

Устный счёт

Найти 5-ый член числовой последовательности заданной формулой

$$\frac{30n}{n+1}$$

Ответ: 25

2) Найти 4-ый член числовой последовательности заданной формулой

$$\frac{n}{2n+1}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

3) Чему равна разность
арифметической

прогрессии: $1; 4; 7; \dots$

Ответ: 3

4) Чему равна разность
арифметической прогрессии:

$3; 0; -3; -6; \dots$

Ответ: -3

5) Найдите пятый член
арифметической прогрессии:

3; 7; 11; ...

Ответ: 19

6) Найдите шестой член
арифметической прогрессии;

если $a_1 = 5; d = 3$

Ответ: 20

7) Найти 10-ый член
арифметической прогрессии


если $a_9 = 34; a_{11} = 58$

Ответ: 46


8) Найти 5-ый член
арифметической прогрессии

если $a_4 = 18; a_6 = 24$

Ответ: 21



○ Лестница имеет 100 ступеней. На первой сидит один голубь, на второй – два, на третьей – три, и так на всех ступеней до сотой. Сколько всего голубей?



Сумма первых

n членов
арифметической
прогрессии

Задача. Найти сумму ста членов арифметической прогрессии.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

- Впервые формула суммы первых членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (III век н.э.). А правило отыскания суммы n первых членов арифметической прогрессии встречается в «книге Абаки» Л. Фибоначчи в 1202 году



В области прогрессий много работал знаменитый немецкий ученый К. Гаусс (1777-1855).



Когда Карлу было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу:
«Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно».

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 &= \\ &= 101 \cdot 50 = 5050 \end{aligned}$$


Решение задачи про голубей:

~~На 1-й и на 99-й ступенях сидят
всего 100 голубей,~~

~~На 2-й и 98-й тоже 100 и т.д.~~

~~Только 50-я и 100-я остаются
без пары.~~

Таким образом, на лестнице
 $49 \times 100 + 50 + 100 = 5050$
голубей.



*Задача эта не проста,
Как сделать, чтобы быстро
От единицы и до ста
Сложит в уме все числа.
Пять первых связок
рассмотри,
Найдёшь к решению ключи.*

*Давным-давно сказал один
мудрец*

*Что прежде надо
Связать начало и конец
У численного ряда.*



Пусть сумма первых n членов арифметической прогрессии равна S_n тогда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ИЛИ

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

И

Складывая эти **равенства** почленно,

получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{n \text{ слагаемых}} = n \cdot (a_1 + a_n).$$

n слагаемых

Отсюда имеем формулу

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Если учесть, что $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то получим:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

Пример 1

Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии: $1; 3,5; \dots$

Дано:

$\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3,5$$

$$S_{20} = ?$$

Решение:

$$d = 3,5 - 1 = 2,5$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= 1 + 2,5(20 - 1) = \\ &= 1 + 2,5 \cdot 19 = 48,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{1 + 48,5}{2} \cdot 20 = \\ &= 49,5 \cdot 10 = 495 \end{aligned}$$

Ответ:
495

Пример 2

Найдите сумму первых 35 членов арифметической прогрессии, если её шестой член равен 31, десятый 55.

Дано:

$\{a_n\}$ -
арифметическая
прогрессия

$$a_6 = 31$$

$$a_{10} = 55$$

$$S_{35} = ?$$

Решение:

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 31 \\ a_1 + 9d = 55 \end{cases}$$

$$a_1 = 1; d = 6$$

$$S_{35} = \frac{2 \cdot 1 + (35 - 1) \cdot 6}{2} \cdot 35 = 3605$$

Ответ:
3605

Пример 3

Если в арифметической прогрессии $a_1 = 20$ и $d = -0,5$, $S_n = 371$ то найдём a_n ; n

Решение:

Дано:

$\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия

$$a_1 = 20$$

$$d = -0,5$$

$$S_n = 371$$

$$a_n = ?$$

$$n = ?$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$\frac{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-0,5)}{2} \cdot n = 371$$

$$(40 - 0,5(n-1)) \cdot n = 742$$

$$(40 - 0,5n + 0,5) \cdot n = 742$$

$$40,5n - 0,5n^2 = 742$$

$$0,5n^2 - 40,5n + 742 = 0$$

$$n^2 - 81n + 1484 = 0$$

$$n_1 = 28; \quad n_2 = 53$$

$$a_{28} = 6,5; \quad a_{53} = -6$$

Ответ:

$$n = 28; \quad a_{28} = 6,5 \quad \text{и}$$

$$n = 53; \quad a_{53} = -6$$

Найти сумму:

- 1) всех натуральных чисел от 7 до 65 включительно;
- 2) всех натуральных чисел от 11 до 99 включительно;
- 3) всех чётных чисел от 2 до 200 включительно;
- 4) всех нечётных чисел от 9 до 165 включительно.

Ответы:

- 1) $a_1 = 7; d = 1; n = 59 S = 2124$
- 2) $a_1 = 11; d = 1; n = 89 S = 4895$
- 3) $a_1 = 2; d = 2; n = 100 S = 10100$
- 4) $a_1 = 9; d = 2; n = 79 S = 6873$

Это интересно

- Несмотря на тысячелетнюю древность различных задач на прогрессию, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В первом российском учебнике «Арифметика» (1703) Леонтия Филипповича Магницкого, изданного более трехсот лет назад, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины, в нём не дано. Поэтому составитель учебника не без труда справлялся с такими задачами.

Итог урока

Итак, сегодня мы изучили формулы суммы первых членов арифметической прогрессии , рассмотрели способы решения задач разных типов на применение формул суммы n первых членов арифметической прогрессии , учились мыслить нестандартно при выполнении заданий.



Спасибо за урок!

