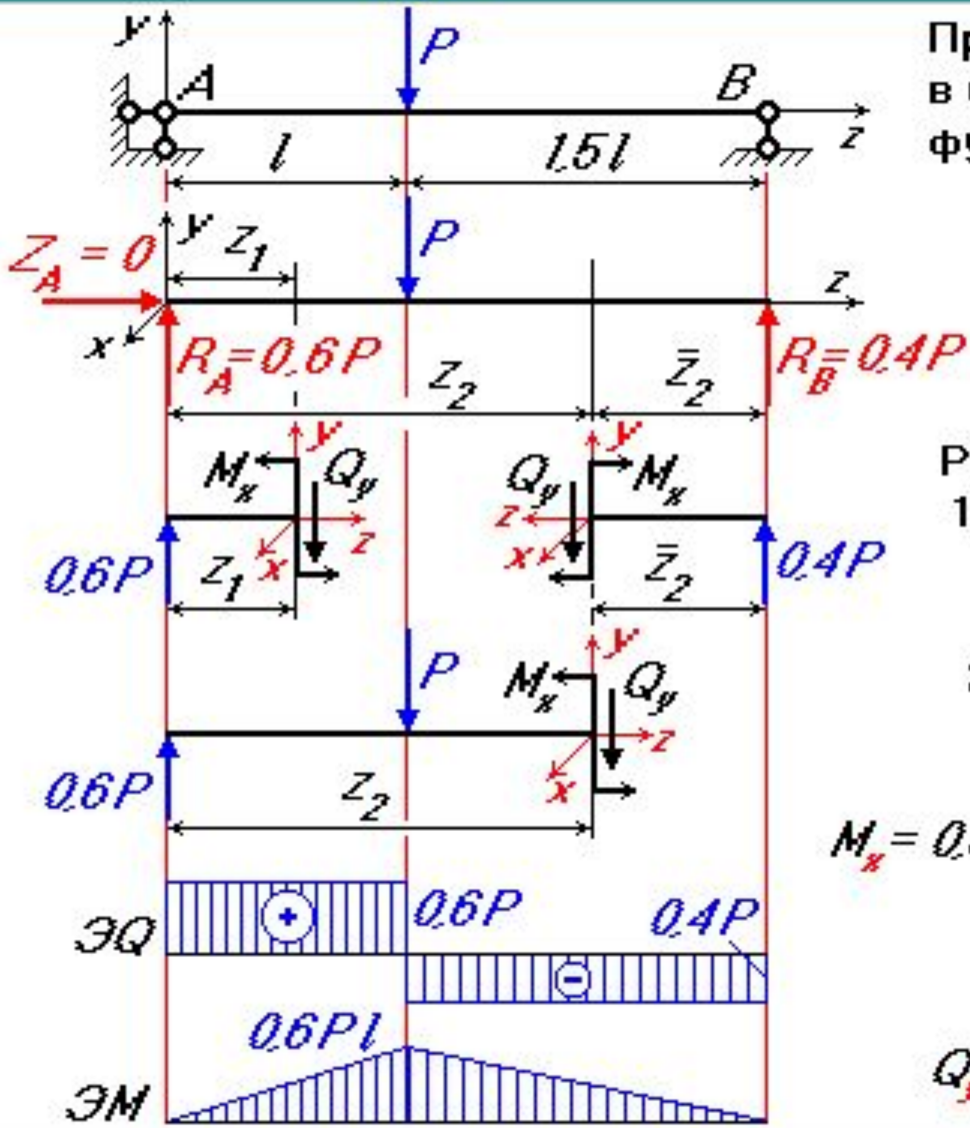


Сжатые верхние волокна



Сжатые нижние волокна

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ БАЛКИ



Пример 1. Построить эпюры ВСФ в балке путем определения функций $Q_y = Q_y(z)$ и $M_x = M_x(z)$.

$$\Sigma M_A = P \cdot l - R_B \cdot 2{,}5\,l = 0;$$

$$\Sigma M_B = P \cdot 1{,}5\,l - R_A \cdot 2{,}5\,l = 0;$$

$$R_B = 0{,}4\,P; \quad R_A = 0{,}6\,P.$$

Разобьем балку на два участка:

1-й участок $(0 < z_1 < l)$

$$Q_y = 0{,}6P; \qquad M_x = 0{,}6P \cdot z_1;$$

2-й участок $(l < z_2 < 2{,}5\,l)$

$$Q_y = 0{,}6P - P = -0{,}4\,P;$$

$$M_x = 0{,}6P \cdot z_2 - P\,(z_2 - l) = P\,l - 0{,}4\,P \cdot z_2;$$

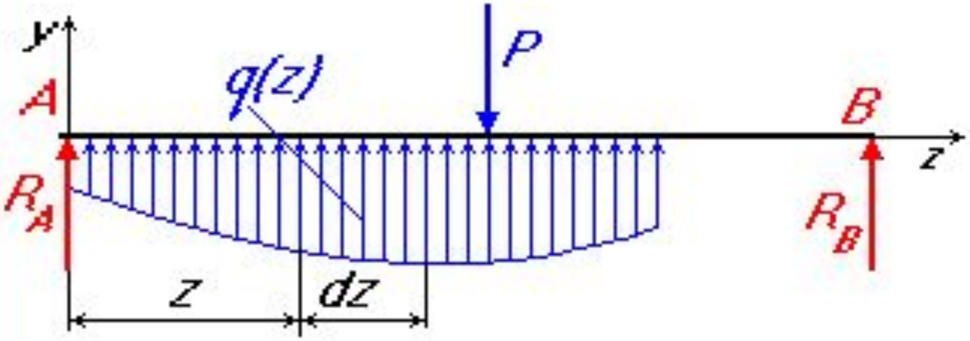
$$(0 < \bar{z}_2 < 1{,}5\,l)$$

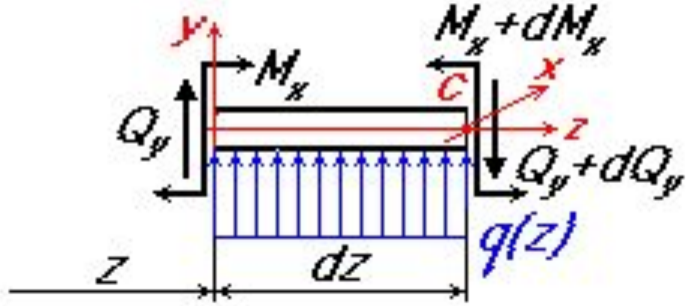
$$Q_y = -0{,}4P; \quad M_x = 0{,}4\,P \cdot \bar{z}_2;$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВСФ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Зависимости для прямого стержня (балки).

Балка находится в равновесии под действием системы внешних сил (активных и реактивных).





$q(z)$, Q_y и M_x - положительные.

Условия равновесия для выделенного элемента dz:

$$\Sigma Y = Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0; \quad \Sigma M_{xC} = M_x + Q \cdot dz + q \cdot dz \, \frac{1}{2} \, dz - (M_x + dM_x) = 0;$$

Дифференциальные зависимости:

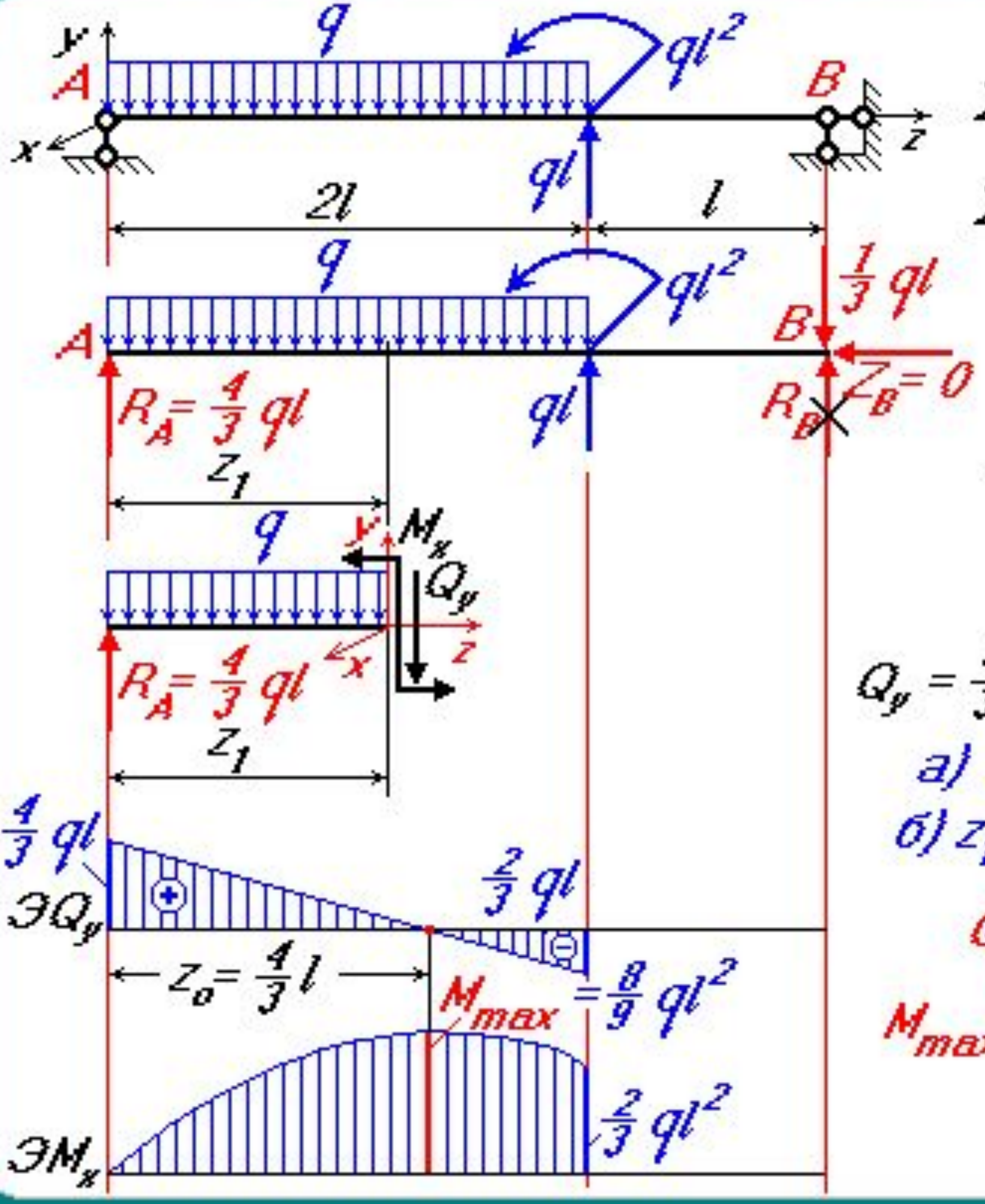
$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2};$$

Интегральные зависимости:

$$Q(z) = Q(0) + \int_0^z q\,dz; \quad M(z) = M(0) + \int_0^z Q\,dz;$$

Здесь $Q(0)$ и $M(0)$ - постоянные интегрирования- поперечная сила и изгибающий момент в начале участка (при $z = 0$)

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ



$\Sigma M_A = q\cdot 2l\cdot l - ql^2 - ql\cdot 2l - R_B 3l = 0;$

$\Sigma M_B = R_A 3l - q\cdot 2l\cdot 2l - ql^2 + ql\cdot l = 0;$

$R_B = -\frac{1}{3}ql; \quad R_A = \frac{4}{3}ql;$

Проверка:

$\Sigma Y = \frac{4}{3}ql - q\,2l + ql - \frac{1}{3}ql = 0;$

1-ый участок:

$(0 < z_1 < 2l)$

$Q_y = \frac{4}{3}ql - q\cdot z_1; \quad M_x = \frac{4}{3}ql\cdot z_1 - q\,z_1\cdot\frac{1}{2}z_1;$

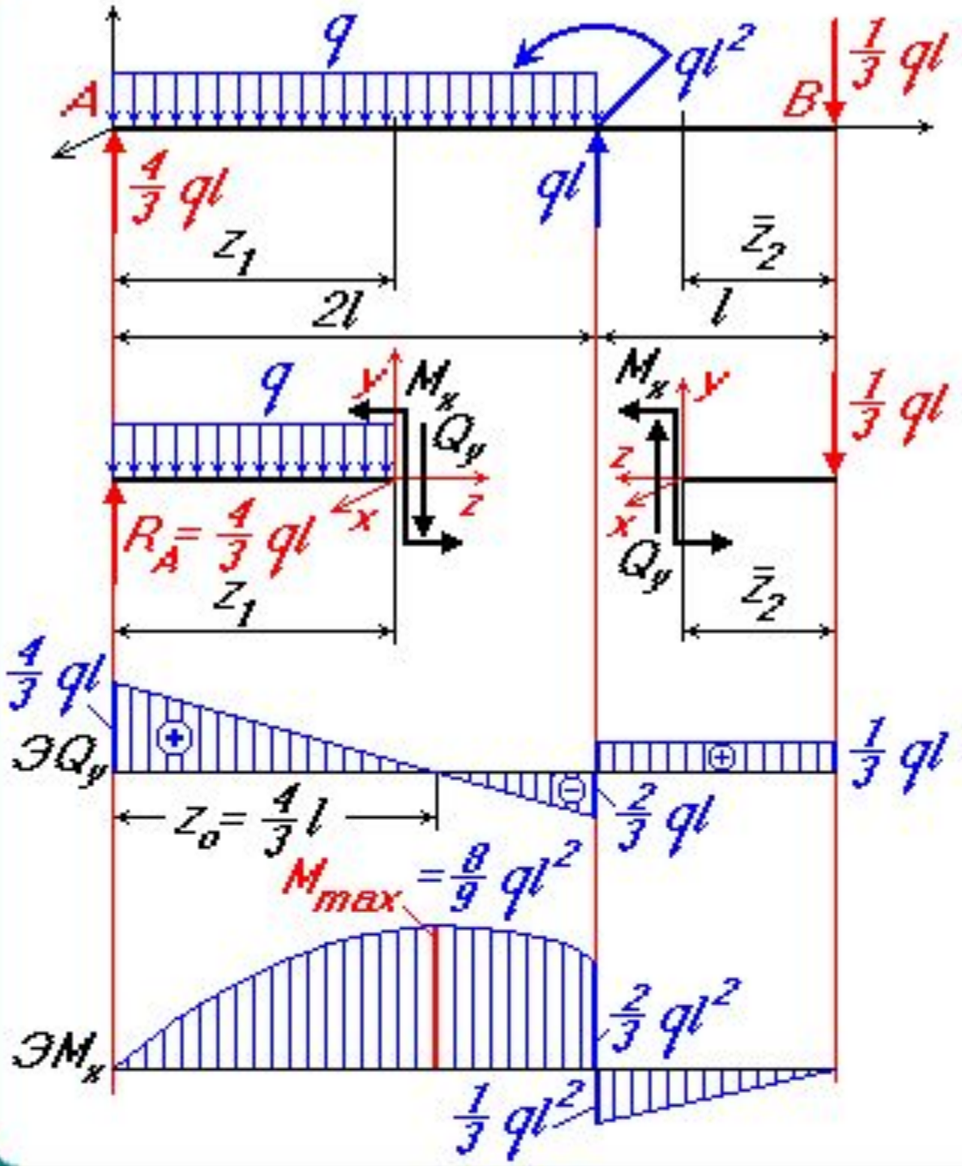
а) $z_1 = 0; \; Q_y = \frac{4}{3}ql; \quad M_x = 0;$

б) $z_1 = 2l; \; Q_y = -\frac{2}{3}ql; \quad M_x = \frac{2}{3}ql^2;$

$Q_o = \frac{4}{3}ql - q\cdot z_o = 0; \quad z_o = \frac{4}{3}l;$

$M_{max} = \frac{4}{3}ql\cdot\frac{4}{3}l - q\,\frac{4}{3}l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}l = \frac{8}{9}ql^2;$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ



2 - ой участок :

$(0 < \bar{z}_2 < l)$

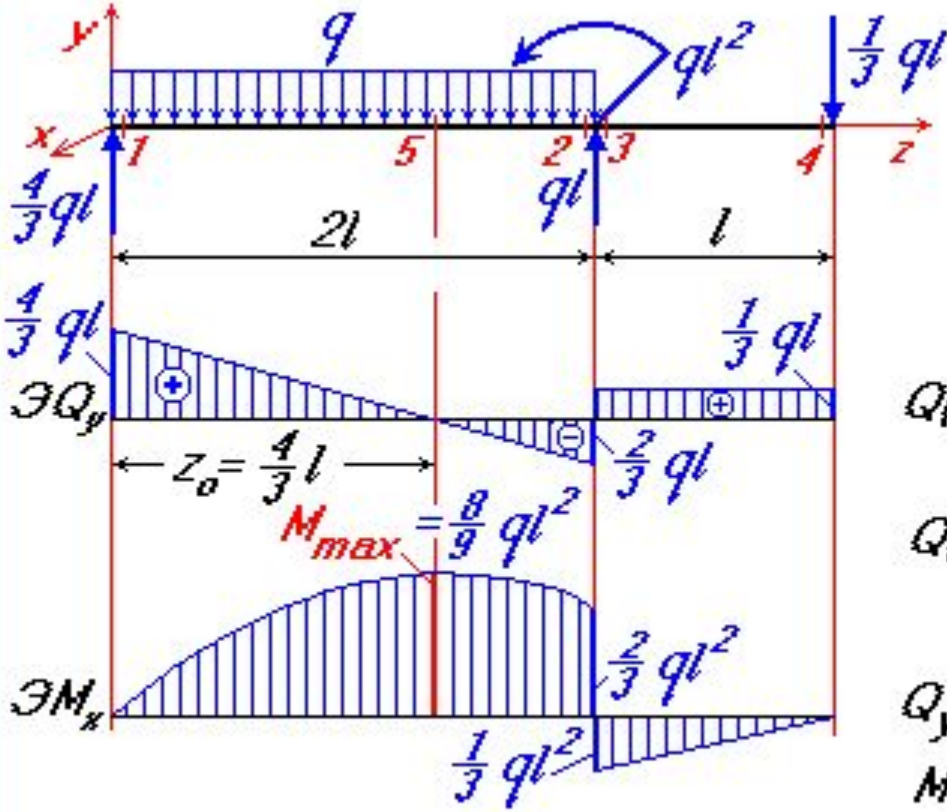
$Q_y = \frac{1}{3} ql = const;$

$M_x = \frac{1}{3} ql \cdot \bar{z}_2$ - сжатые нижние волокна;

а) $\bar{z}_2 = 0;$ $M_x = 0;$

б) $\bar{z}_2 = l;$ $M_x = \frac{1}{3} ql^2;$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ($ЭQ_y$ и $ЭM_x$) ПО СЕЧЕНИЯМ (по точкам)



$$q = \frac{dQ}{dz};\ Q = \frac{dM}{dz};\ q = \frac{d^2M}{dz^2}$$

1) $q = 0;$

$Q(z) = const;\quad M(z) = az + b;$

2) $q = const;$

$Q(z) = az + b;\quad M(z) = az^2 + bz + c;$

3) $q = az + b;$

$Q(z) = az^2 + bz + c;\quad M(z) = az^3 + bz^2 + cz + d;$

Участок 1-2: $q(z) = -q;$

$Q_{y1} = \frac{4}{3}ql;\ Q_{y2} = \frac{4}{3}ql - q \cdot 2l = -\frac{2}{3}ql;$

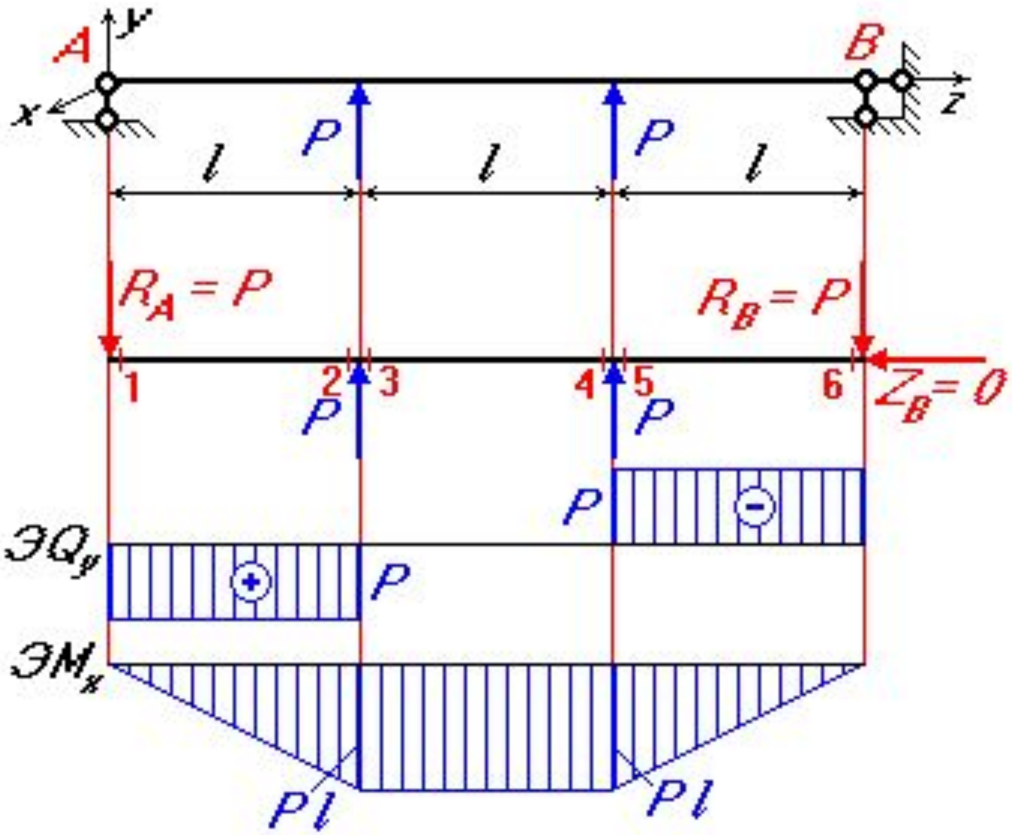
$M_{x1} = 0;\ M_{x2} = - ql\,2l - q \cdot 2l \cdot l = \frac{2}{3}ql^2;$

Участок 3-4: $q(z) = 0;\quad Q_{x3} = Q_{x4} = \frac{1}{3}ql;\ M_{x4} = 0;\ M_{x3} = \frac{1}{3}ql \cdot l = \frac{1}{3}ql^2;$

сжатые нижние волокна

$$M_{x5} = M_{max} = \frac{4}{3}ql \cdot \frac{4}{3}l - q \cdot \frac{4}{3}l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}l = \frac{8}{9}ql^2$$

ПРЯМОЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ



$Q_1 = Q_2 = -P;$

$Q_3 = Q_4 = 0;$

$Q_5 = Q_6 = P;$

$M_{x1} = 0;$

$M_{x2} = M_{x3} = Pl$ (сжатые нижние волокна)

$M_{x4} = M_{x5} = Pl;$

$M_{x6} = 0;$

Участок 3 - 4 находится в условиях прямого чистого изгиба.

$Q_3 = Q_4 = 0;$ $M_{x3} = M_{x4} = Pl = const;$

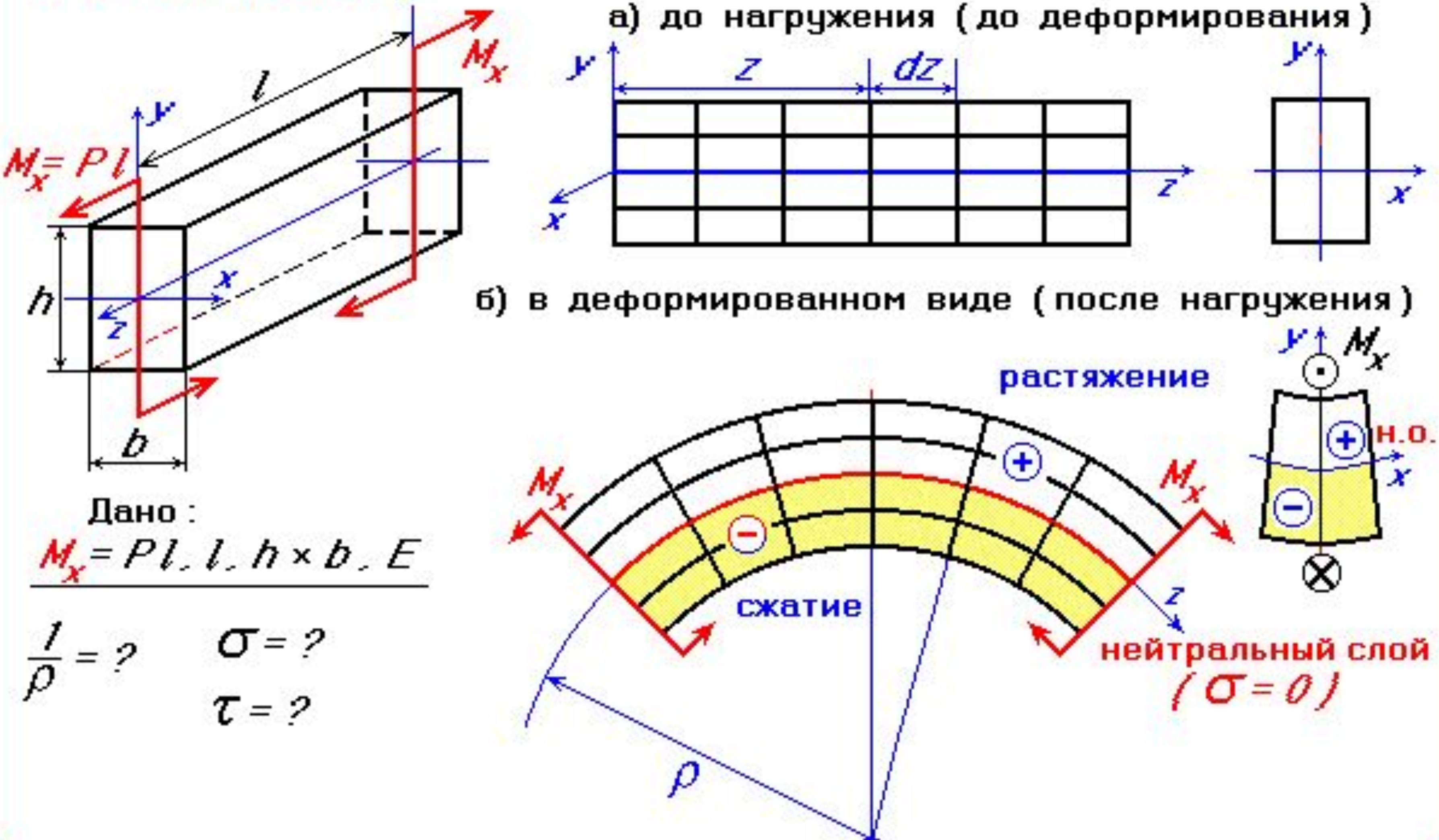
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ ИЗОГНУТОЙ ОСИ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Постановка задачи :

Механизм деформирования :

а) до нагружения (до деформирования)

б) в деформированном виде (после нагружения)



Дано :

$M_x = Pl,\ l,\ h \times b,\ E$

$\frac{1}{\rho} = ?$ $\sigma = ?$

$\tau = ?$

МЕХАНИЗМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ (продолжение)

1) Каждый слой искривляется:
часть слоев растянута (верхняя),
другая - сжата (нижняя)

НЕЙТРАЛЬНЫЙ СЛОЙ - не деформируется, длина Н.С. равна длине стержня до деформации.

2) НЕЙТРАЛЬНАЯ ОСЬ - линия пересечения Н.С. с плоскостью поперечного сечения.

3) Поперечные сечения поворачиваются относительно нейтральных осей - оставаясь плоскими.

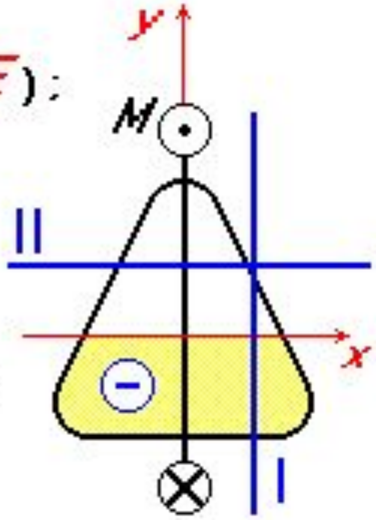
НЕИЗВЕСТНО:

1) положение Н.О. (ось x) по высоте сечения;
2) $\sigma = \sigma(x, y)$ - закон распределения напряжений.

ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ:

1) материал - сплошной, однородный, изотропный, идеально упругий (закон Гука $\sigma = E\varepsilon$; $E_p = E_c = E$);
2) гипотеза о естественном состоянии материала. Напряжения в сечениях I и II $\sigma_x = \sigma_y = 0$ - в этих сечениях нет силовых факторов.

$$\sigma_z = \sigma = \sigma(x, y).$$

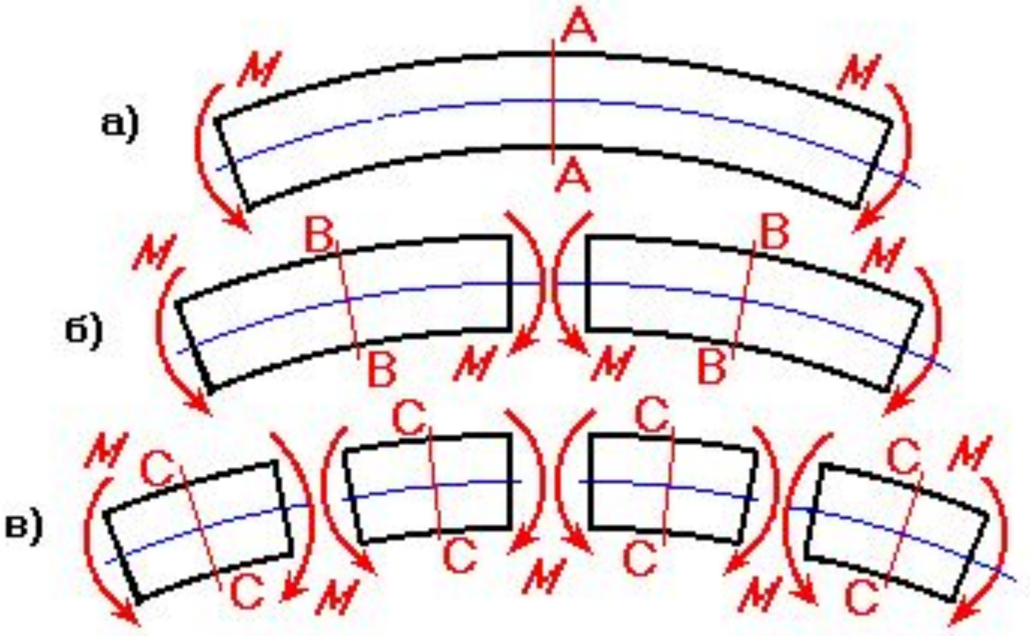


3) перемещения поперечных сечений (углы поворота) и точек стержня малы по сравнению с размерами поперечного сечения.

МЕХАНИЗМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ (продолжение)

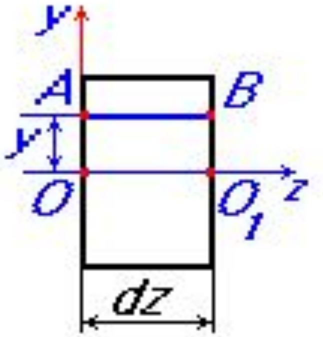
4) **ГИПОТЕЗА плоских сечений** (**гипотеза Бернулли**) - сечения плоские до деформации и перпендикулярные к оси стержня остаются плоскими после деформации и перпендикулярными к изогнутой оси стержня.

Для стержня постоянного сечения гипотеза Бернулли доказывается **из симметрии нагружения**.



2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим элемент dz до и после деформации:



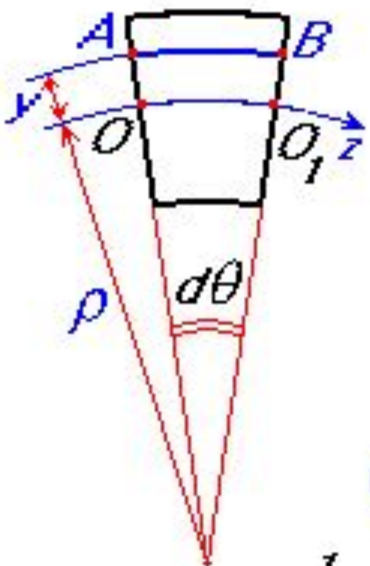
OO_1 - нейтральный слой (длиной dz);

ρ - радиус кривизны нейтрального слоя;

$d\theta$ - угол поворота сечений;

$$dz = \overset{\frown}{OO_1} = \rho \cdot d\theta;$$

$$\Delta(dz) = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{OO_1} = (\rho + y)\,d\theta - \rho \cdot d\theta = y\,d\theta;$$



$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{y\,d\theta}{\rho \cdot d\theta};$$

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}} \quad (2)$$ линейная функция от y;

Связь между ρ и $d\theta$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = æ(z)$$ - кривизна нейтрального слоя не зависит от координат произвольной точки x и y.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

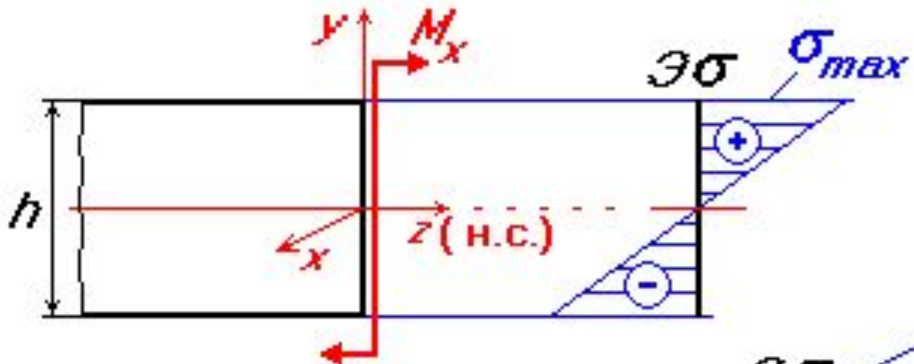
Для решения статических уравнений (1) и (2) используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости – закон Гука).

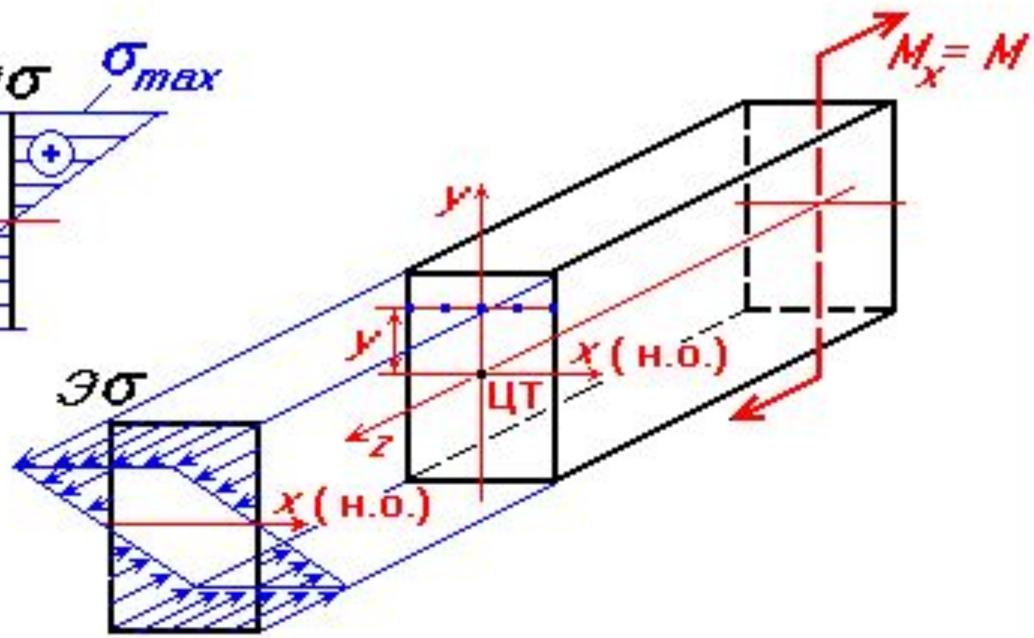
$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \qquad (3) \qquad E = E(x, y) = const.$$

Решение совместно уравнений (1) – (3): (3) ⟶ (2)

$$\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}} \qquad (4)$$

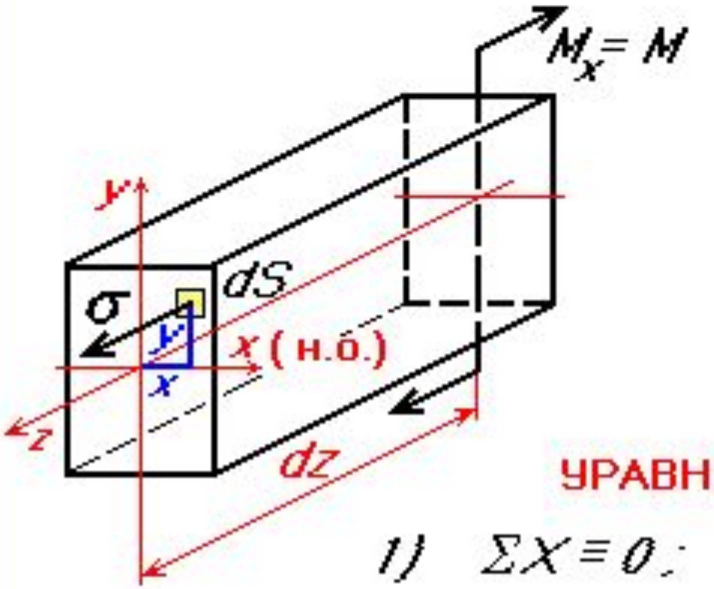
E и ρ — для сечения постоянные.





1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равновесие части стержня (балки) длиной dz:



x – нейтральная ось;

y – силовая линия (линия изгиба);

$\tau = 0$, т.к. $Q_x = Q_y = 0$; $T = 0$;

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \Sigma X \equiv 0; & 3)\ \Sigma Z = \int\limits_S \sigma dS = 0; \\ 2)\ \Sigma Y \equiv 0; & 5)\ \Sigma M_y = \int\limits_S \sigma \cdot x \cdot dS = 0; \\ 4)\ \Sigma M_z \equiv 0; & 6)\ \Sigma M_x = M - \int\limits_S \sigma \cdot y \cdot dS = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (1) – (4)

Подставим выражение (4) в уравнения равновесия (1):

1. в уравнение 3):

$$\int_S \sigma dS = \frac{E}{\rho}\int_S y\, dS = \frac{E}{\rho}\cdot S_x = 0; \qquad \frac{E}{\rho} \neq 0;$$

$S_x = 0$ – нейтральная ось x проходит через центр тяжести сечения.

2. в уравнение 5):

$$\int_S \sigma\cdot x\cdot dS = \frac{E}{\rho}\int_S x\cdot y\, dS = \frac{E}{\rho}\cdot I_{xy} = 0;$$

$I_{xy} = 0$ – нейтральная ось x и силовая линия y – главные и центральные оси поперечного сечения.

Оси x и y – взаимноперпендикулярны.

3. в уравнение 6):

$$M = \int_S \sigma\cdot y\cdot dS = \frac{E}{\rho}\int_S y^2 dS = \frac{E}{\rho}\cdot I_x;$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E I_x}} \qquad (5)$$

$E I_x$ – жесткость сечения стержня при изгибе (в плоскости yoz)

$$M_x = M(z) = const; \qquad E I_x = E I_x(z) = const;$$

$\frac{1}{\rho} = æ(z) = const$ – при чистом изгибе стержень постоянного сечения изгибается по дуге окружности.

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Выражение (5) ⟶ (4):

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} = \frac{EM_x}{EI_x}y;$$

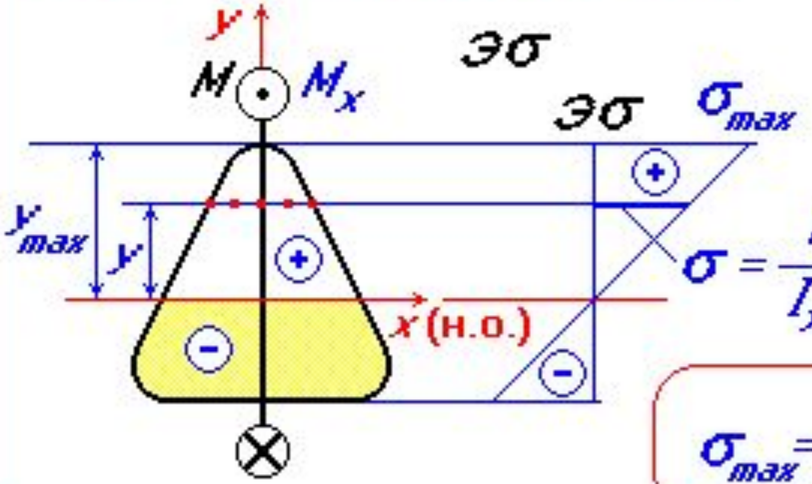
$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{I_x}y} \quad (III)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_x}y}$$

_ формула получена без учета знаков для M и y.

M и y подставляются без знака (по модулю); знак σ определяется по эпюре M (правило сжатого волокна) и положению точки (сверху или снизу от оси стержня).

При прямом чистом изгибе силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, тогда другая главная центральная ось будет нейтральной осью.



$$S_x = 0; \quad I_{xy} = 0;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x}y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}y$$

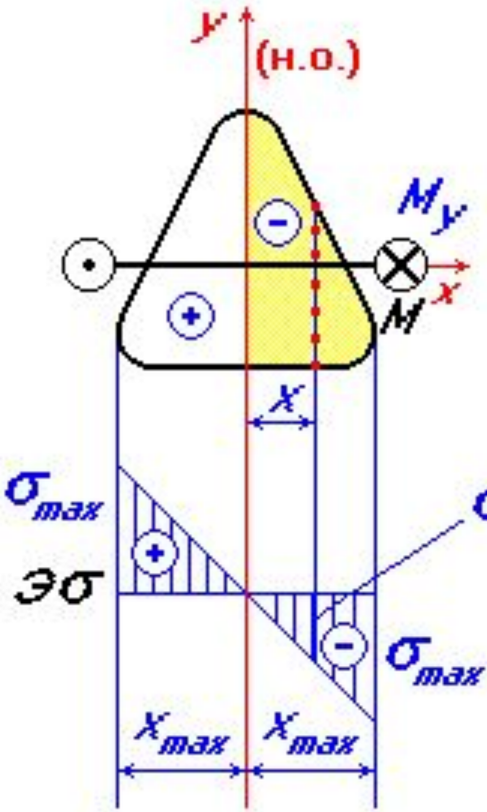
$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$ момент сопротивления сечения изгибу (относительно оси x)

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}}$$

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ (продолжение)

При прямом чистом изгибе **силовая линия** совпадает с одной из **главных центральных осей сечения**, тогда другая **главная центральная ось** будет **нейтральной осью**.

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y}x} \quad (III)$$



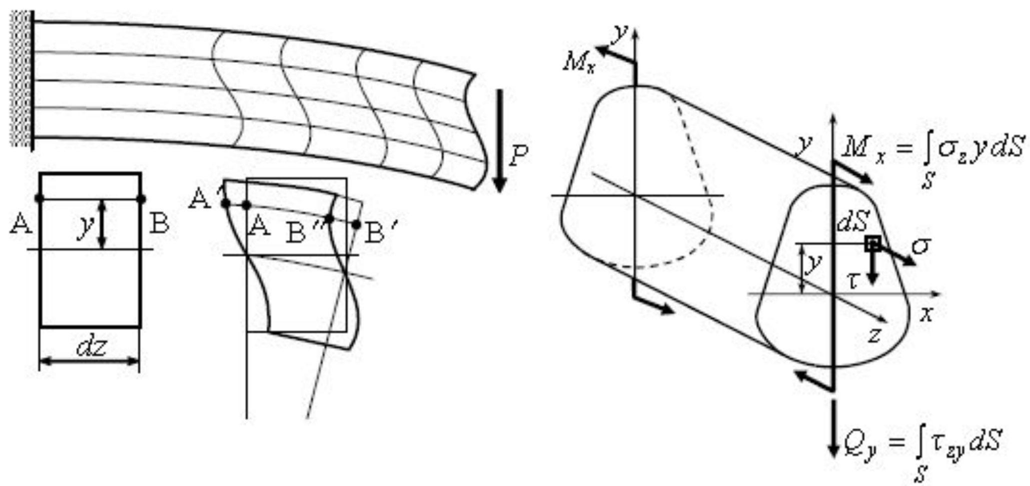
$$S_y = 0; \quad I_{xy} = 0;$$

$$\sigma_{max} = \pm\frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}x$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$ момент сопротивления сечения изгибу (относительно оси y)

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ



В поперечном сечении балки отличны от нуля σ и τ. Касательные напряжения τ сопровождаются угловыми деформациями γ.

При $Q = \underset{z}{\text{const}}$ искривление поперечных сечений $\gamma = \underset{z}{\text{const}}$ не влияет на величину продольной деформации стержня (A′B′ = A″B″).

При $Q = \underset{z}{\text{const}}$ формулы чистого изгиба дают для σ погрешность порядка $\frac{h}{l}$ по сравнению с единицей.

В дальнейшем будем считать:

1) гипотеза плоских сечений выполняется;

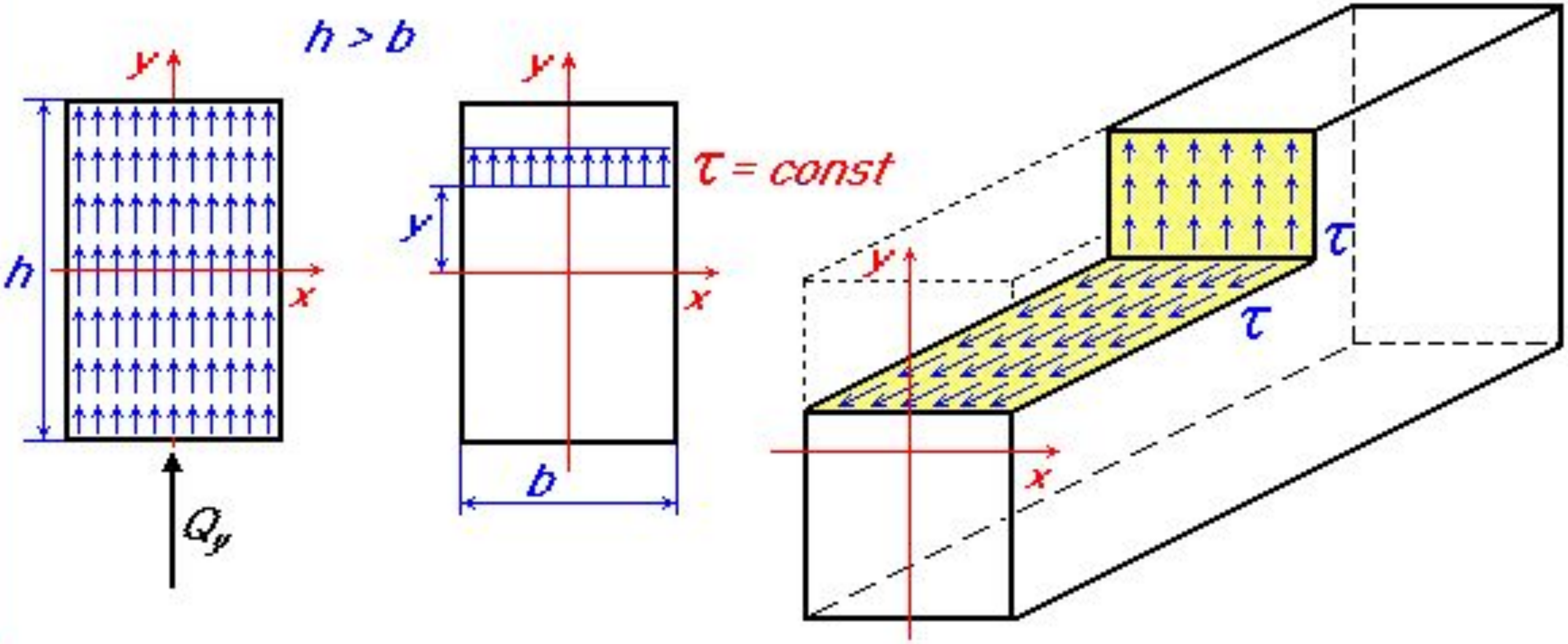
2) формулы для определения нормальных напряжений и кривизны оси стержня, выведенные при чистом изгибе, применимы и для поперечного изгиба:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x};} \qquad \boxed{\sigma = \frac{M_x}{I_x} y;} \qquad \boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.}$$

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

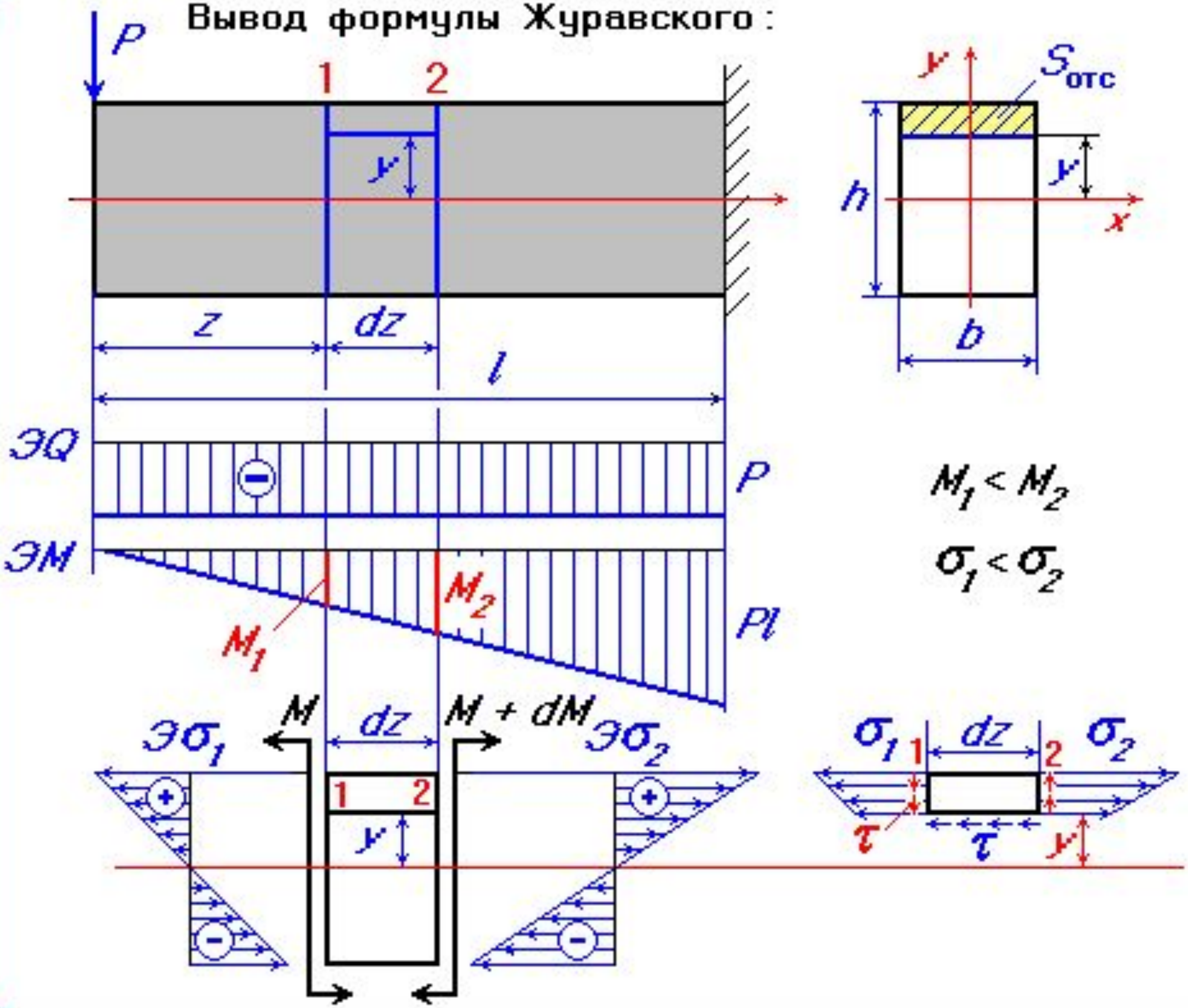
Определение касательных напряжений при поперечном изгибе
(формула Журавского)

Допущения :
1) касательные напряжения в точках сечения направлены параллельно поперечной силе Q_y ;
2) касательные напряжения в точках сечения, расположенных на одном уровне, по величине равны между собой :



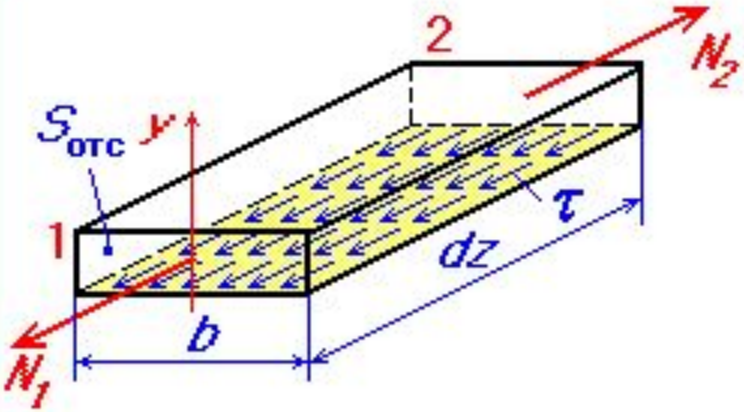
КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Вывод формулы Журавского:



$S_{отс}$ - площадь отсеченной части поперечного сечения

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЖУРАВСКОГО (продолжение)



$$\Sigma Z = -N_1 - \tau \cdot b \cdot dz + N_2 = 0; \quad \tau = \frac{N_1 - N_2}{b \cdot dz};$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_x} y = \frac{M}{I_x} y; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{I_x} y = \frac{M + dM}{I_x} y;$$

$$N_1 = \int \sigma_1 \, dS = \int \frac{M \cdot y}{I_x} dS = \frac{M}{I_x} S_x^{отс};$$

$$N_2 = \int \sigma_2 \, dS = \int \frac{M + dM}{I_x} y \cdot dS = \frac{M + dM}{I_x} S_x^{отс};$$

$$\tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{отс}}{I_x \cdot b}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad \boxed{\tau = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot b}}$$ – формула Журавского;

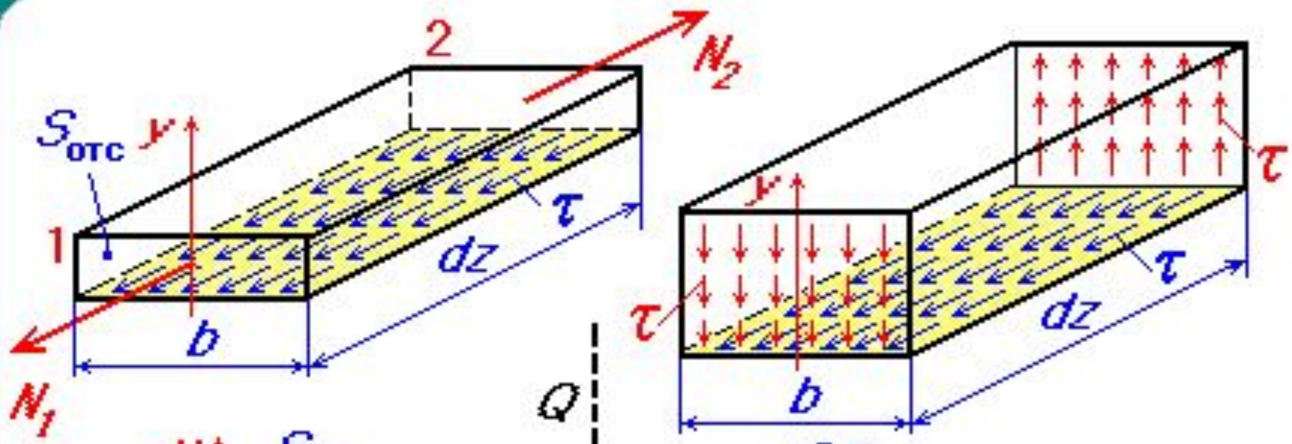
Q – поперечная сила;

$S_x^{отс}$ – статический момент отсеченной части относительно оси x (н.о.);

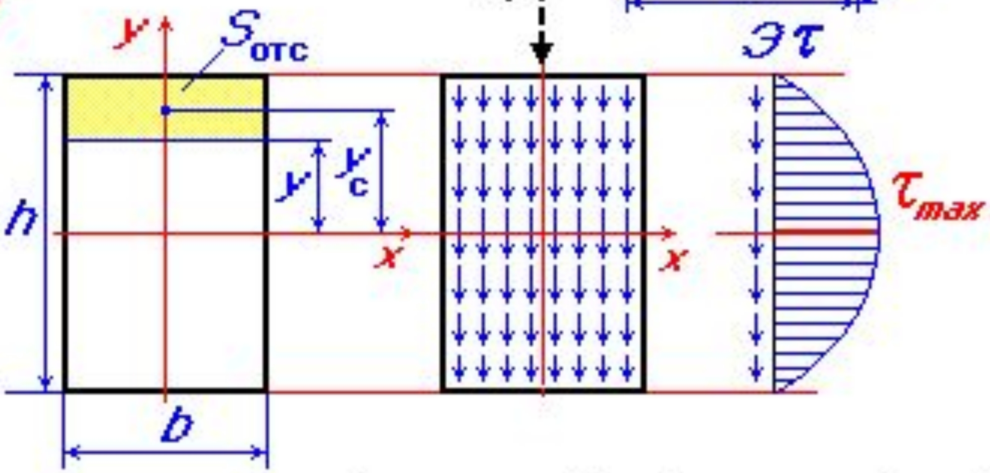
I_x – момент инерции поперечного сечения;

b – ширина поперечного сечения.

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ



Касательные напряжения в **поперечных** сечениях равны касательным напряжениям в **продольных** сечениях, как парные им.

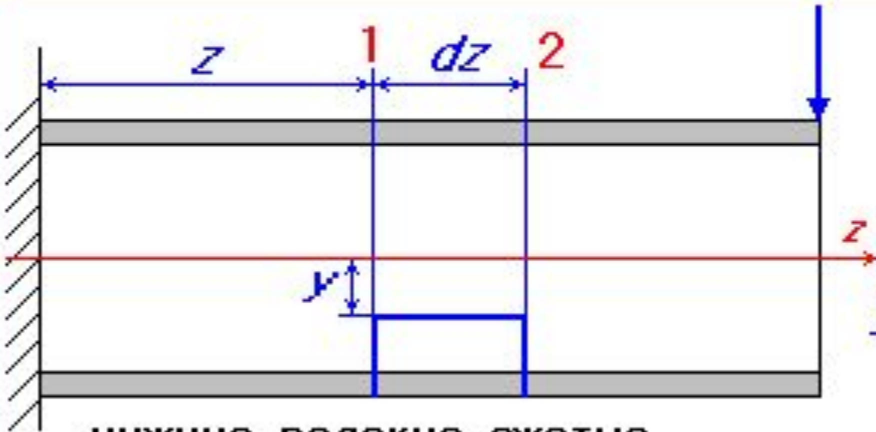


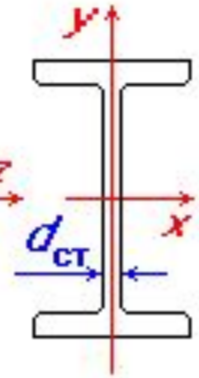
$$\boxed{\tau = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot b}}$$

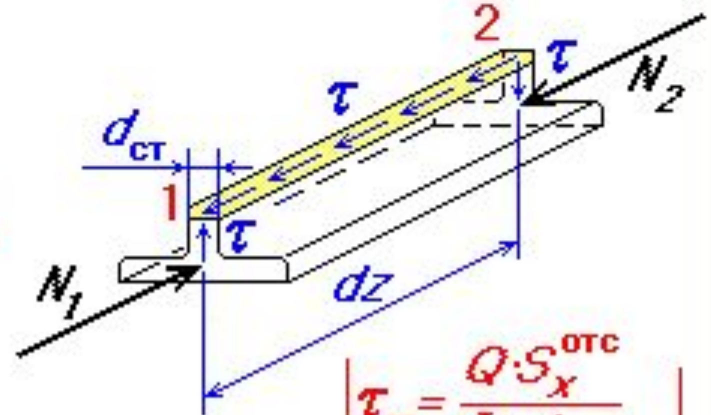
$$S_x^{отс} = S_{отс} \cdot y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b\,\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad I_x = \frac{b h^3}{12}; \quad b = b;$$

$$\tau = \frac{6Q}{b h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \qquad \tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{bh};$$

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ







нижние волокна сжатые

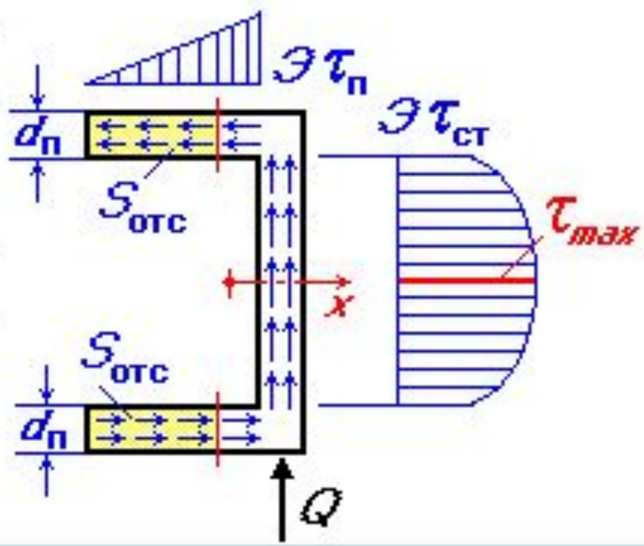
$M_1 > M_2$; $\sigma_1 > \sigma_2$; $N_1 > N_2$;

$$\tau_{ст} = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot d_{ст}}$$

$d_{ст}$ – толщина стенки;

верхние волокна

нижние волокна

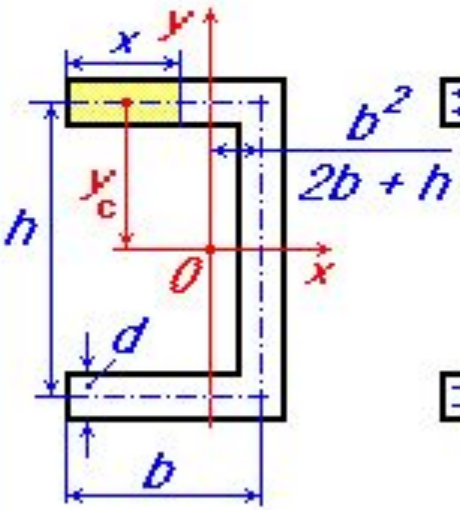


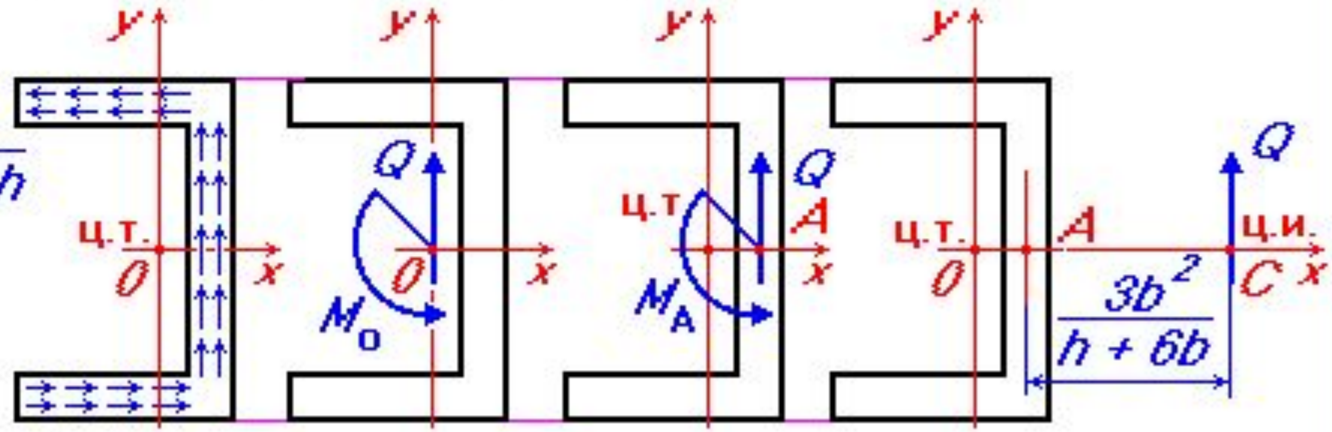
$$\tau_п = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot d_п}$$

$d_п$ – толщина полки

ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА

Касательные напряжения в корытном профиле:





Система сил, лежащих в плоскости сечения, может быть приведена к любой точке плоскости в виде равнодействующей силы и момента.

$$I_x = \frac{dh^2}{12}(h+6b);$$

а) полка: $S_x^{\text{отс}} = \frac{h}{2} d\cdot x;$ $\quad \tau_{\text{п}} = \frac{6Q\cdot x}{h\cdot d(h+6b)};$

б) стенка:

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{d}{2}\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad \tau_{\text{ст}} = \frac{6Q\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right)}{h^2 d(h+6b)};$$

$$M_A = h\int_0^b \tau_{\text{п}} d\cdot dS;$$

$$M_A = Q\frac{3b^2}{h+6b};$$

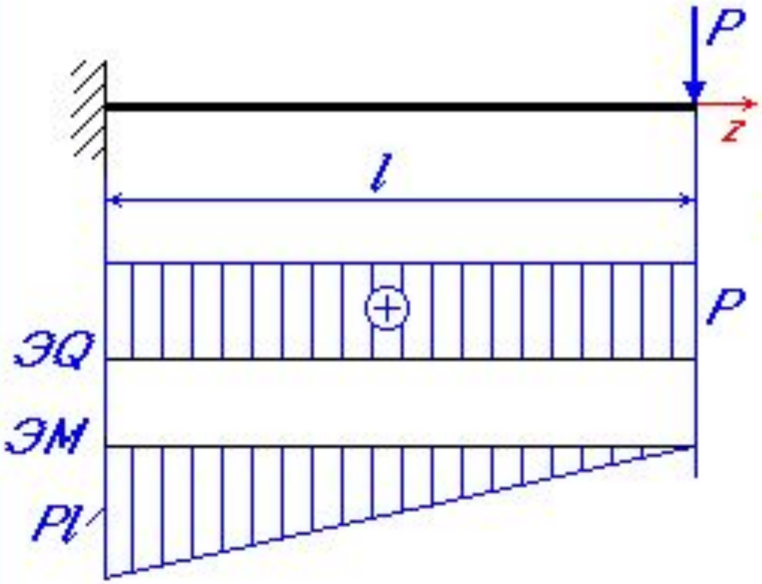
Центр изгиба это точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном изгибе равен нулю.

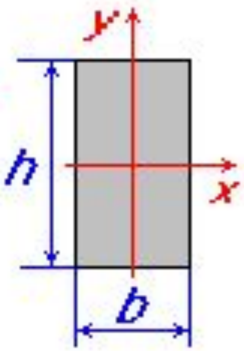
УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

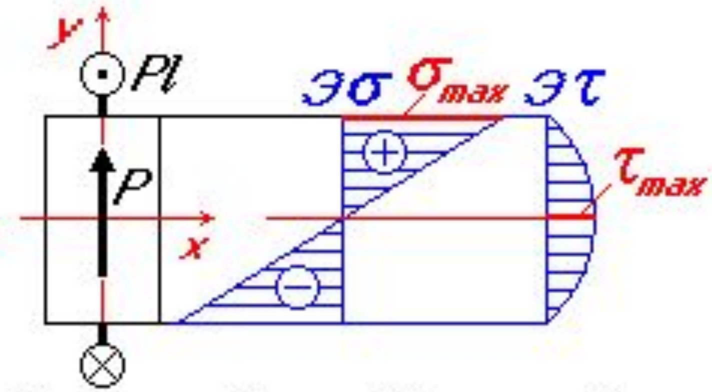
При прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях возникают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Для сплошных сечений касательные напряжения τ малы по сравнению с нормальными напряжениями σ.

Пример. Консольная балка прямоугольного поперечного сечения.







$Q_{max} = P;$ $M_{max} = Pl;$

Вычислим $max\,\sigma$ и $max\,\tau$

$$max\,\sigma = max(\sigma_{max}) = \frac{M_{max}}{W_x}$$

$$max\,\tau = max(\tau_{max}) = \frac{Q_{max} \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot b};$$

$$max\,\sigma = \frac{6Pl}{bh^2}; \qquad max\,\tau = \frac{3P}{2bh};$$

$$\frac{max\,\sigma}{max\,\tau} = \frac{6Pl \cdot 2bh}{bh^2 \cdot 3P} = \frac{4l}{h}; \quad \frac{l}{h} \geq 5...10;$$

$$max\,\tau \ll max\,\sigma.$$

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ:

$$max\,\sigma \leq [\sigma];$$

$$n = \frac{\bar{\sigma}}{max\,\sigma} \geq [n];$$

$$max\,\sigma = max\,(\sigma_{max})$$

$$[\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]};$$

$\bar{\sigma}$ - предельное напряжение,

$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{т} \text{ - пластичные материалы,} \\ \sigma_{в} \text{ - хрупкие материалы.}\end{array}\right.$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

1. Выбор опасного сечения:

$ЭQ$ и $ЭM \rightarrow M_{max}$

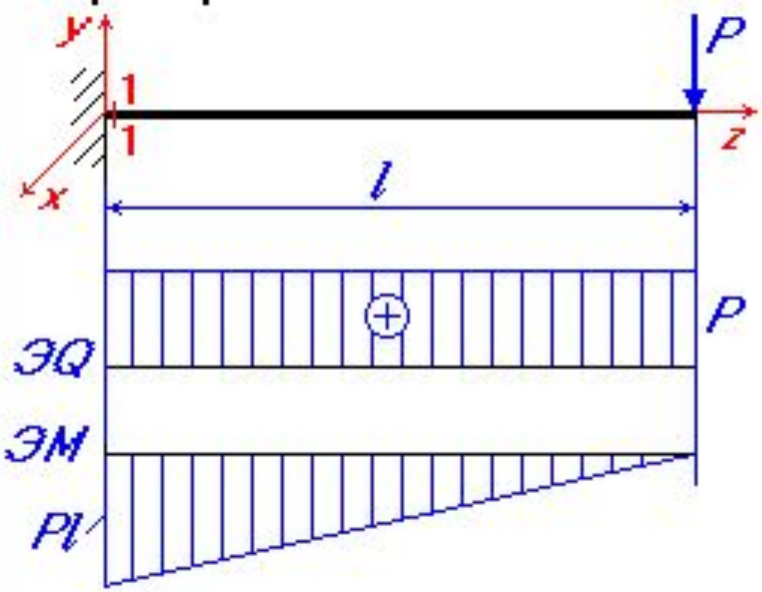
2. Выбор опасной точки:

$Э\sigma \rightarrow \sigma_{max} \rightarrow max\,\sigma$

3. Материал.
4. Условие прочности.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Пример 1.



Дано: $P,\ l,\ \sigma_т,\ [n],\ b \cdot h,$
поперечное сечение имеет 2 оси симметрии, материал пластичный,

$$[\sigma]_р = [\sigma]_с = [\sigma]$$

1. Опасное сечение 1-1:

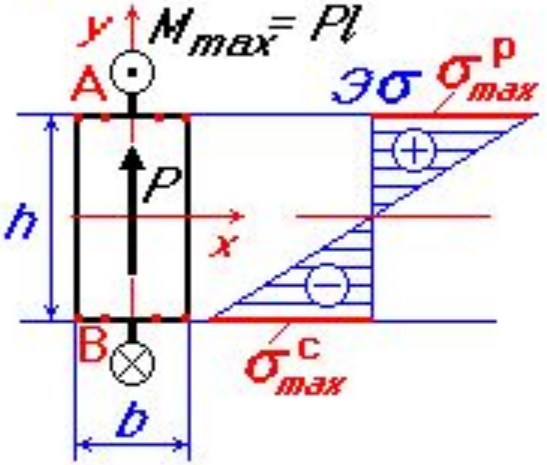
$$M_{max} = Pl; \quad Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. A и т. B:

$$\sigma^{р}_{max} = \sigma^{с}_{max} = \frac{M_{max}}{W_x};$$

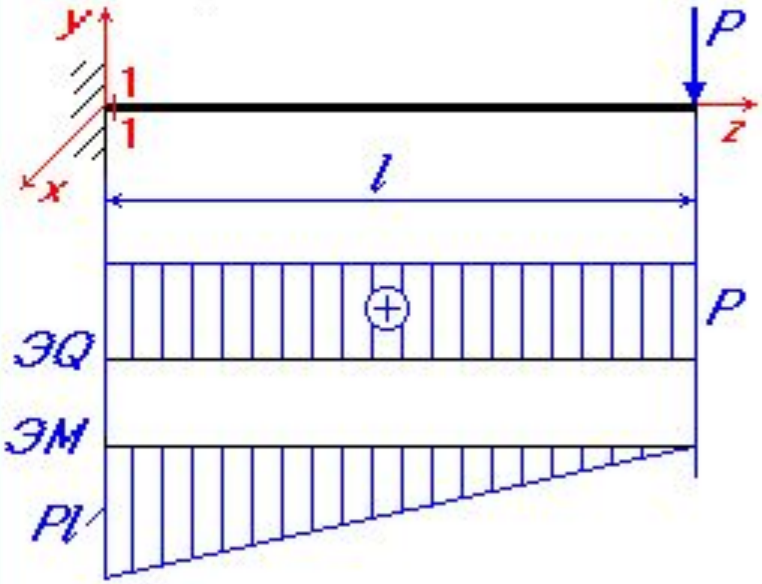
3. Материал пластичный - одинаково работает на растяжение и сжатие.
4. Условие прочности:

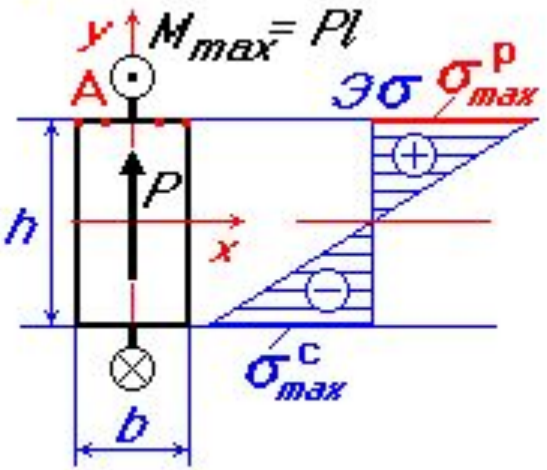
$$max\,\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leqslant [\sigma];$$



$$max\,\sigma = \frac{6Pl}{bh^2} \leqslant \frac{\sigma_т}{[n]}.$$

Пример 2.





Дано: $P,\ l,\ [n],\ b \cdot h,$

поперечное сечение имеет 2 оси симметрии, материал хрупкий (чугун)

$$\sigma_{вр} < \sigma_{вс};\quad [\sigma]_{p} < [\sigma]_{c};$$

1. Опасное сечение 1 - 1:

$$M_{max} = Pl;\quad Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. A :

$$\sigma^{p}_{max} = \frac{M_{max}}{W_x};$$

3. Материал хрупкий:

$$[\sigma]_{p} < [\sigma]_{c};$$

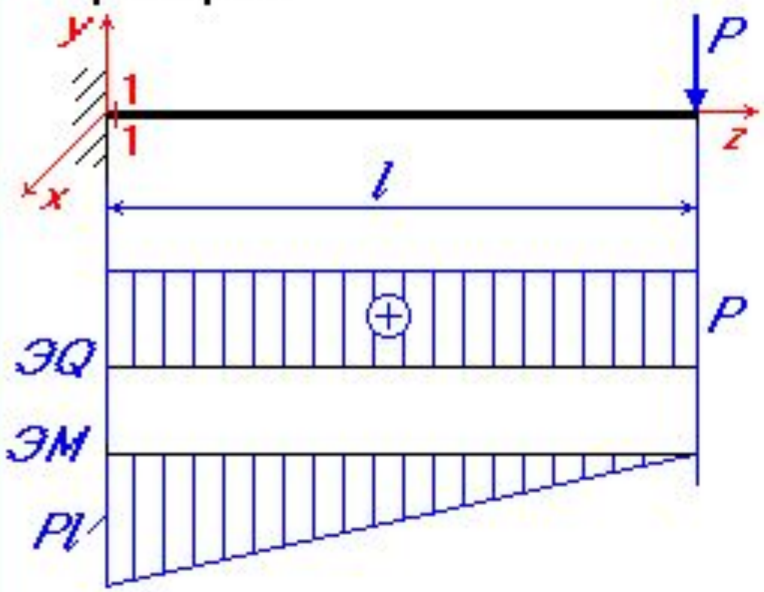
4. Условия прочности:

$$max\ \sigma_{p} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]_{p};$$

$$max\ \sigma_{p} = \frac{6Pl}{bh^2} \leq \frac{\sigma_{вр}}{[n]}.$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Пример 3.



Дано: $P,\ l,\ \sigma_т,\ [n]$,

материал пластичный – $[\sigma]_р=[\sigma]_с=[\sigma]$,

сечение несимметричное относительно оси x.

Оси x и y – главные и центральные оси поперечного сечения:

1. Опасное сечение 1 - 1:

$$M_{max} = Pl;\quad Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. A:

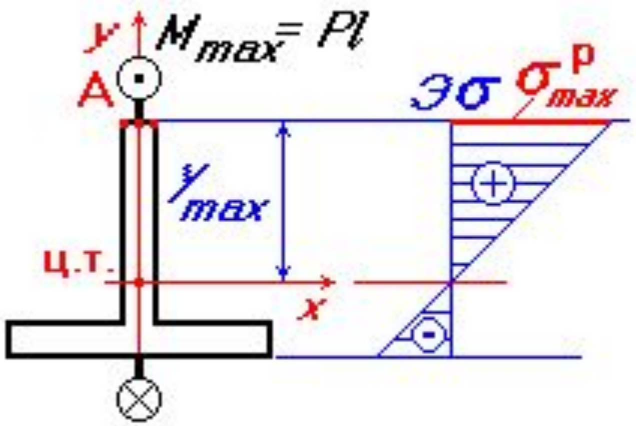
$$\sigma^{р}_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max};$$

3. Материал пластичный – одинаково работает на растяжение и сжатие

4. Условие прочности:

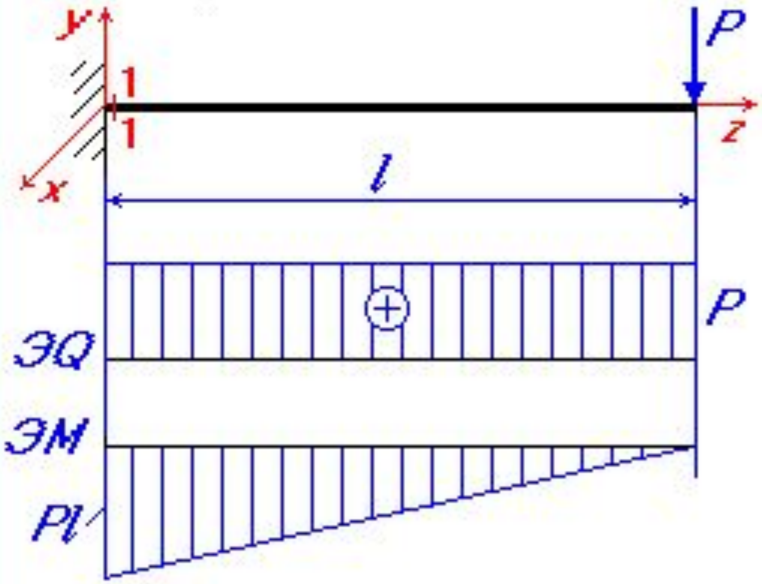
$$max\,\sigma = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} \le [\sigma];$$

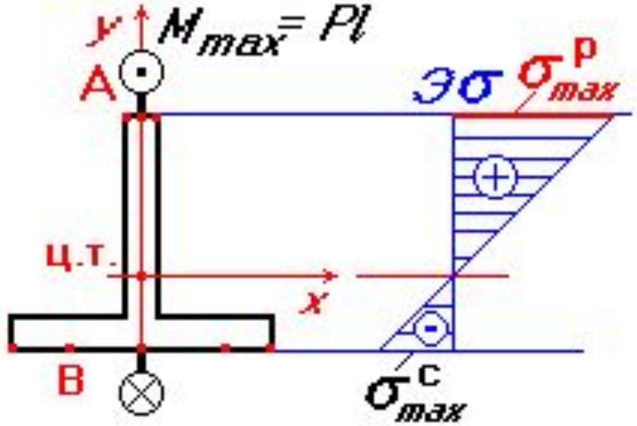
$$max\,\sigma = \frac{Pl}{I_x} y_{max} \le \frac{\sigma_т}{[n]}.$$



ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Пример 4.





Дано: $P, l, [n]$,

материал хрупкий (чугун)

$\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$; $[\sigma]_{р} < [\sigma]_{с}$;

сечение несимметричное относительно оси x.

Оси x и y - главные и центральные оси поперечного сечения:

1. Опасное сечение 1 - 1:

$M_{max} = Pl$; $Q_{max} = P$;

2. Опасные точки: т. A и т. B:

$\sigma^{р}_{max} > \sigma^{с}_{max}$;

3. Материал хрупкий:

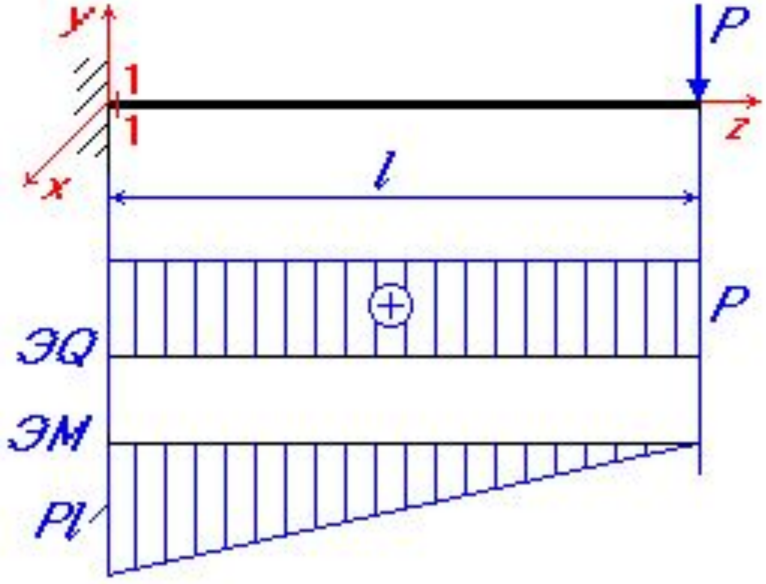
$[\sigma]_{р} < [\sigma]_{с}$;

Сечение расположено не рационально. Для хрупкого материала выгодно, чтобы $max\,\sigma$ были бы напряжениями сжатия

$max\,\sigma = \sigma^{с}_{max}$.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Пример 4. (продолжение). Сечение повернули на 180°.



1. Опасное сечение 1-1:

$M_{max} = Pl$; $Q_{max} = P$;

2. Опасные точки: т. A и т. B;

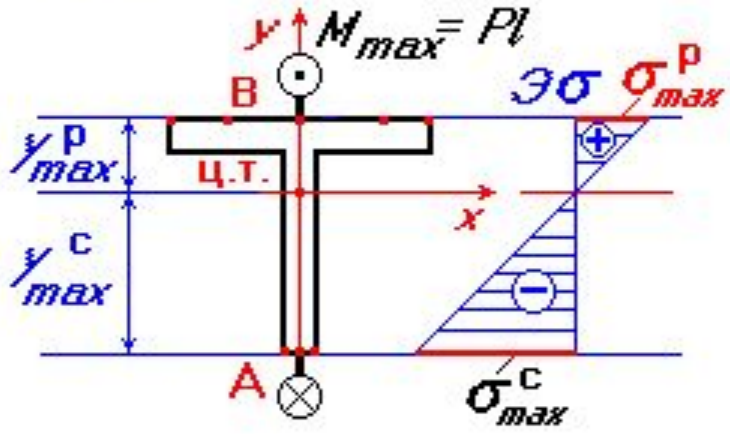
3. Материал хрупкий:

$[\sigma]_p < [\sigma]_c$;

4. Условие прочности:

$$\max \sigma_p^B = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max}^p \leqslant [\sigma]_p$$

$$\max \sigma_c^A = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max}^c \leqslant [\sigma]_c$$



Отсюда:

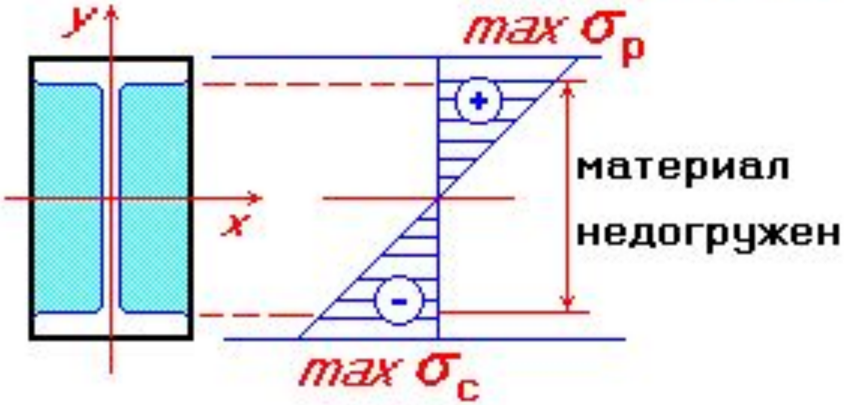
Внешняя нагрузка: $P = \min(P_1^p, P_2^c)$.

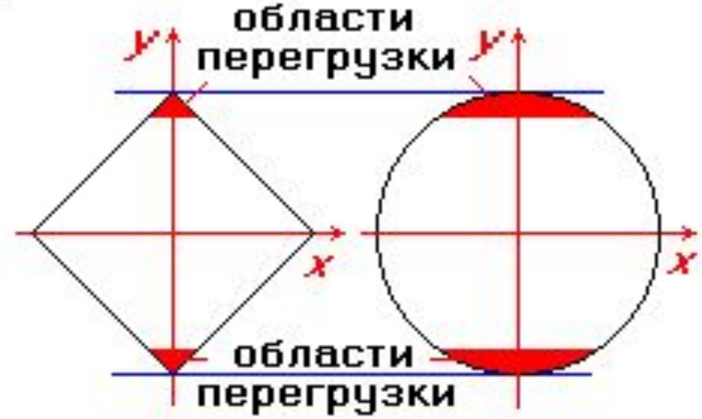
Размеры поперечного сечения: $S = \max(S_1^p, S_2^c)$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК

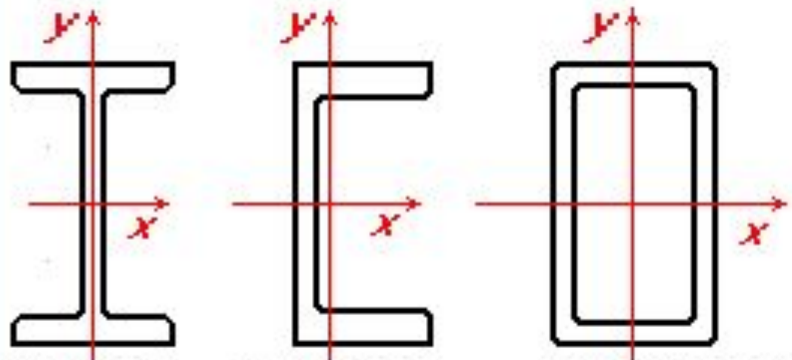
1.Материал пластичный: $\overline{\sigma} = \sigma_{т}$ ($\sigma_{тр} = \sigma_{тс}$)

Наиболее выгодным будет сечение, симметричное относительно нейтральной оси ($max\ \sigma_{р} = max\ \sigma_{с}$)





Наиболее рациональные - тонкостенные симметричные сечения:



Двутавр Швеллер Коробчатое сечение

Для тонкостенных сечений делается проверка прочности по $max\ \tau$

$$max\ \tau \leq [\tau];$$

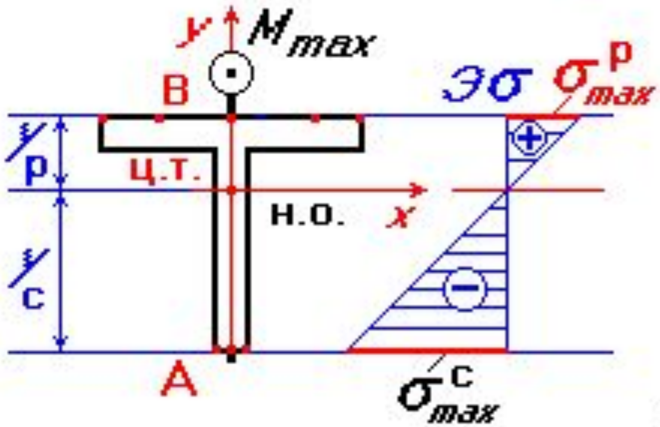
$$[\tau] = \frac{\overline{\tau}}{[n]} = (0{,}5 \ldots 0{,}6)[\sigma]_{р}.$$

Проверка прочности по делается так же и для анизотропных материалов или для составных сечений (дерево, текстолит, стеклопластик, склеенные сечения и т.д.)

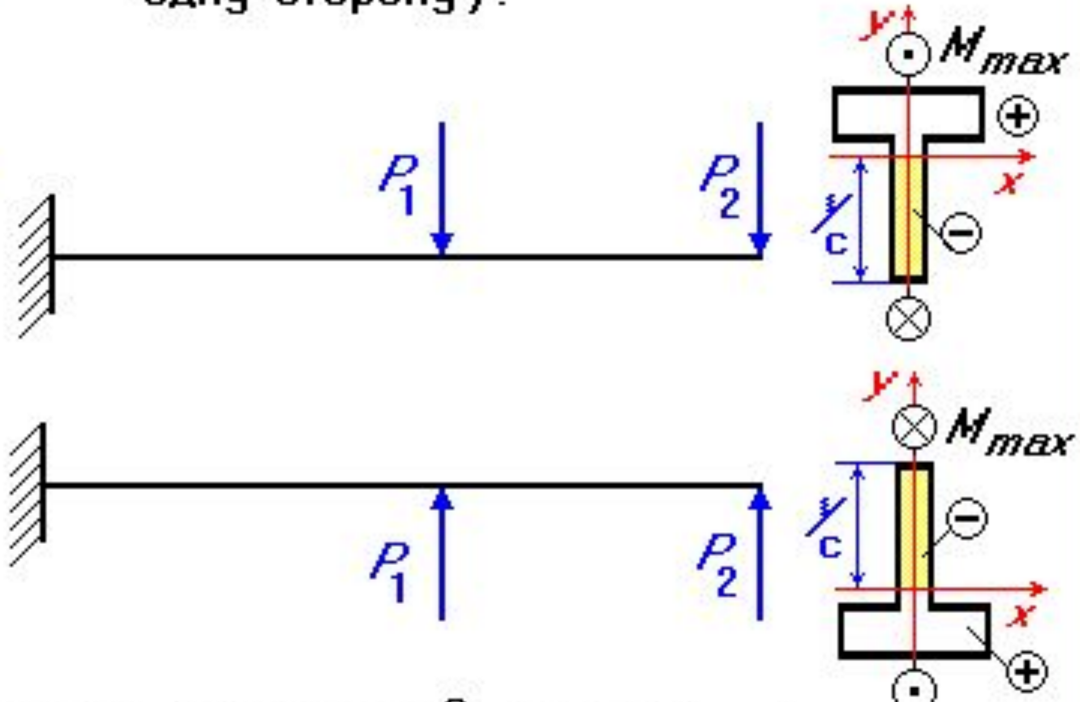
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК

2. Хрупкие материалы: $\bar{\sigma} = \sigma_{вр}$, $\sigma_{вс}$; $\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$; $[\sigma]_р < [\sigma]_с$.

Рациональное (равнопрочное) сечение – несимметричное относительно нейтральной оси (оси x)



Сечение необходимо располагать рациональным образом (желательно иметь расположение эпюры ЭМ по одну сторону).



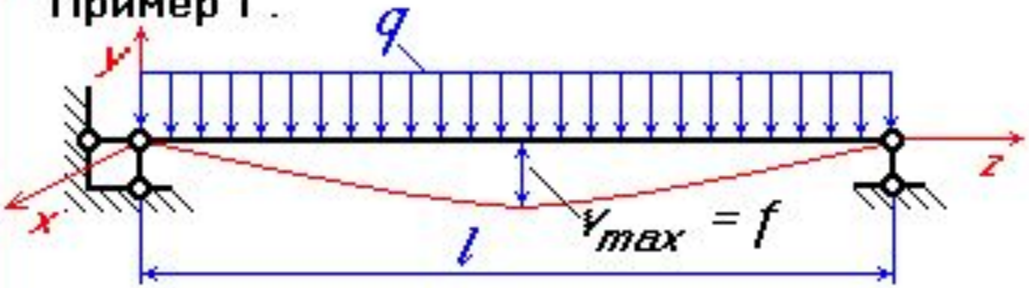
Равнопрочное сечение:

$$\frac{y_р}{y_с} = \frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}$$

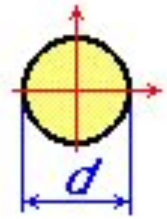
Выгодно: $max\,\sigma = \sigma^{с}_{max}$ $(y_с = y_{max})$

РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ

Пример 1.



Дано: $q,\ l,\ d,\ E.$



$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$v_{max} = f = \frac{5}{384}\,\frac{q\,l^4}{E\,I_x};$$

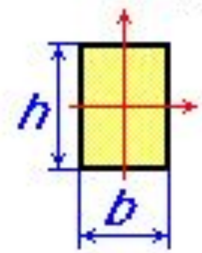
Условия жесткости:

$$v_{max} = f \le [f]; \quad v_{max} = f \le \frac{5\,q\,l^4 \cdot 64}{384\,E\,\pi\,d^4} \le [f];$$

Отсюда: $max(d)$ или $min(q)$.

Пример 2.

Дано: $P,\ l,\ b,\ h,\ E$



$$I_x = \frac{b\,h^3}{12};$$

$$v_{max} = f = \frac{P\,l^3}{3\,E\,I_x}$$

Условия жесткости:

$$v_{max} = f \le [f];$$

$$v_{max} = f \le \frac{P\,l^3 \cdot 12}{3\,E\,b\,h^3} \le [f];$$

Отсюда: $max(b \times h)$ или $min(P)$.

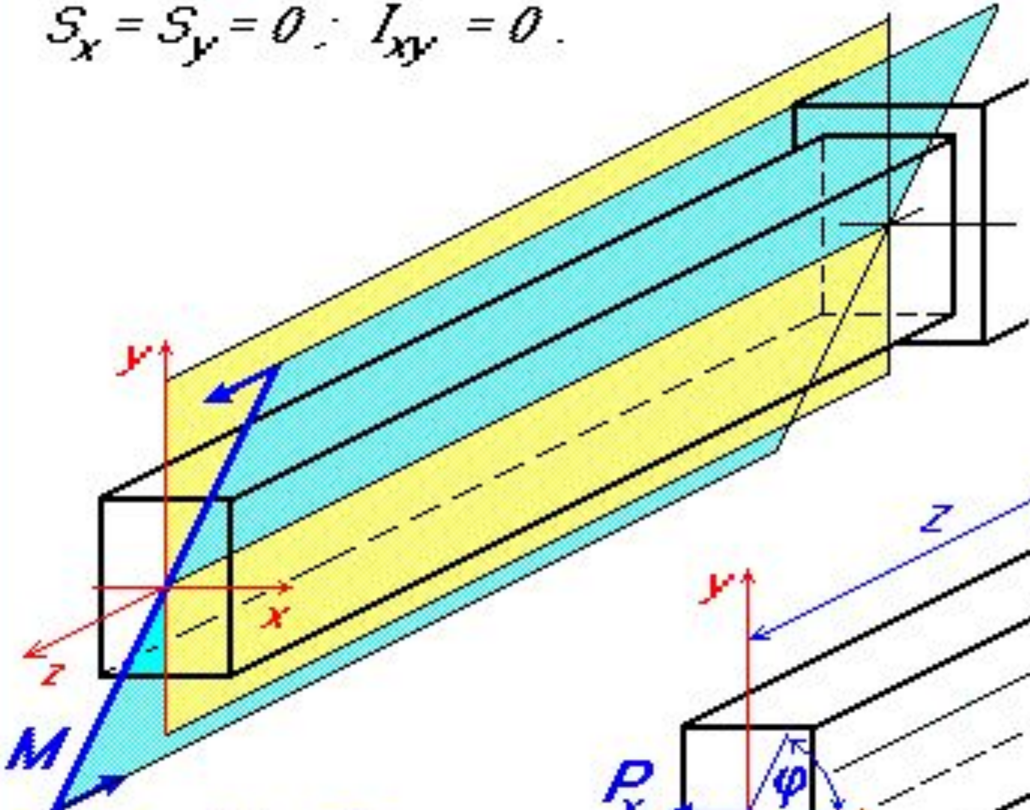
$[f]$ – допустимый прогиб балки (допустимая стрела прогиба).

КОСОЙ ИЗГИБ

При косом изгибе - силовая линия (с.л.) не совпадает с главной центральной осью сечения и с линией изгиба (л.и.).

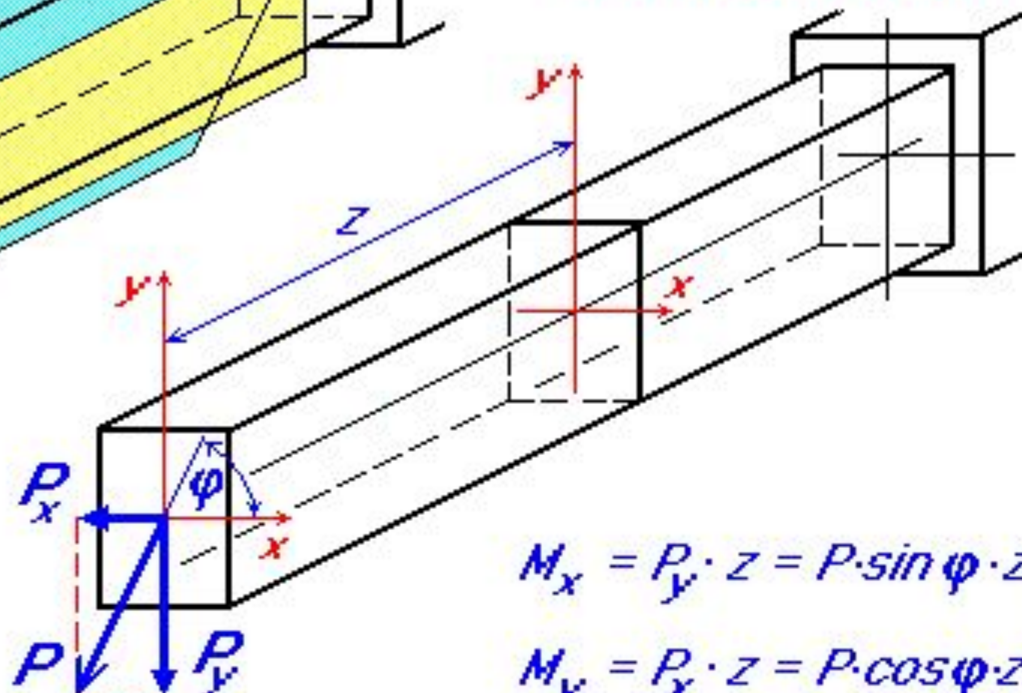
Оси x и y главные и центральные оси.

$S_x = S_y = 0$; $I_{xy} = 0$.



Задача о косом изгибе решается наиболее просто на основе принципа независимости действия сил.

Определение напряжений при косом изгибе:



$P_x = P\cos\varphi$;

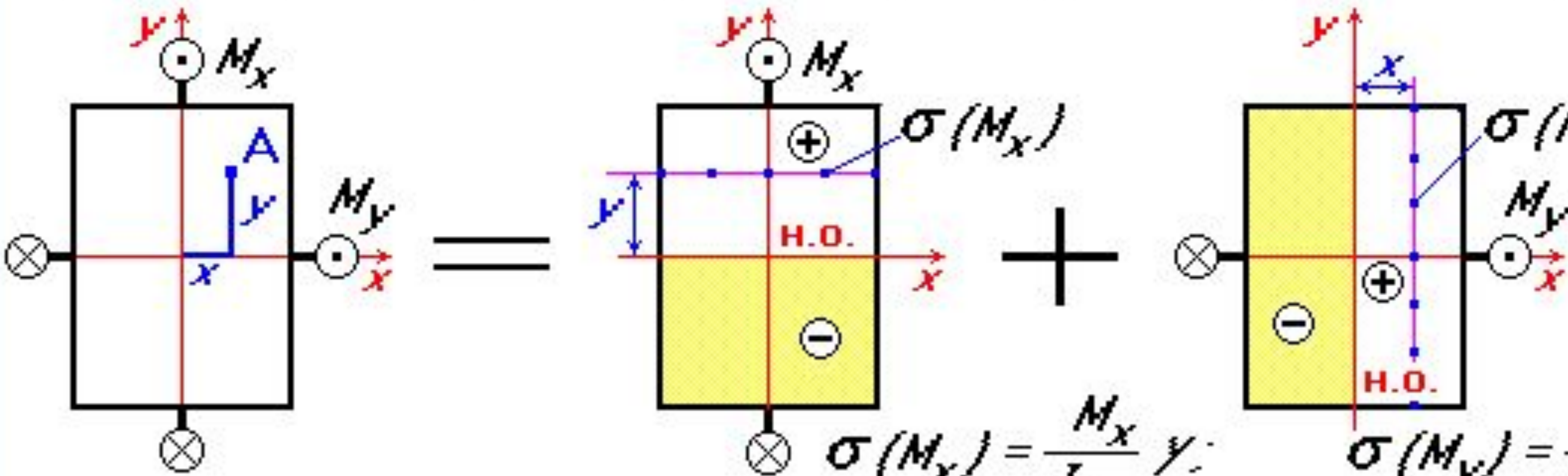
$P_y = P\sin\varphi$;

$M_x = P_y \cdot z = P \cdot \sin\varphi \cdot z$;

$M_y = P_x \cdot z = P \cdot \cos\varphi \cdot z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

КОСОЙ ИЗГИБ – одновременный изгиб в двух главных плоскостях.



$$\sigma(M_x) = \frac{M_x}{I_x}\,y; \qquad \sigma(M_y) = \frac{M_y}{I_y}\,x;$$

$$\sigma_{т.A} = \sigma(M_x) + \sigma(M_y) = \frac{M_x}{I_x}\,y + \frac{M_y}{I_y}\,x;$$ (с точностью до знака).

Напряжения по сечению распределены по линейному закону. Наибольшие напряжения в точках наиболее удаленных от нейтральной оси $(\sigma_{н.о} = 0)$.

Уравнение Н.О. – для точки А $(x > 0, y > 0)$:

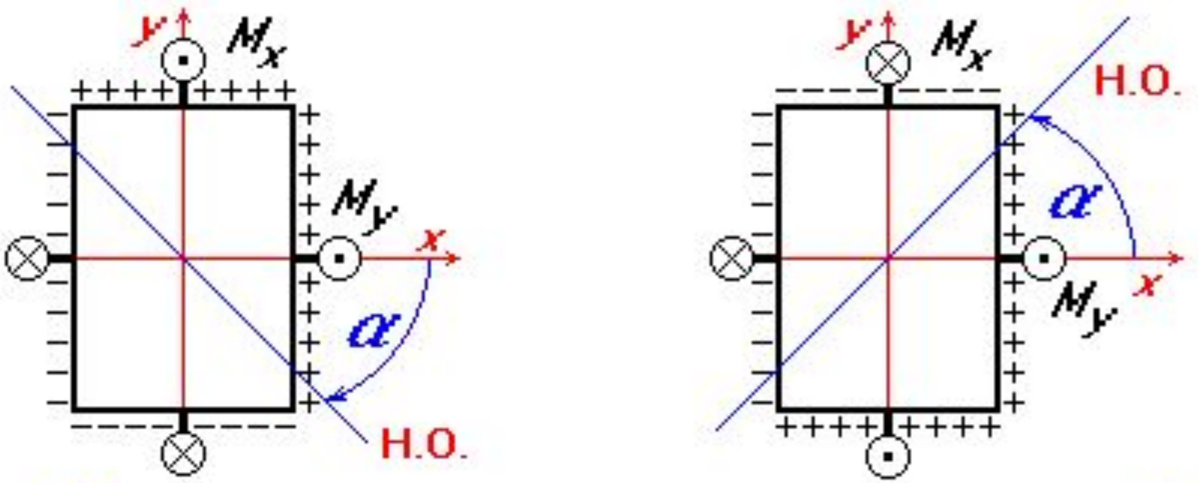
$$\sigma_{н.о}(x, y) = \frac{M_x}{I_x}\,y + \frac{M_y}{I_y}\,x = 0$$ – уравнение нейтральной оси;

$$y = k_1 x = -\frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{I_x}{I_y}\cdot x$$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат (центр тяжести сечения).

ПОЛОЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

$$y = -\frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{I_x}{I_y}\cdot x = -\frac{P\cdot\cos\varphi\cdot z\cdot I_x}{P\cdot\sin\varphi\cdot z\cdot I_y}\cdot x\,; \qquad y = k_1 x = -\frac{I_x}{I_y}\,ctg\,\varphi\cdot x\,;$$

$$k_1 = tg\,\alpha = \left| -\frac{I_x}{I_y}\,ctg\,\varphi \right|$$ – тангенс угла наклона Н.О.



Знак угла α легко определяется по знаку напряжений $\sigma(M_x)$ и $\sigma(M_y)$: Н.О. проходит через ц.т. и те области сечения, для которых $\sigma(M_x)$ и $\sigma(M_y)$ имеют разные знаки.

ПОЛОЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ И СИЛОВОЙ ЛИНИИ ПРИ КОСОМ (ПРЯМОМ) ИЗГИБЕ

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 k_2 = -1; \quad k_1 = -\frac{I_x}{I_y} ctg\,\varphi; \qquad k_2 = tg\,\varphi.$$

$$k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} ctg\,\varphi \cdot tg\,\varphi = -\frac{I_x}{I_y};$$

а) В общем случае $I_x \neq I_y$;

$$k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \neq -1.$$

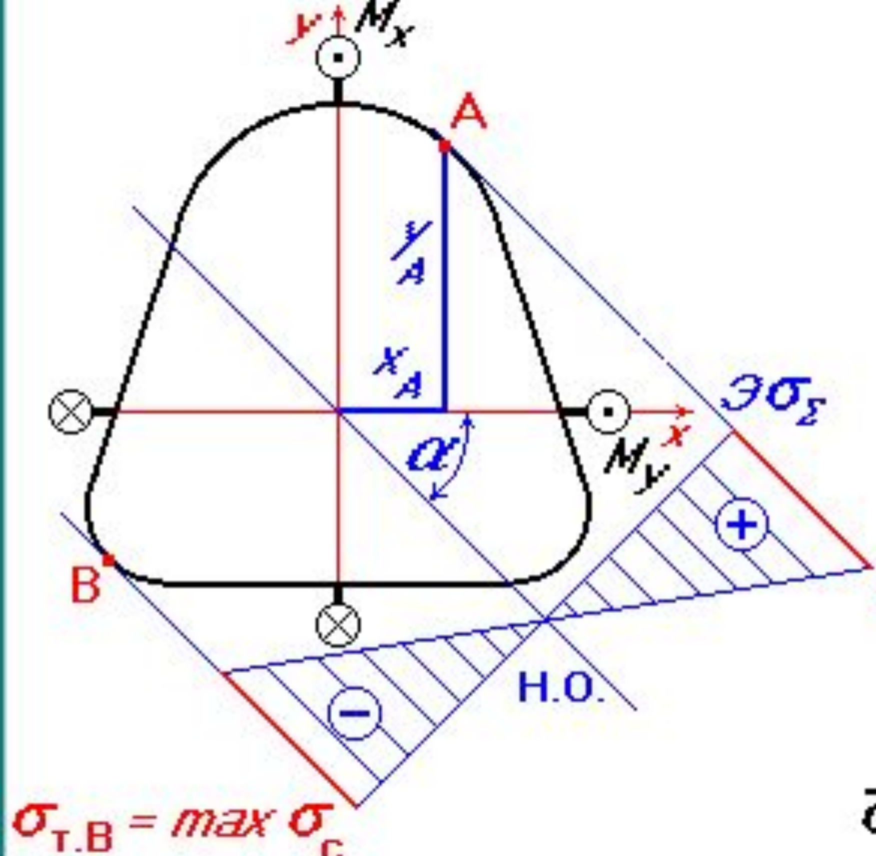
нейтральная ось и силовая линия не перпендикулярны.

б) Если $I_x = I_y$ $\quad (I_{xy} = 0)$; $\quad k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} = -1.$

Такие сечения не испытывают косой изгиб. Изгиб прямой.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Определение $max\,\sigma$:



Оси x и y главные и центральные

$$S_x = S_y = 0\,;\quad I_{xy} = 0\,.$$

$$tg\alpha = \left|\frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{I_x}{I_y}\right|;$$

$$max\,\sigma_р = \sigma_{т.A} = \frac{M_x}{I_x}\,y_A + \frac{M_y}{I_y}\,x_A\,;$$

$$max\,\sigma_с = \sigma_{т.B} = \left|-\frac{M_x}{I_x}\,y_B - \frac{M_y}{I_y}\,x_B\right|$$

УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ:

1. Пластичный материал:

$$\overline{\sigma} = \sigma_т\,;\quad [\sigma] = \frac{\sigma_т}{[n]}\,;\quad max\,\sigma \leqslant [\sigma].$$

2. Хрупкий материал:

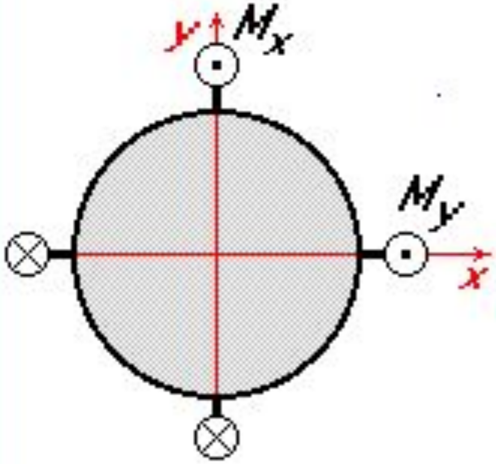
$$\overline{\sigma} = \sigma_{вр}\,,\ \sigma_{вс}\,;\quad max\,\sigma_р \leqslant [\sigma]_р\,;\quad max\,\sigma_с \leqslant [\sigma]_с\,;$$

$$[\sigma]_р = \frac{\sigma_{вр}}{[n]_р}\,;\quad [\sigma]_с = \frac{\sigma_{вс}}{[n]_с}\,.$$

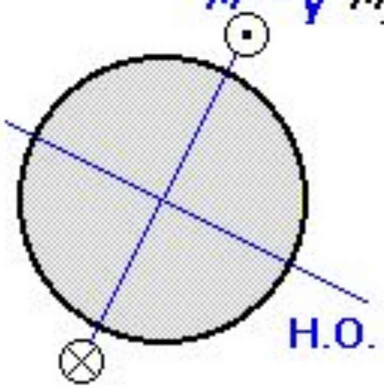
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО (ПРЯМОГО) ИЗГИБА

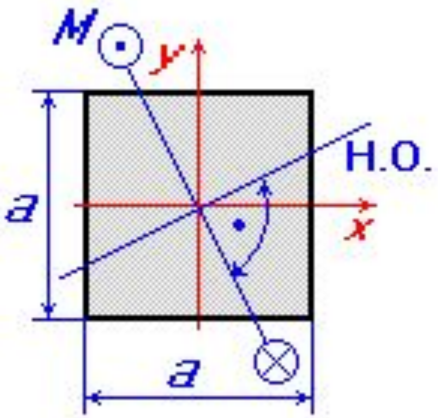
Оси x и y главные и центральные

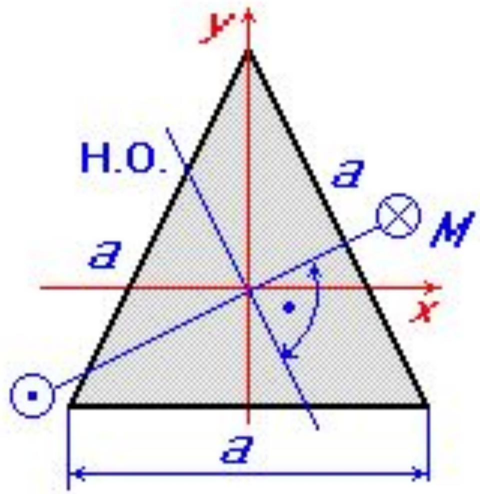
$I_x = I_y$; $S_x = S_y = 0$; $I_{xy} = 0$.



$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$

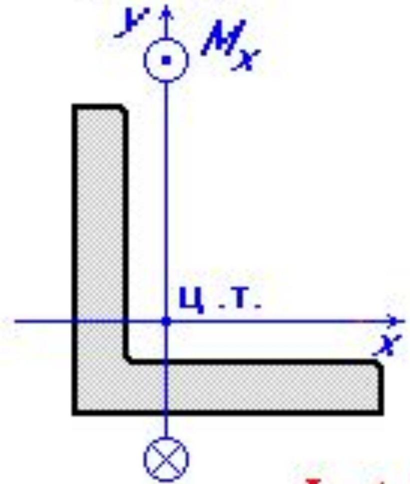






Оси x и y не главные оси:

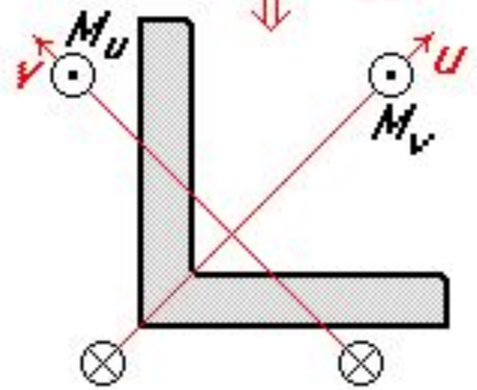
$I_x = I_y$; $I_{xy} \neq 0$.



Косой изгиб: $I_u \neq I_v$;

$\Downarrow$

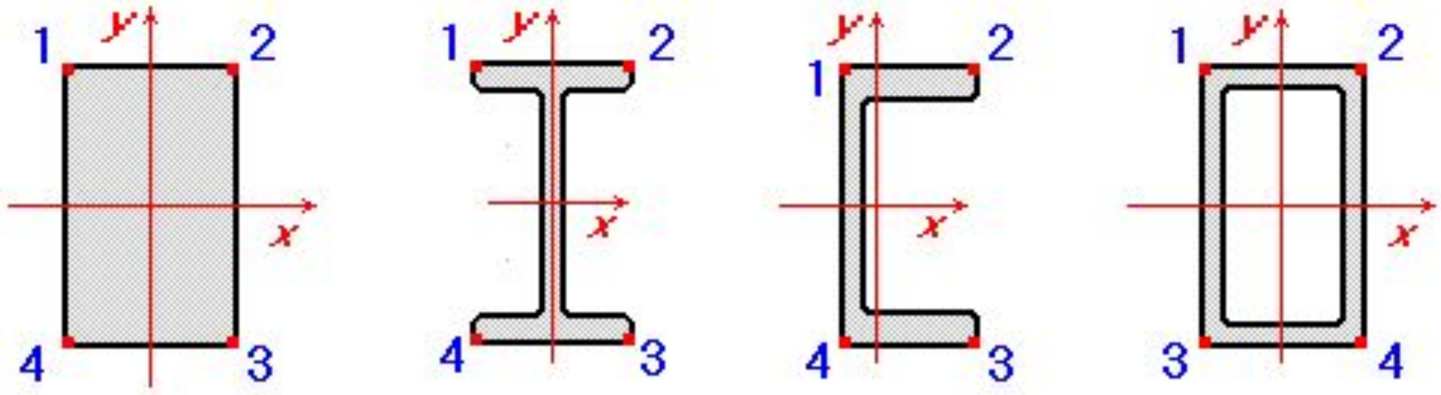
$I_{uv} = 0$.



ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО ИЗГИБА

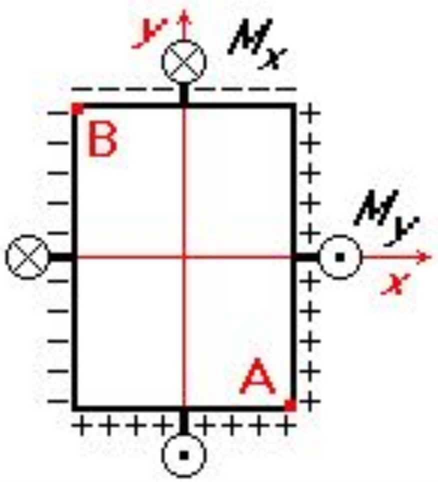
А. Сечение с выступающими углами:

1) Оси x и y – оси симметрии:



и т. д.

Опасная точка – наиболее удаленная от осей x и y (угловая точка).



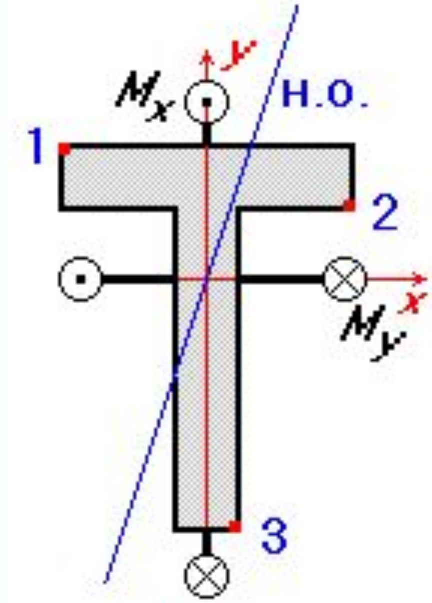
$$\max \sigma_{р} = \sigma_{т.A} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \qquad W_x = \frac{bh^2}{6};$$

$$\max \sigma_{с} = \sigma_{т.B} = \left| -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right|; \qquad W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

В частности – так можно определять напряжения и для квадратного сечения.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО ИЗГИБА (продолжение)

2) Сечение не симметрично одной из осей:



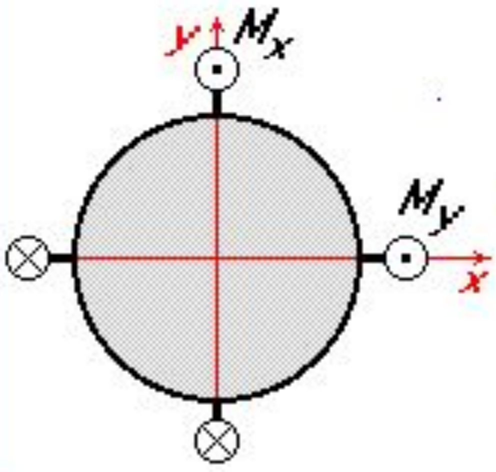
Оси x и y главные и центральные

$$S_x = S_y = 0;\ I_{xy} = 0.$$

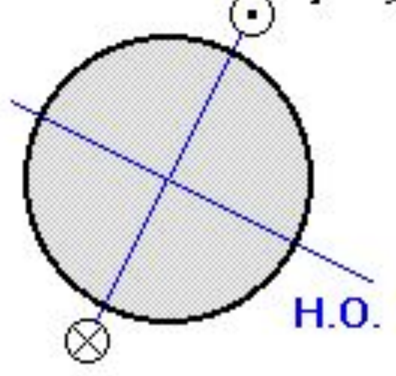
$$\sigma_i = \pm\frac{M_x}{I_x}y_i \pm \frac{M_y}{I_y}x_i; \quad i = 1,2,3;$$

Отсюда определяем $max\,\sigma_p$ и $max\,\sigma_c$

Б. Расчет круглого поперечного сечения:



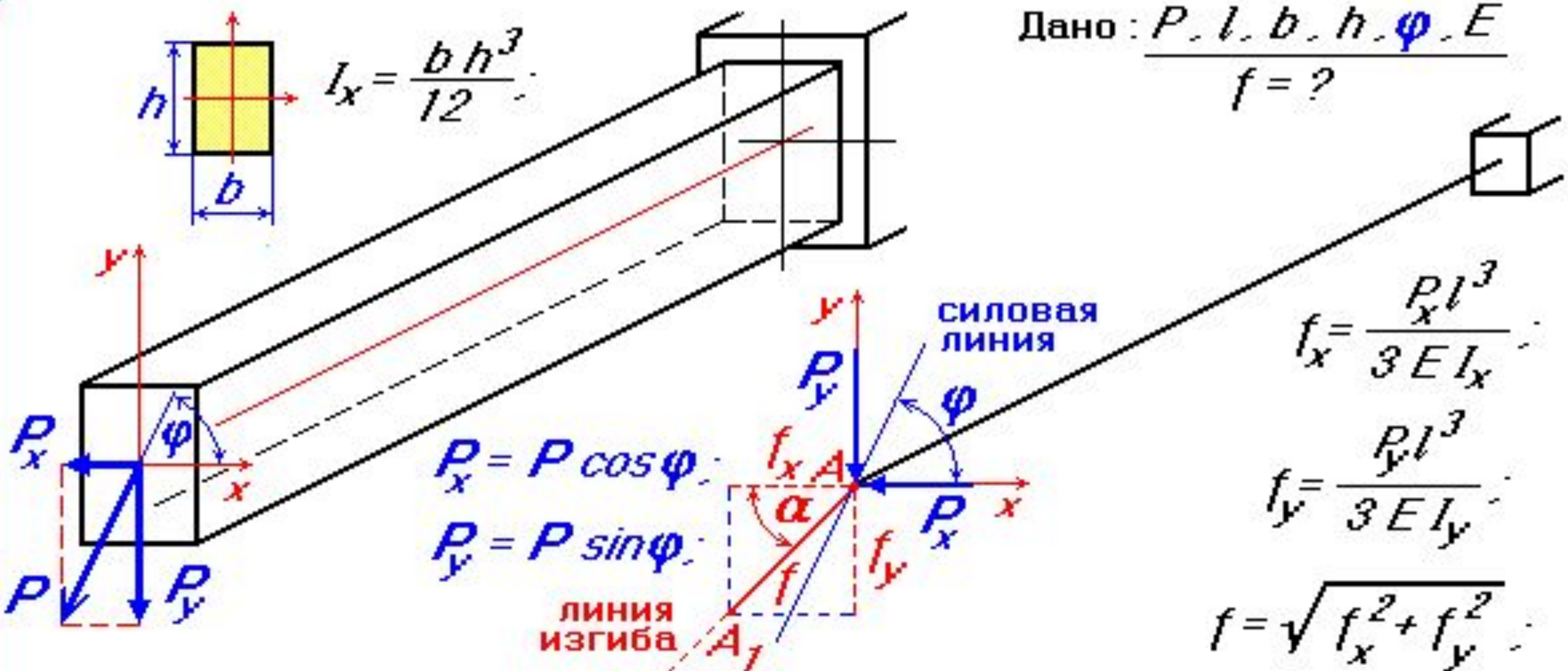
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$



$$W_x = W_y = W_{н.о.} = W = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$max\,\sigma = \pm\frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq [\sigma].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ



Дано: $\dfrac{P,\ l,\ b,\ h,\ \varphi,\ E}{f = ?}$

$P_x = P\cos\varphi$;

$P_y = P\sin\varphi$;

$$f_x = \frac{P_x l^3}{3EI_x};$$

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EI_y};$$

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2};$$

$$tg\,\alpha = \frac{f_y}{f_x} = \frac{P_y l^3}{3EI_y}\cdot\frac{3EI_x}{P_x l^3} = \frac{P\sin\varphi}{P\cos\varphi}\cdot\frac{I_y}{I_x};\qquad tg\,\alpha = tg\,\varphi\cdot\frac{I_y}{I_x};$$

а) В общем случае $I_x \neq I_y$, силовая линия и линия изгиба не совпадают –
– косой изгиб.

б) Если $I_x = I_y$ ($I_{xy} = 0$) – силовая линия и линия изгиба совпадают –
– прямой изгиб.

(слайд 16-05)