Тема 2. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Понятие механики, модели в механике

Механика *– часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение *– это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Механика вообще подразделяется на три части: ***статику, кинематику и динамику***.

Кинематика (*от греческого слова kinema – движение*) – *раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (*от греческого dynamis – сила*) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обуславливают это движение.

Статика (*от греческого statike – равновесие*) изучает условия равновесия тел.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения.

Развитие механики, как науки, начиналось с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый **Архимед** (287 – 312 до н.э.) сформулировал закон рычага и законы равновесия плавающих тел.

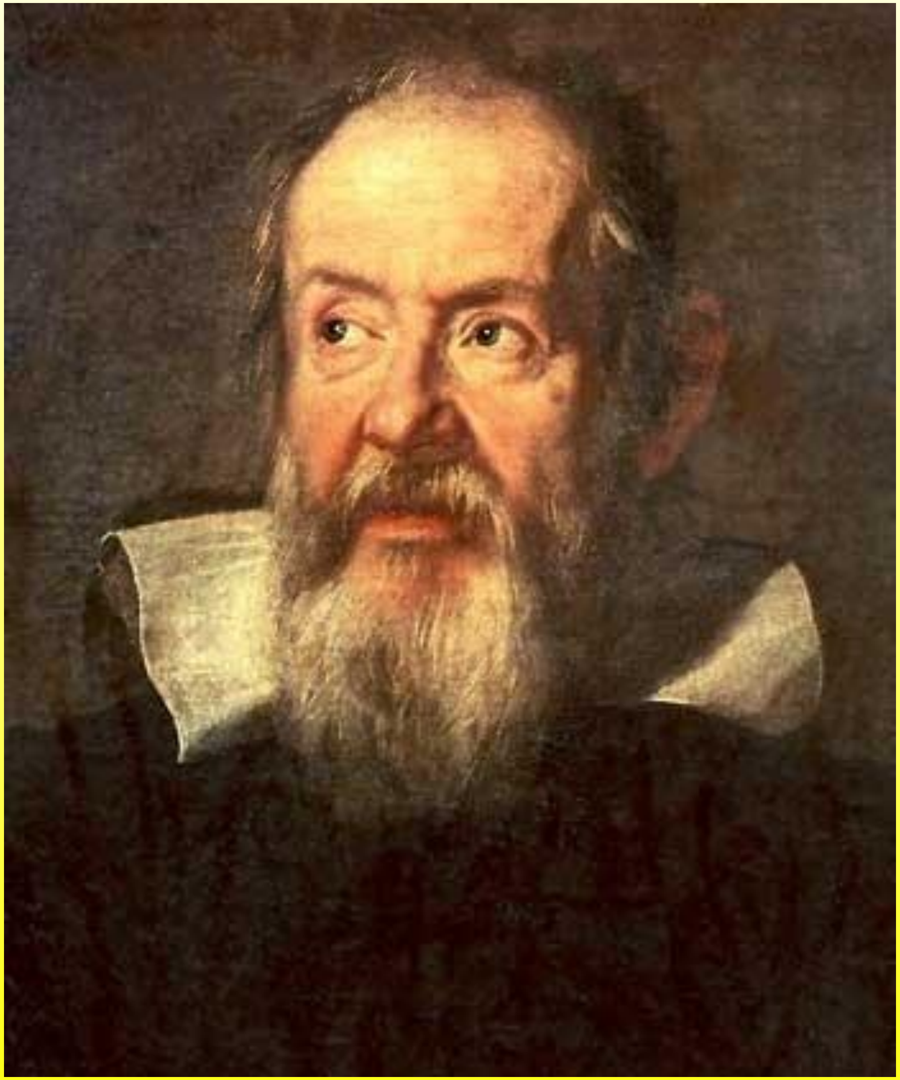
Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом **Г. Галилеем** (1564 – 1642) и окончательно сформулированы английским физиком **И. Ньютоном** (1643 – 1727).

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической****, т.к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме*.

Галилео Галилей

(Galileo Galilei)

Родился	*15 февраля 1564* *Пиза (Pisa)* *Италия*
Умер	*8 января 1642* *Арчетри (Arcetri)* *Италия*



астроном, философ и физик.

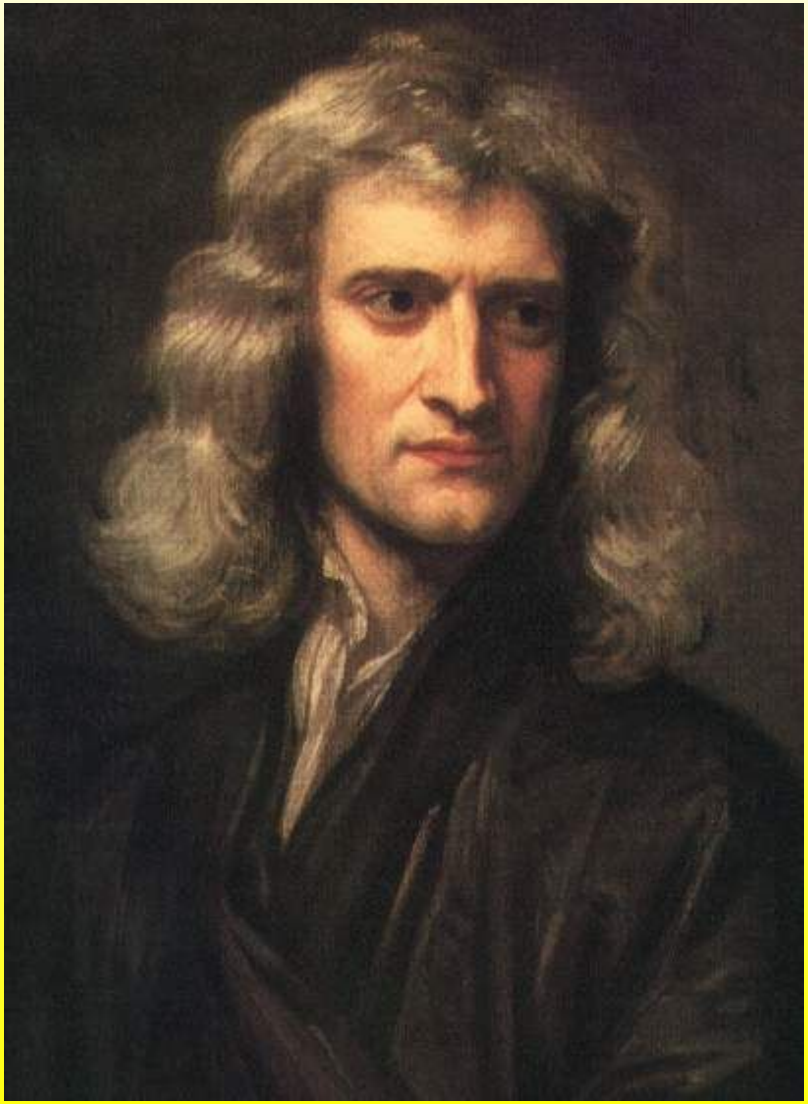
Важнейшие роботы

улучшение телескопа; астрономические наблюдения;

первый закон движения

Исаак Ньютон
(Isaac Newton)

Родился	*4 января 1643* *Вулсторп (Woolsthorpe)* *Англия*
Умер	*31 марта 1727* *Лондон (London)* *Англия*



физик, математик, астроном, алхимик и философ

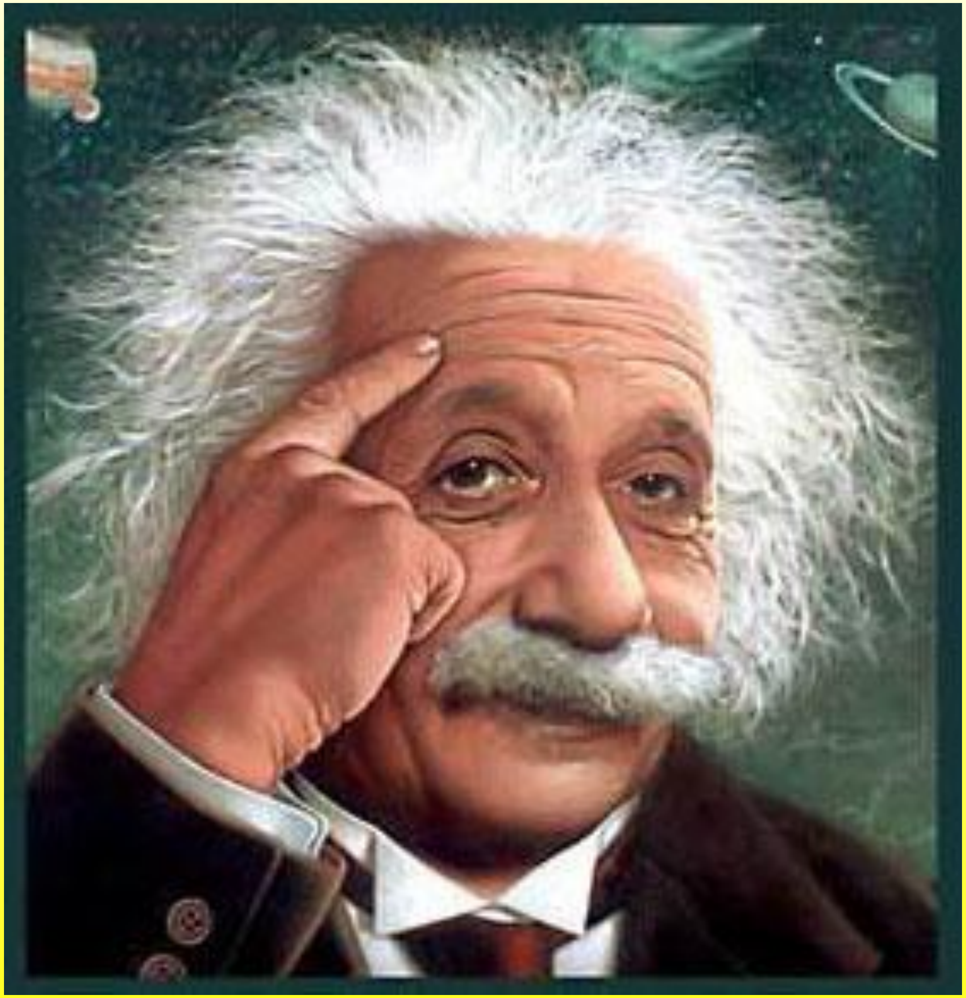
Важнейшие работы

закон всемирного тяготения
дифференциальное и интегральное исчисления
изобрел зеркальный телескоп
развил корпускулярную теорию света

Альберт Эйнштейн

(Albert Einstein)

Родился	*14 марта 1879* *Ульм (Ulm)* *Германия*
Умер	*18 апреля 1955* *Принцетон (Princeton)* *США (New Jersey)*



величайший ученый 20 века

Важнейшие работы:

теория относительности; квантовая и статистическая механика; космология

Нобелевская премия по физике 1921

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели.* Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела* *и* *материальной точки.*

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму.

Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют абсолютно твердым телом (*хотя абсолютно твердых тел в природе не существвует*).

Тело, размерами которого в условиях данной задачи, можно пренебречь, называется ***материальной точкой.***

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце – тоже материальная точка в Солнечной системе).

2.2. Система отсчета, тело отсчета

Всякое движение *относительно,* поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета.***

Практически, для описания движения приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова, сферическая, и т.д.).

Система отсчета – *совокупность системы координат и часов, связанных с телом по отношению к которому изучается движение.*

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени и наоборот).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является, декартова или прямоугольная система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

В декартовой системе координат, положение точки ***A*** в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиус-вектором $\vec{r}$ проведенным из начала координат в данную точку (рисунок 2.1).

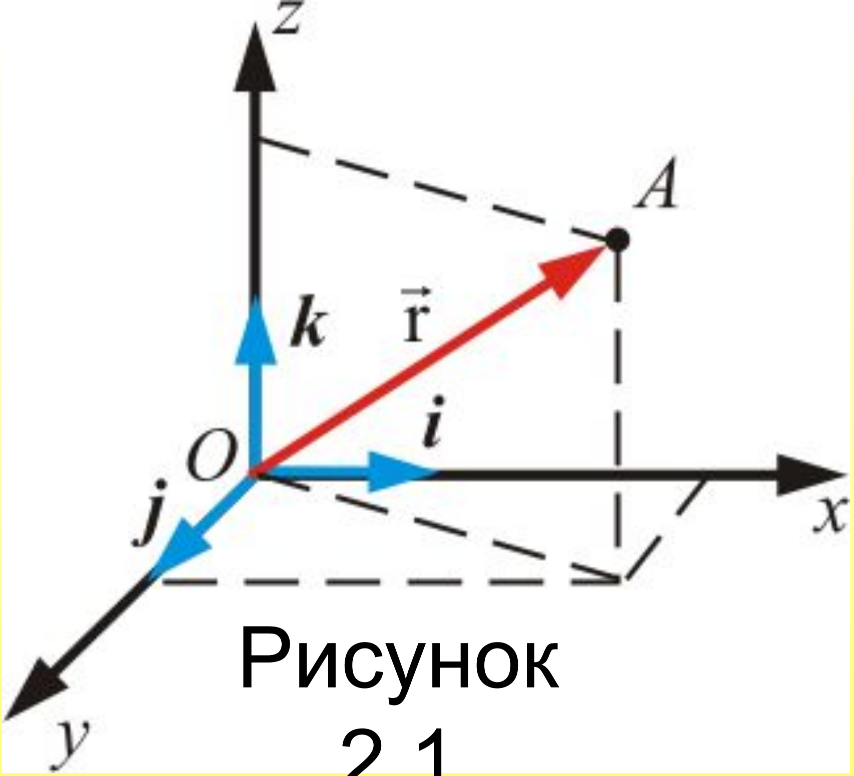


Рисунок 2.1

При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \quad (2.2.1)$$

Уравнения движения

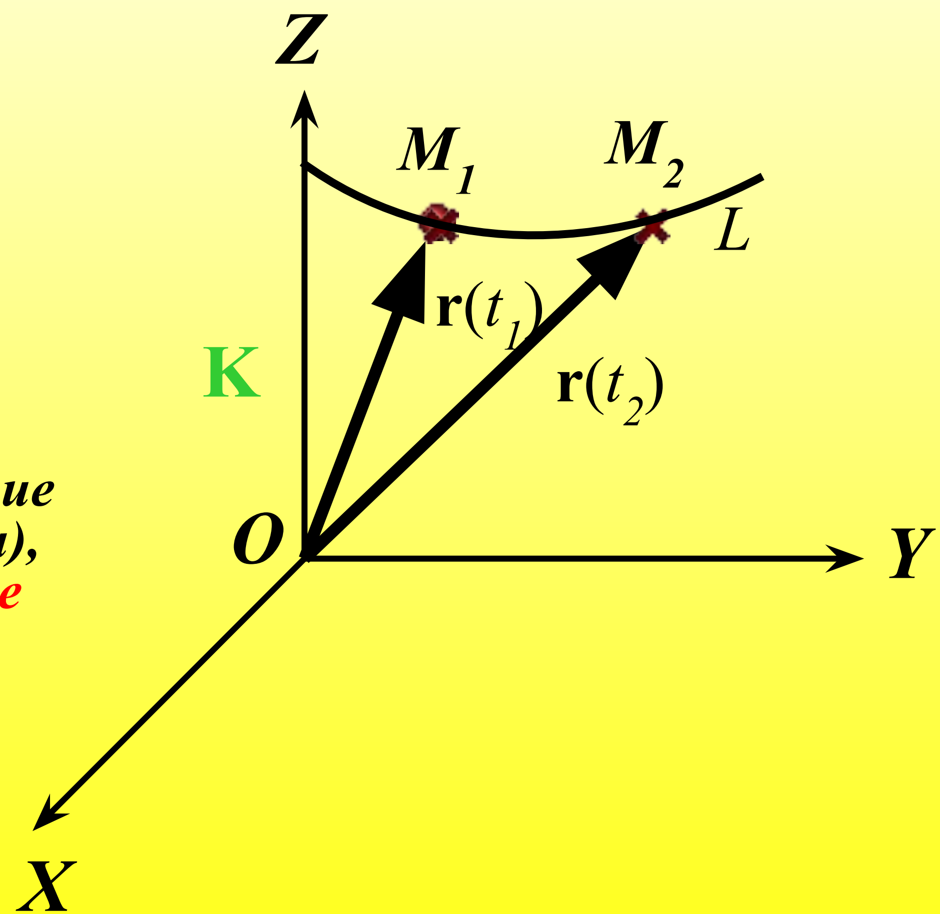
Рассмотрим движение материальной точки относительно некоторой СО K

Пусть за некоторый промежуток времени материальная точка переместилась из точки пространства M_1 в точку M_2

Соединим начало координат с точками M_1 *и* M_2

- это **радиус-векторы** $\mathbf{r}(t_1)$ *и* $\mathbf{r}(t_2)$

Уравнения движения, ***описывающие положение материальной точки), можно записать в векторном виде или в координатной форме***



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad (2.2.2)$$

где *x*, *y*, *z* – проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат, а ***i***, ***j***, ***k*** – ***единичные векторы*** (***орты***), направленные по соответствующим осям.

Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы.***

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z). Если она движется на плоскости – две степени свободы. Если вдоль линии – одна степень свободы.

2.3. Кинематика материальной точки

2.3.1. Путь, перемещение

Положение точки *A* в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r}_1$ проведенного из точки отсчета *O* или начала координат

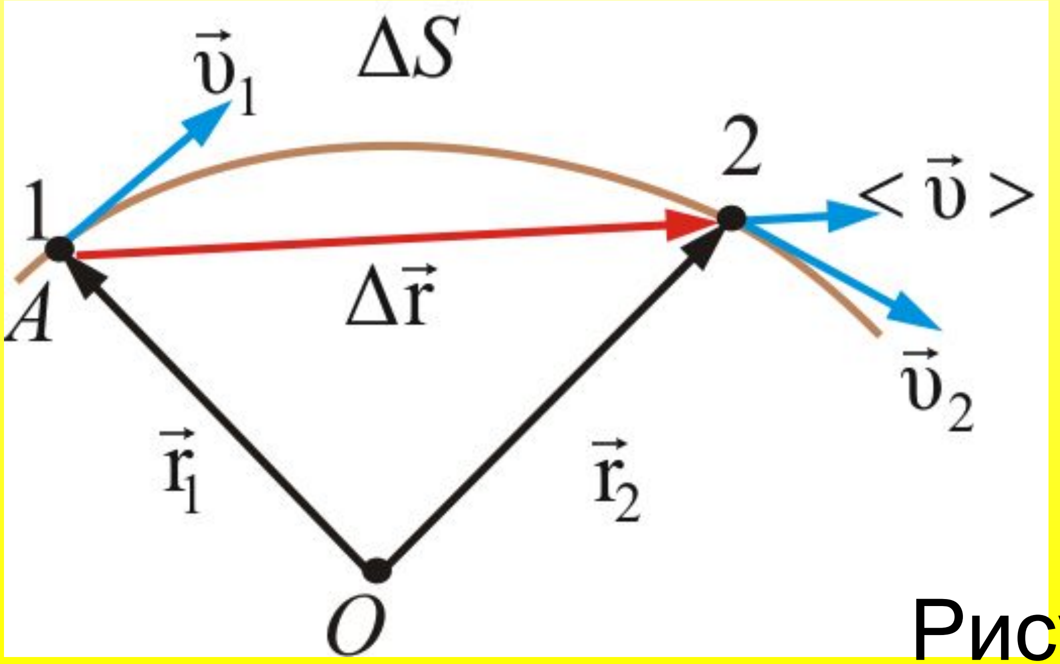
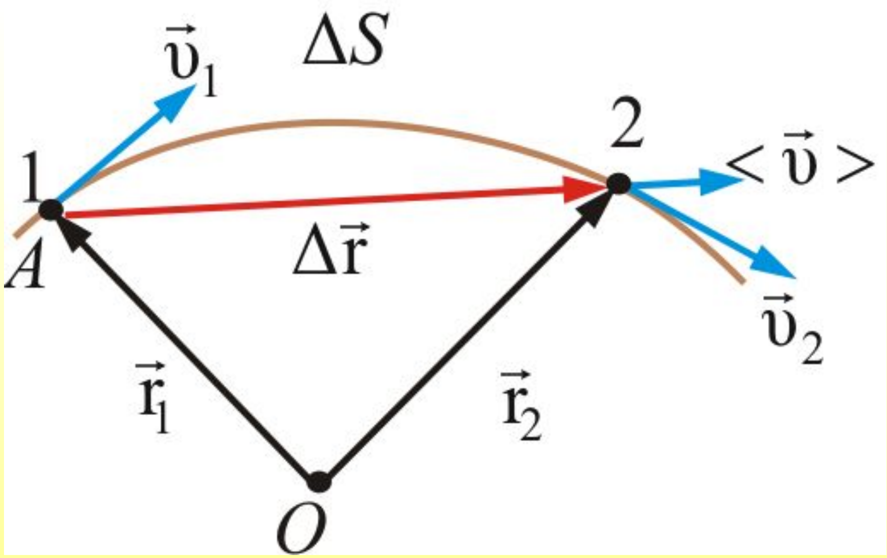


Рисунок 2.4



При движении точки *A* из точки 1 в точку 2 её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т.е. $\vec{r}$ зависит от времени *t*.

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ называется ***траекторией точки****.*

Длина траектории есть путь ***ΔS***. Если точка движется по прямой, то приращение $\Delta\vec{r}$ равно пути Δ*S*.

Пусть за время Δt точка A переместилась из точки 1 в точку 2.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}; \quad (2.3.1)$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}; \quad (2.3.2)$$

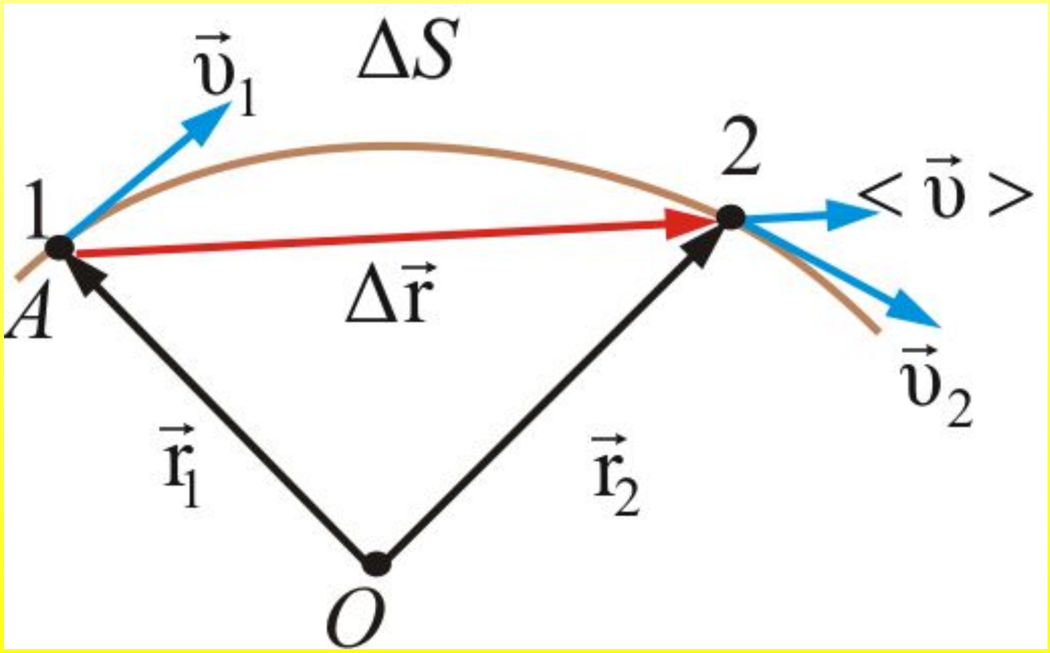
$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3.3)$$

2.3.2. Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло

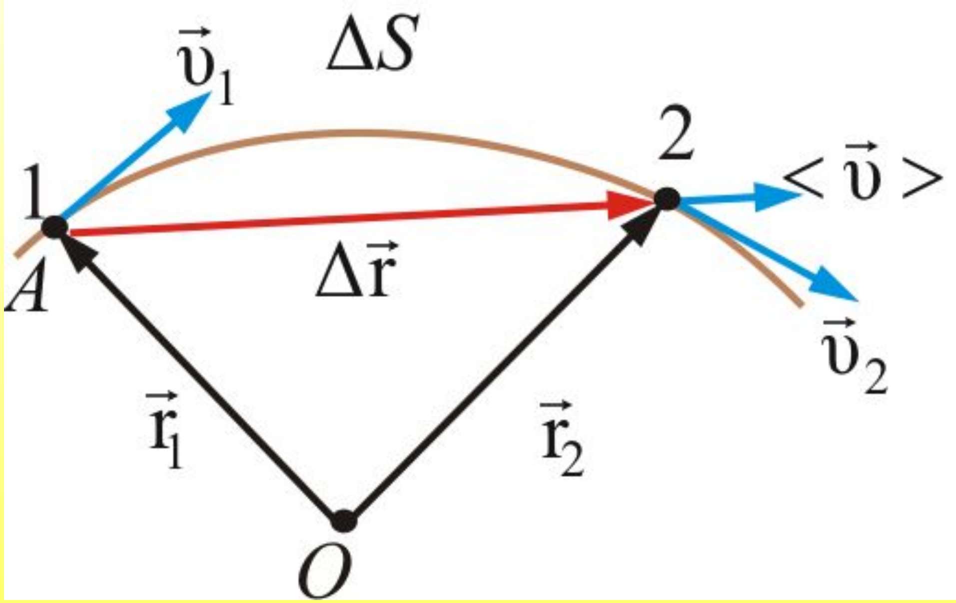
$$\boxed{\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \langle\vec{\upsilon}\rangle}$$

Вектор $\Delta\vec{r}$ совпадает с направлением вектора $\langle\vec{\upsilon}\rangle$



Мгновенная скорость в точке 1:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$***-вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от*** $\vec{r}$ ***по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А.***

Модуль вектора скорости $\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|.$

При $\Delta t \to 0$ т.е. на бесконечно малом участке траектории $\Delta S = \Delta r$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – ***путь:***

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \qquad \text{или} \qquad \upsilon = \frac{dS}{dt}.$$

Так вычислять скорость проще, т.к. S – скаляр

Обратное действие – интегрирование

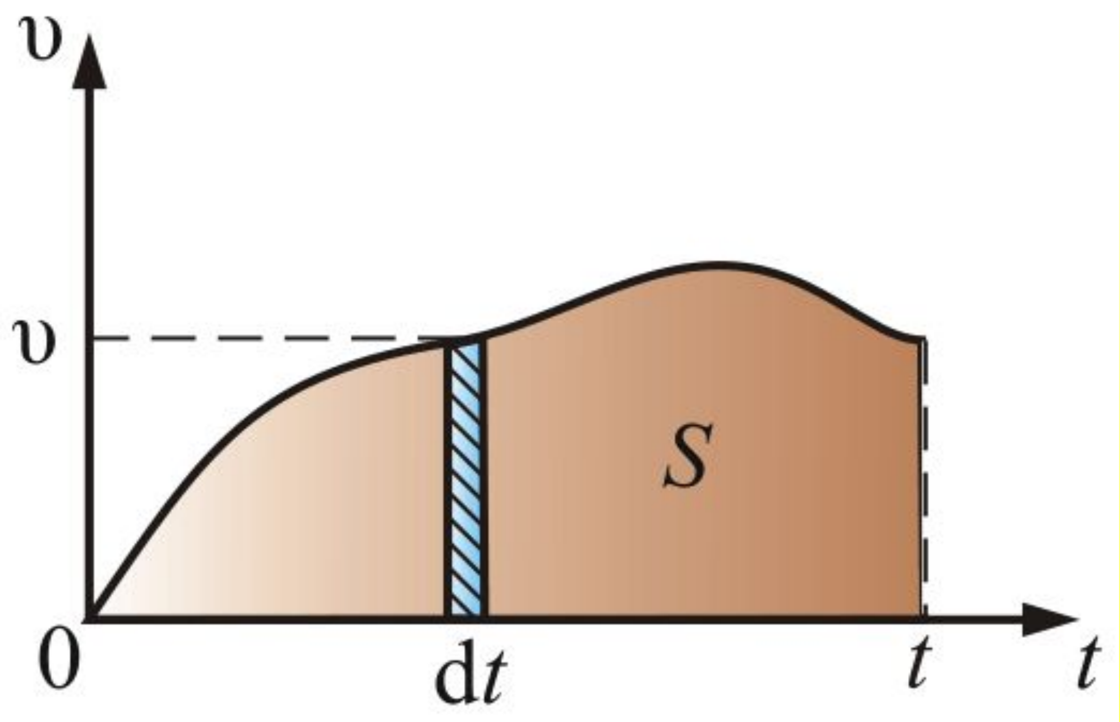
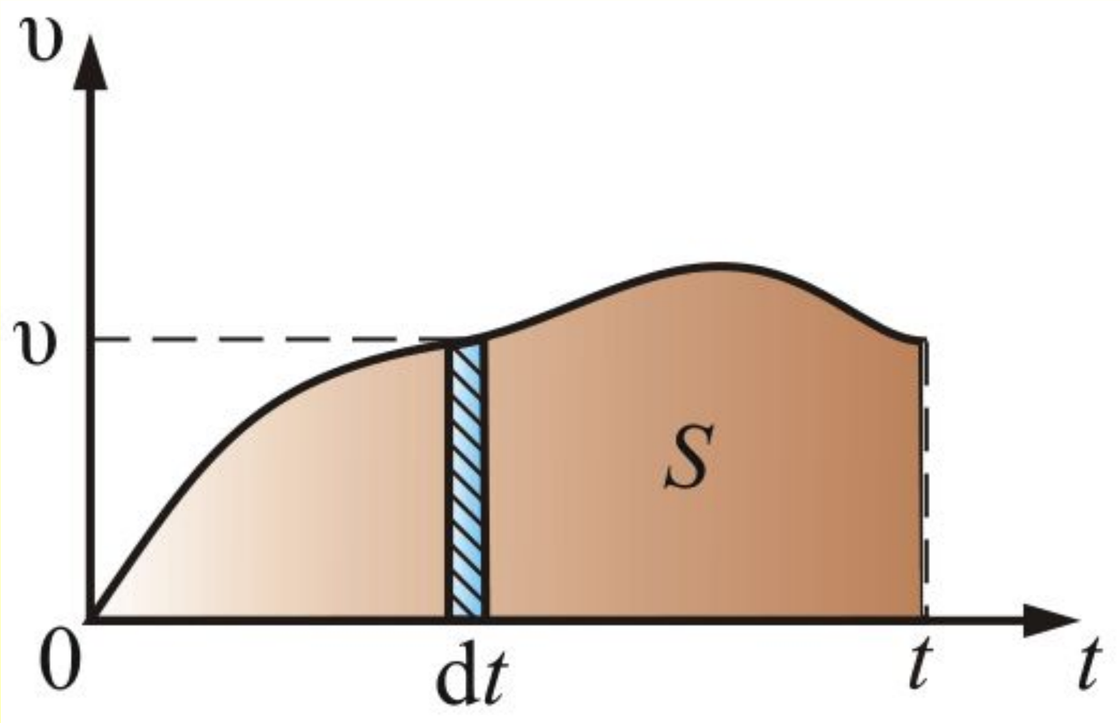


Рисунок 2.5

$\mathrm{d}S = \upsilon \mathrm{d}t$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь *S* за время *t*, надо сложить площади всех прямоугольников.

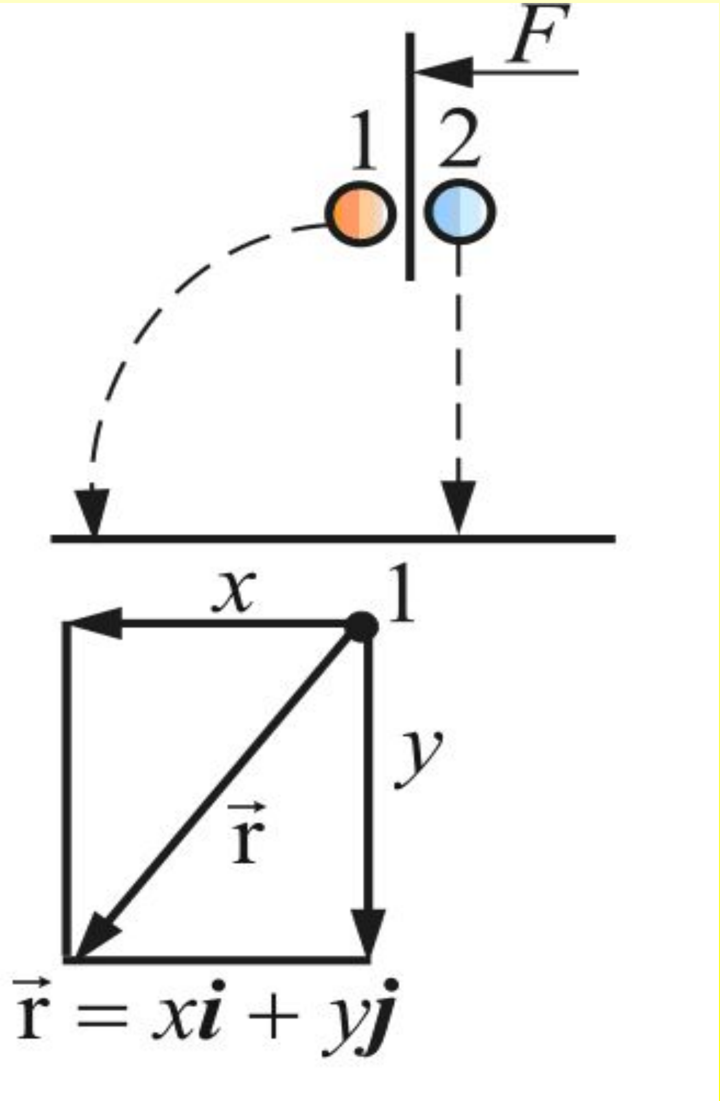


$$S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t. \qquad (2.3.5)$$

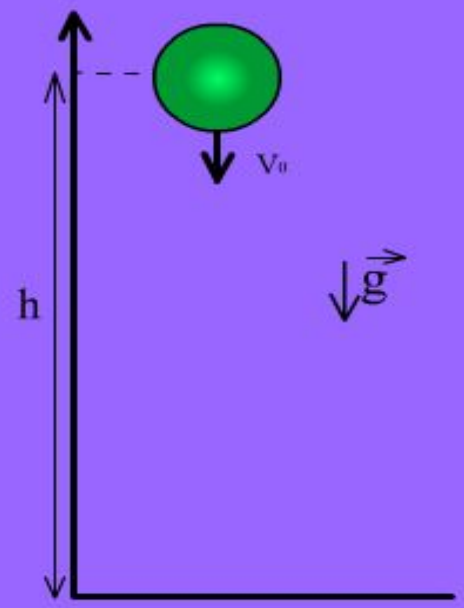
Геометрический смысл этого интеграла в том, что ***площадь под кривой*** $\upsilon(t)$ ***есть путь тела за время t.***

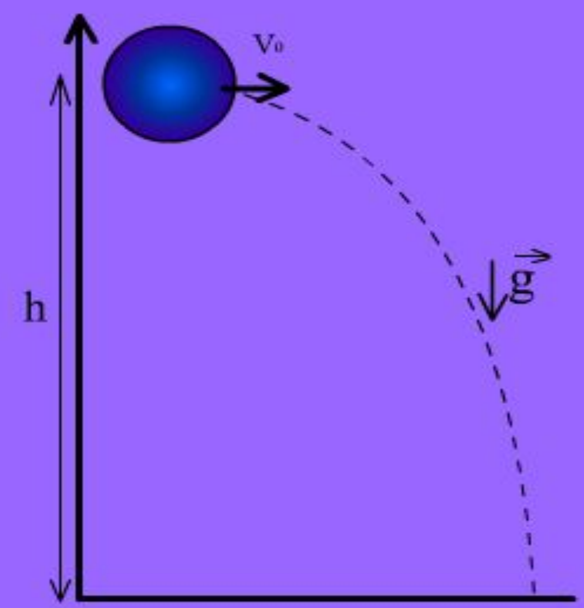
Принцип независимости движения.
(*Принцип суперпозиции*)

Рассмотрим простой опыт



Этот опыт доказывает *принцип независимости движения* (*действия сил*).





$$y = h_{0y} + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2} \qquad y = h_{0y} + v_0 t \sin\alpha + \frac{g_y t^2}{2}$$

$h_{0y} = 0;\ v_{0y} = 0;\ g_y = g;\ y = h$ $\qquad h_{0y} = 0;\ y = h;\ g_y = g;\ \alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

Назад $\quad h = \frac{gt^2}{2} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ **время падения в обоих случаях зависит лишь от высоты**

Движение тел в поле тяжести Земли

Пушка.avi

Если пушка расположена в точке с координатами (0, 0, 0), то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнениями:

$$X = (v\cos\phi)t$$

$$Y = (v\sin\phi)t - gt^2/2,$$

где v - скорость снаряда вдоль ствола пушки, ϕ - угол между стволом пушки и горизонтом (ось X), t - время,

g - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли.

Подставляя t из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

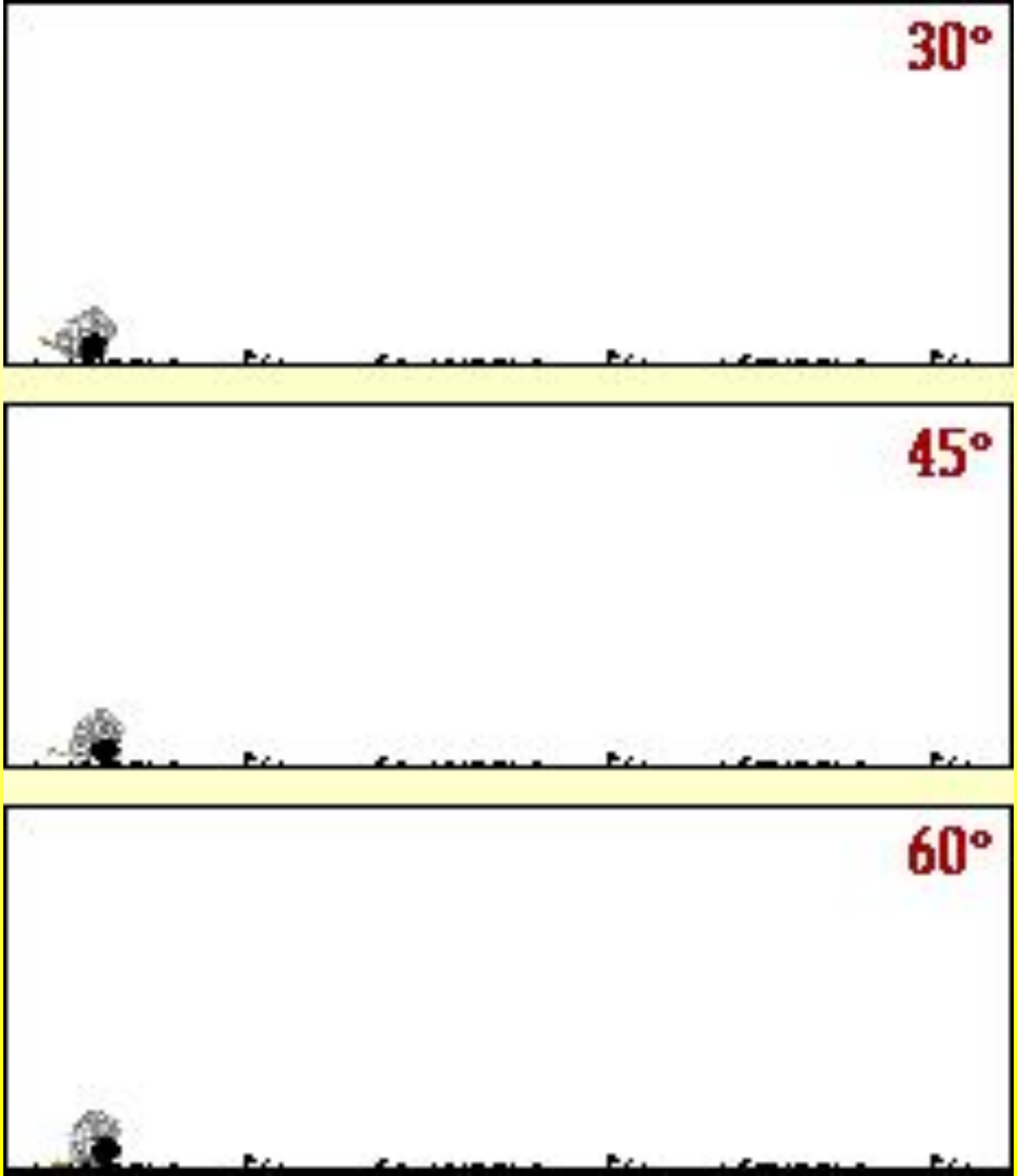
$$Y = X\,\mathrm{tg}\phi - (g/2v^2)(1 + \mathrm{tg}^2\phi)\,X^2$$

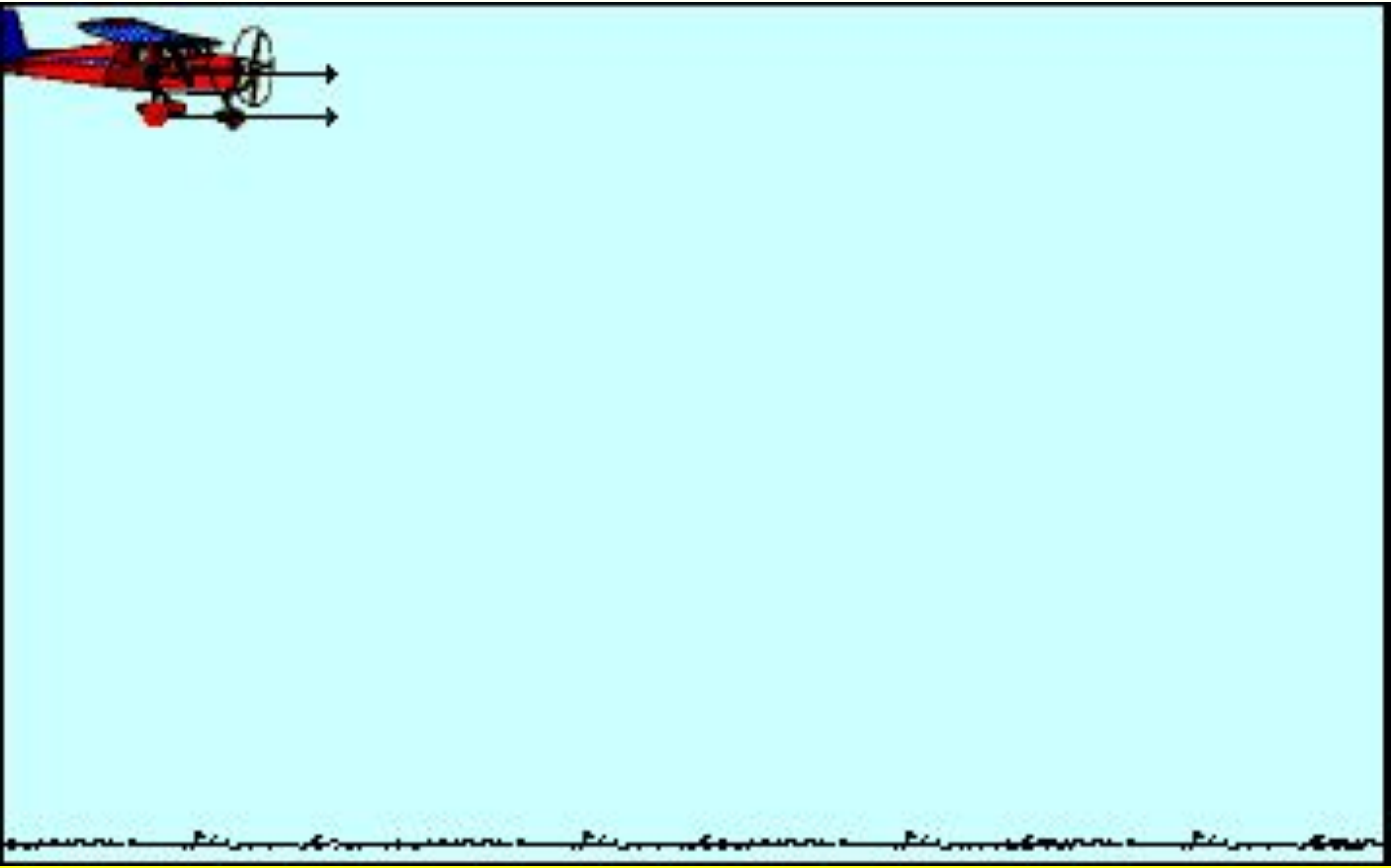
Из этого уравнения находим максимальную дальность стрельбы X_{max} (при этом $Y=0$) и максимальную высоту полёта Y_{max} (первая производная Y по координате X равна нулю):

$$X_{max} = v^2\sin(2\phi)/g$$

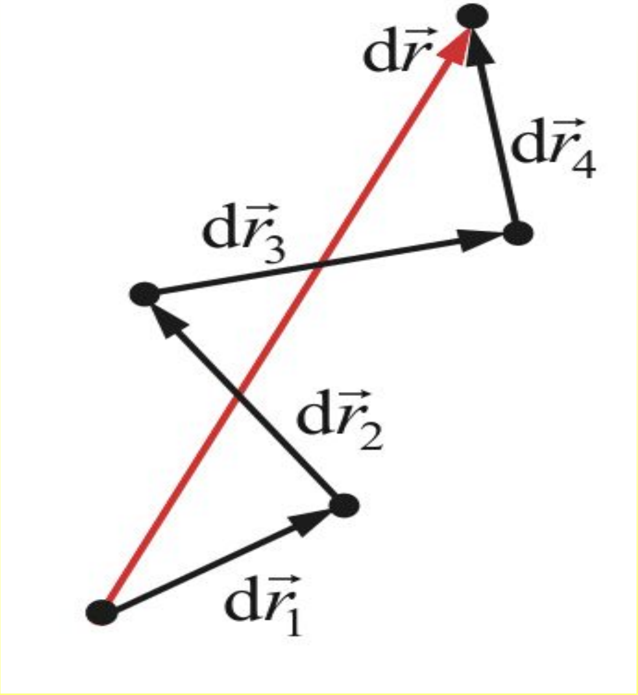
$$Y_{max} = v^2\sin^2\phi/2g$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом ϕ, равном 45°.


30°
45°
60°



Принцип независимости движения (действия сил)



- Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее *результирующее перемещение* $d\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности:

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \ldots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i,}$$

Так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Тогда $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$

$$\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}.$$

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В дальнейшем мы подробнее рассмотрим принцип независимости действия сил.

В физике существует общий принцип, который называется ***принцип суперпозиций (принцип наложения)*** – *допущение, согласно которому* ***результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности,*** *при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Принцип суперпозиции играет большую роль во многих разделах физики и техники.

2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета.

Положение точки *A* (рисунок 2.8) задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси – *x*, *y*, *z*.

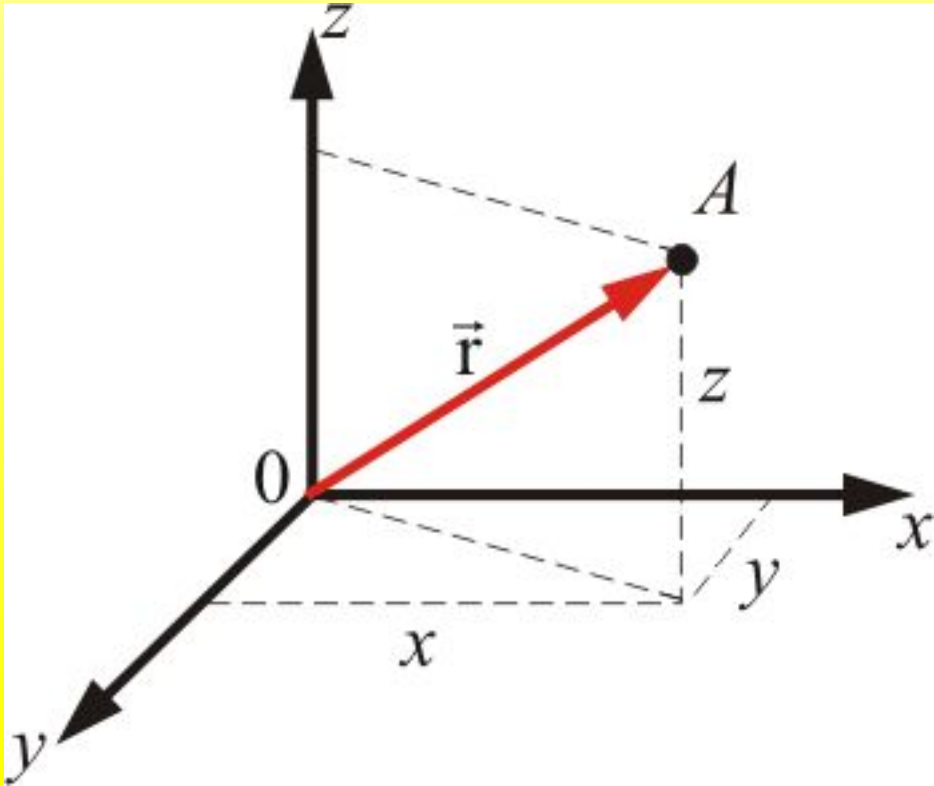


Рисунок 2.8

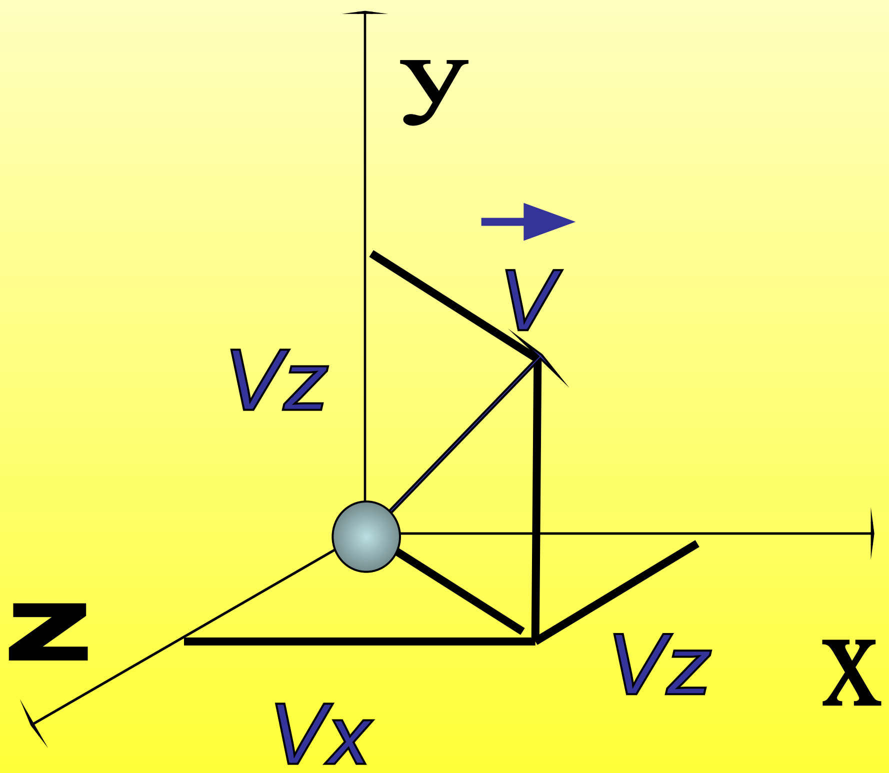
Понятно, что *x*, *y*, *z* зависят от времени *t*, т.е. *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*). Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки) можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекция вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на ось *x*

равна: $$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Здесь d*x* – проекция вектора перемещения $\mathrm{d}\vec{r}$ на ось *x*.

Аналогично: $$\upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \quad \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$



y
V
Vz
z
Vz
X
Vx

Так как $\vec{\upsilon}$ вектор, то

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \boldsymbol{i} + \upsilon_y \boldsymbol{j} + \upsilon_z \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}, \quad (2.3.6)$$

где ***i, j, k*** единичные векторы – орты.

Модуль вектора скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y + \upsilon^2{}_z}$$

2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуются* ***ускорением*****:**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}} \qquad (2.3.7)$$

Ускорение величина векторная.

При криволинейном движении $\vec{\upsilon}$ изменяется и по времени и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Из выражения (2.3.7) на эти вопросы не ответишь.

Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рисунок 2.9), связанный с точкой 1 и направленный по касательной к траектории движения точки 1 (векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\tau}$ в точке 1 совпадают).

Тогда можно записать:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},}$$

Где $\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right|$ – модуль вектора скорости.

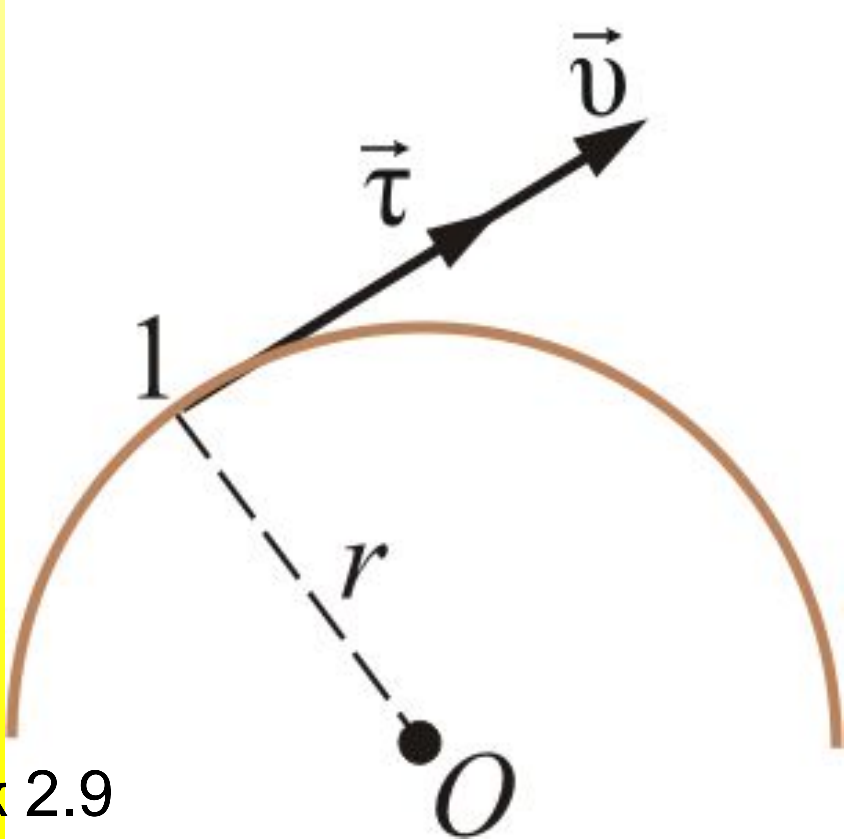


Рисунок 2.9

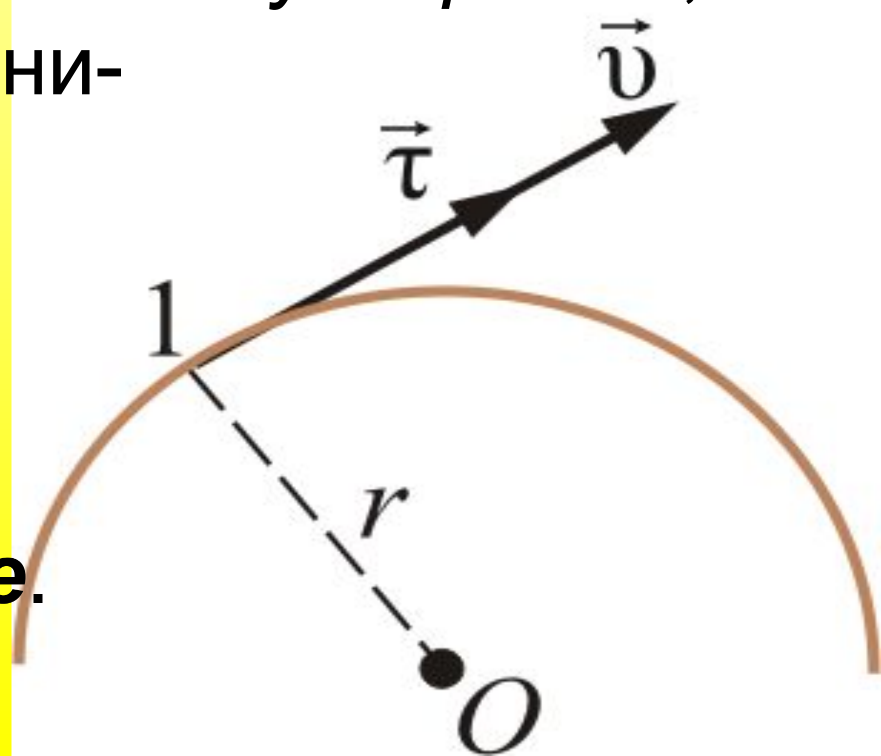
Найдем общее ускорение:

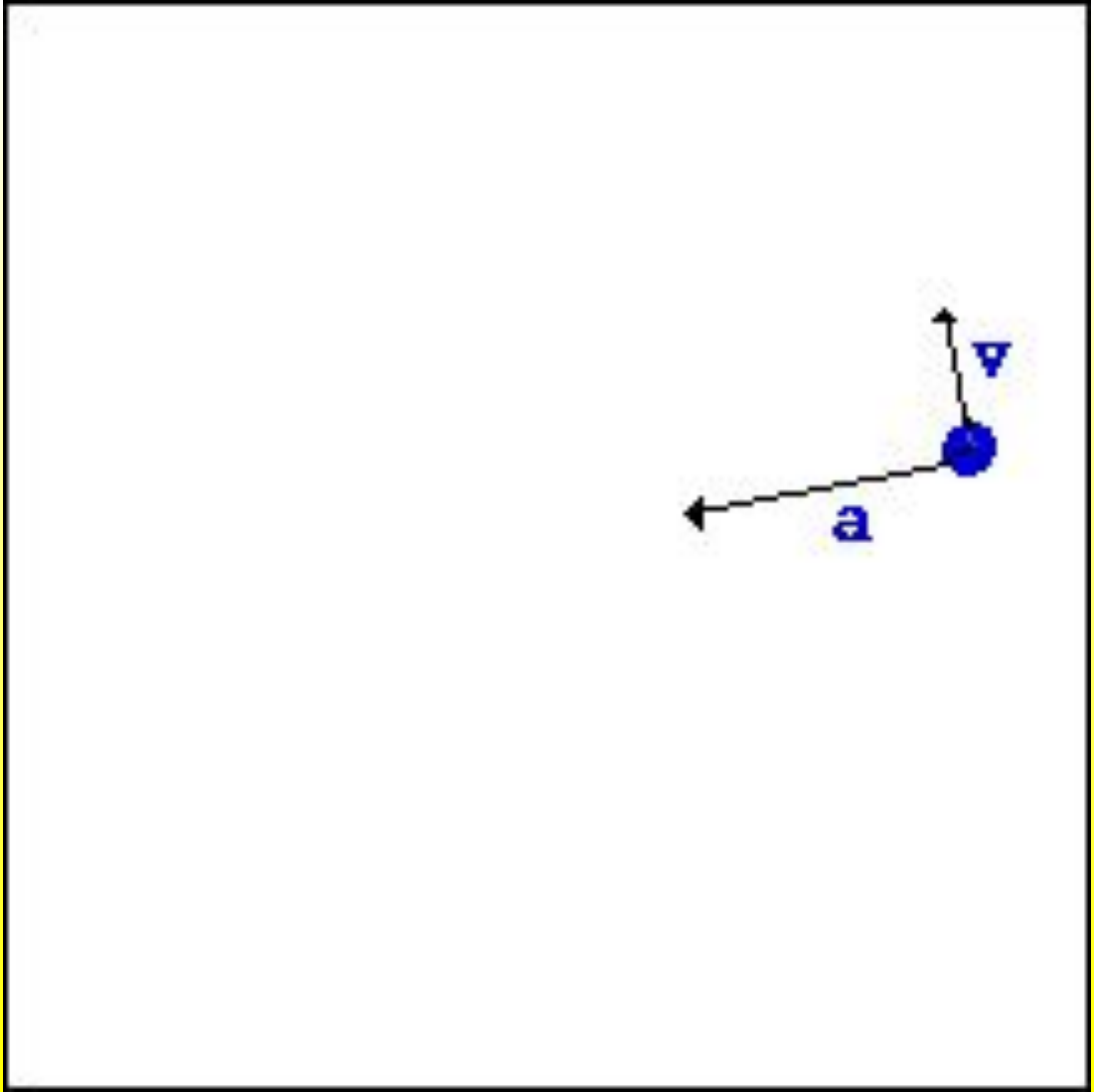
$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}.} \quad (2.3.8)$$

Получили два слагаемых ускорения:

$\vec{a}_{\tau}$ – *тангенциальное* *ускорение*, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке.

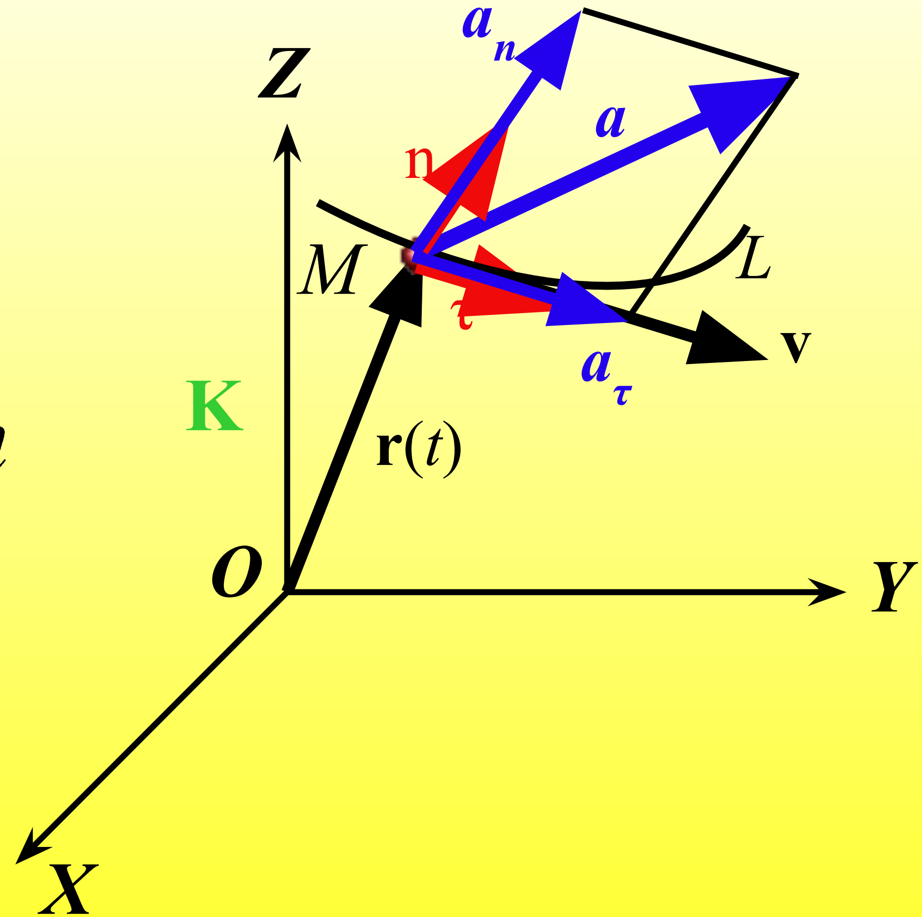
$\vec{a}_{n}$ – **нормальное** ***ускорение*** или ***центростремительное***.




v
a

При произвольном движении точки имеем:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$



$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}}$$ или по модулю $$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}}$$

$\vec{a}_\tau$ показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $\dfrac{d\upsilon}{dt} > 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$ т.е. ускоренное движение;

- если $\dfrac{d\upsilon}{dt} < 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$ т.е. замедленное движение;

- при $\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$ то $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \text{const}$ – движение с постоянной по модулю скоростью.

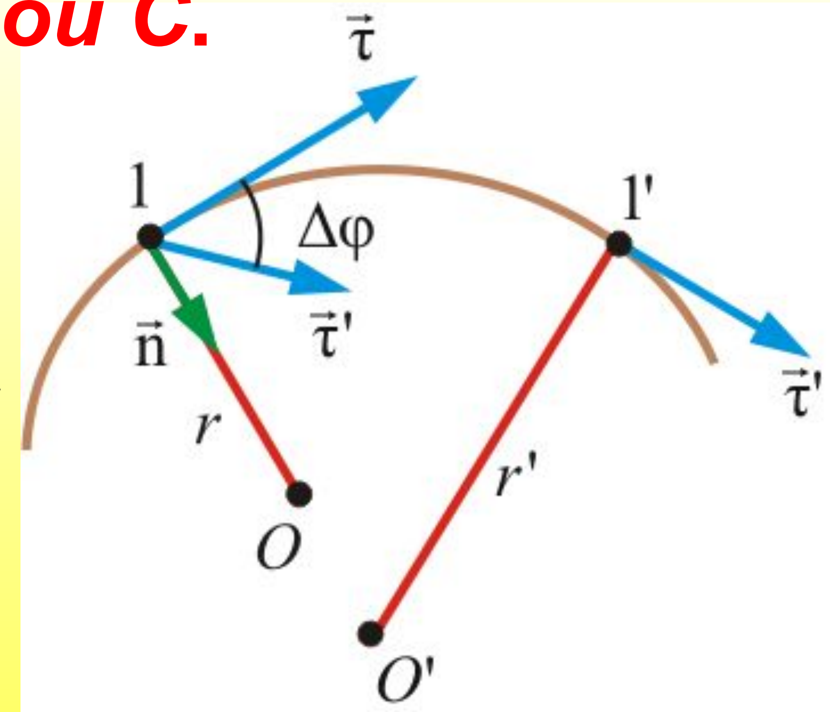
Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (2.3.8), т.е. *нормальное ускорение:*

$$\boxed{\vec{a}_n = \upsilon \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}.}$$

Быстрота изменения направления касательной $(\mathrm{d}\vec{\tau}/\mathrm{d}t)$ к траектории определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется **кривизной С.**

Радиус кривизны r *– радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке* d*S*.



$$\boxed{r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi}.}$$

Ускорение при произвольном движении

При **произвольном** ***движении материальной точки*** **величина** ***r будет равна*** **радиусу некоторой моментальной** ***(т.е. соответствующей данному моменту времени)*** **окружности**

в любой точке траектории ***движение материальной точки*** *можно рассматривать как* **вращательное движение по окружности,** ***(с касательным a_τ и нормальным a_n ускорениями)***

Саму величину r называют **радиусом кривизны траектории** ***в данной точке***

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$$

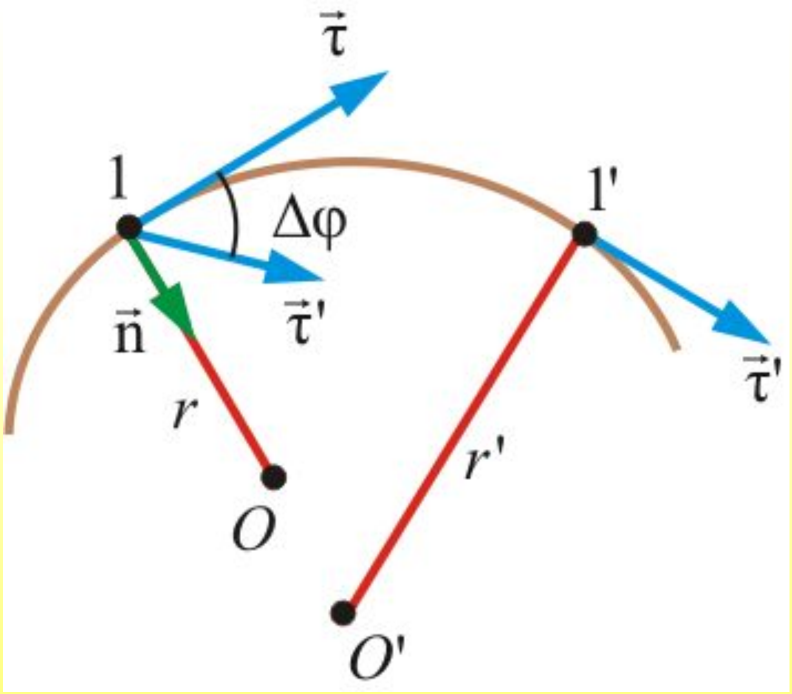


Рисунок 2.10

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор $\vec{n}$, показывающий направление изменения угла.

Т.о. $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной $(\vec{\tau})$ в данной точке, т. е. по радиусу кривизны к центру кривизны.

$$d\varphi = \frac{dS}{r} \qquad dS = \upsilon dt \qquad d\varphi = \frac{\upsilon dt}{r} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{r}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon}{r}\vec{n} \qquad \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$$

отсюда $\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n},}$ – ***нормальное ускорение*** или ***центростремительное*** т.к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно $\vec{\tau}$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости*

Модуль нормального ускорения:

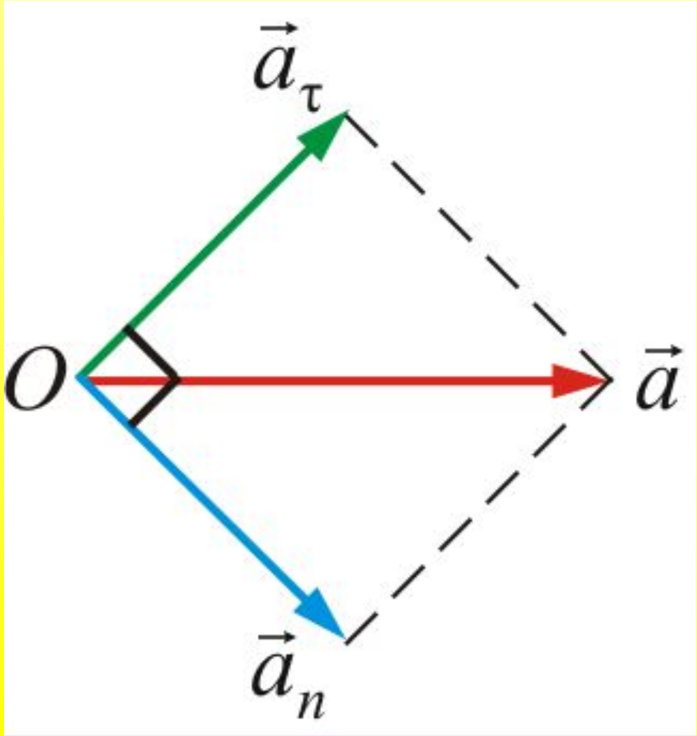
$$\boxed{\left|\vec{a}_n\right| = a_n = \frac{\upsilon^2}{r}.}$$

Центростремительным *называют ускорение – когда движение происходит по окружности.*

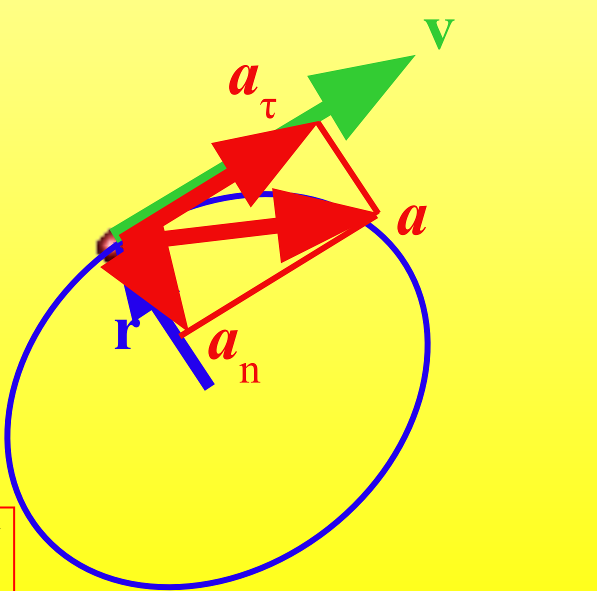
А когда движение происходит по произвольной кривой – говорят, *нормальное ускорение*, перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Возвращаясь к выражению (2.3.8), можно записать что, **суммарный вектор ускорения** при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

$a_\tau = 0;\ a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;

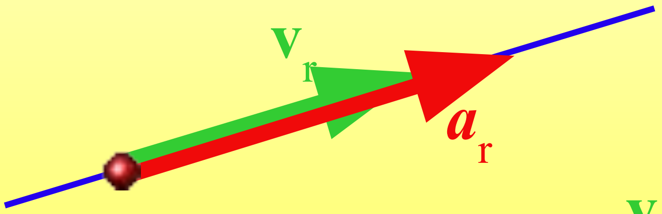
$a_\tau = \mathrm{const};\ a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;

$a_\tau = 0;\ a_n = \mathrm{const}$ – равномерное движение по окружности.

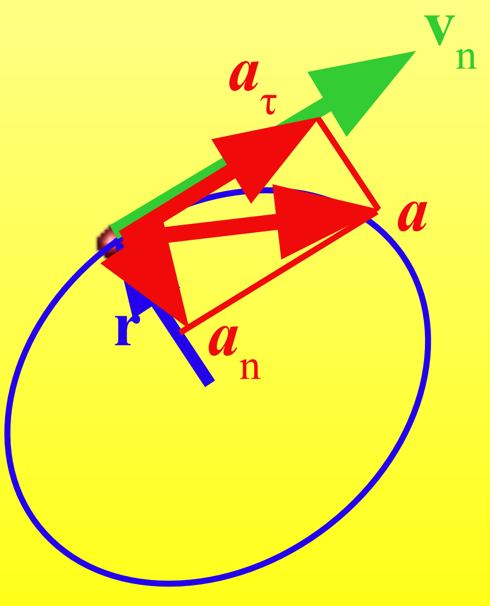
Типы ускорений

Чтобы более **наглядно** ***представить свойства введенных*** **составляющих полного ускорения,** ***рассмотрим примеры движений частицы, при которых эти составляющие возникают***

Частица движется **прямолинейно**



Частица движется **по дуге окружности**



Вспомним несколько полезных формул:

При равномерном движении $S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t = \upsilon t$

При движении с постоянным ускорением

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

Обратная задача кинематики заключается в том, что по известному значению ускорения *a*(*t*) найти скорость точки и восстановить траекторию движения *r*(*t*).

По определению $$a(t)=\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t},$$

отсюда $$\boxed{\upsilon(t)=\upsilon(t_0)+\int_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t}$$

или, так как $\upsilon(t)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,

Следовательно $$\boxed{r(t)=r(t_0)+\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)\mathrm{d}t.}$$

2.4. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;

- вращательное вокруг неподвижной оси;

- плоское;

- вокруг неподвижной точки;

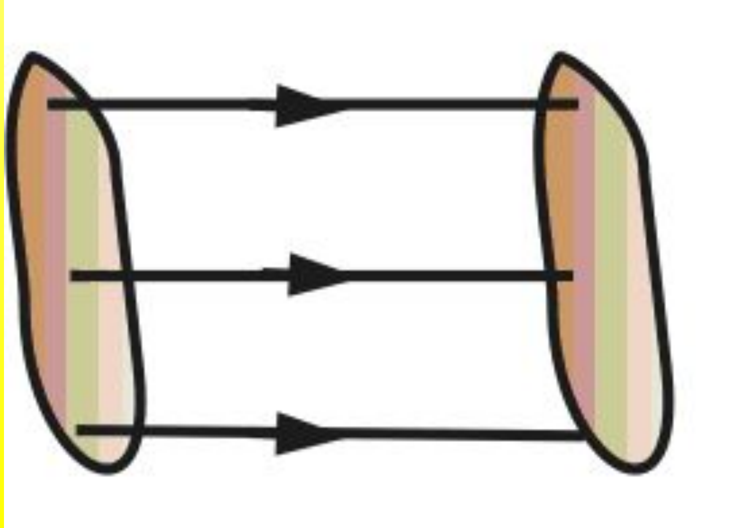
- свободное.

Поступательное **движение** ***и*** ***вращательное*** **движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела.**

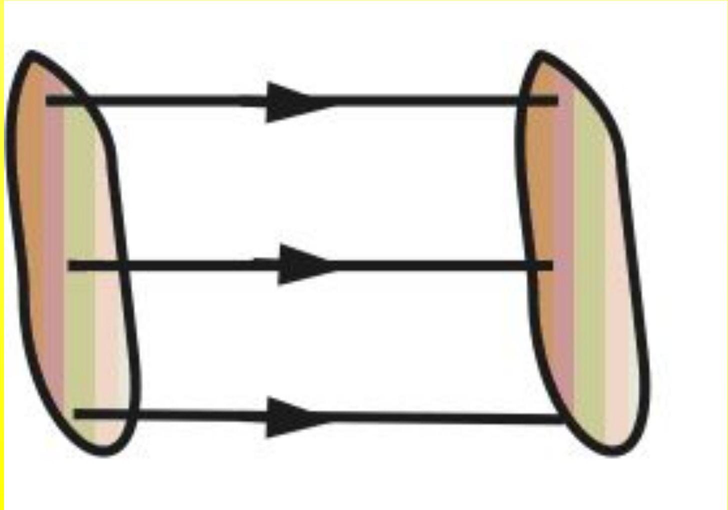
Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному их этих основных видов или к их совокупности.

2.4.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение – *это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению и при этом, все точки твердого тела совершают* ***равные перемещения.***



Скорости и ускорения *всех точек* твердого тела в данный момент времени t одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки, т.е. к задаче кинематики материальной точки, подробно рассмотренной в п. 2.3.



При ***вращательном движении*** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой OO', называемой *осью вращения* (рисунок 2.3).

Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

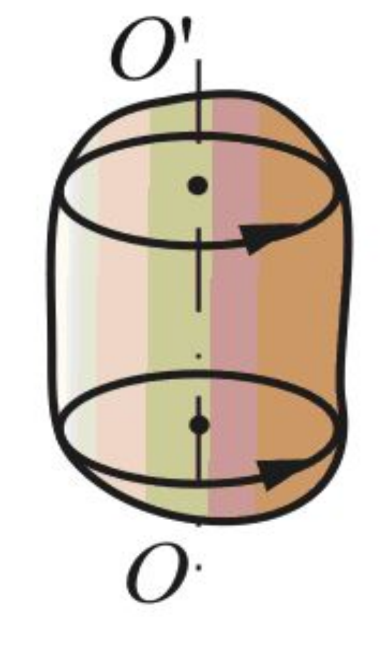


Рисунок 2.3

2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

*Движение твердого тела, при котором две его точки О и О' остаются неподвижными, называется **вращательным движением вокруг неподвижной оси**, а неподвижную прямую ОО' называют **осью вращения**.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси *ОО'*

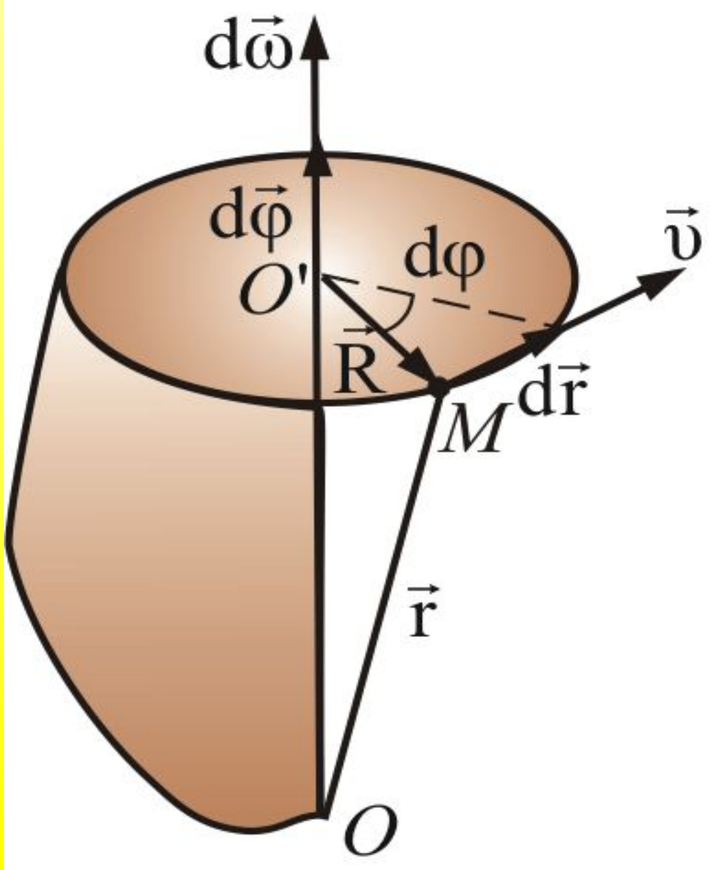


Рисунок 2.12

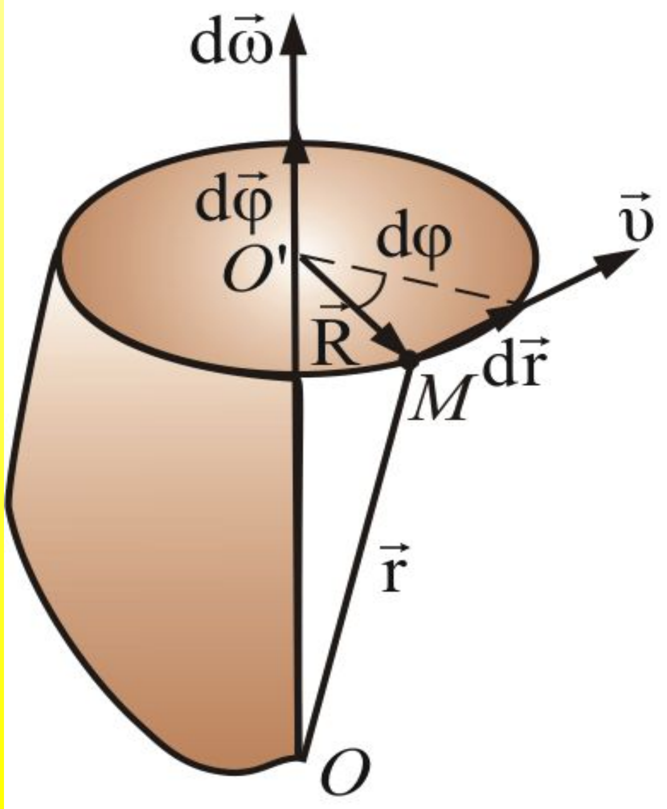
Проследим за некоторой точкой *M* этого твердого тела. За время $\mathrm{d}t$ точка *M* совершает элементарное перемещение

При том же самом угле поворота $\mathrm{d}\varphi$ другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояния, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела,

ни первая производная $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

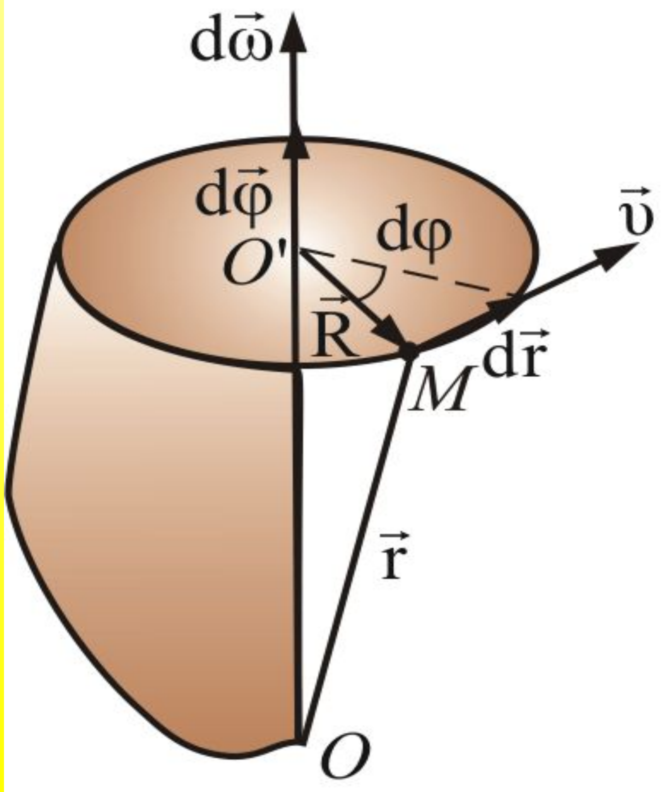
ни вторая производная $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.



Угол поворота $d\varphi$ характеризует *переме-щения всего тела за время* dt (**угловой путь**)

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO′* так, чтобы глядя вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика).



Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

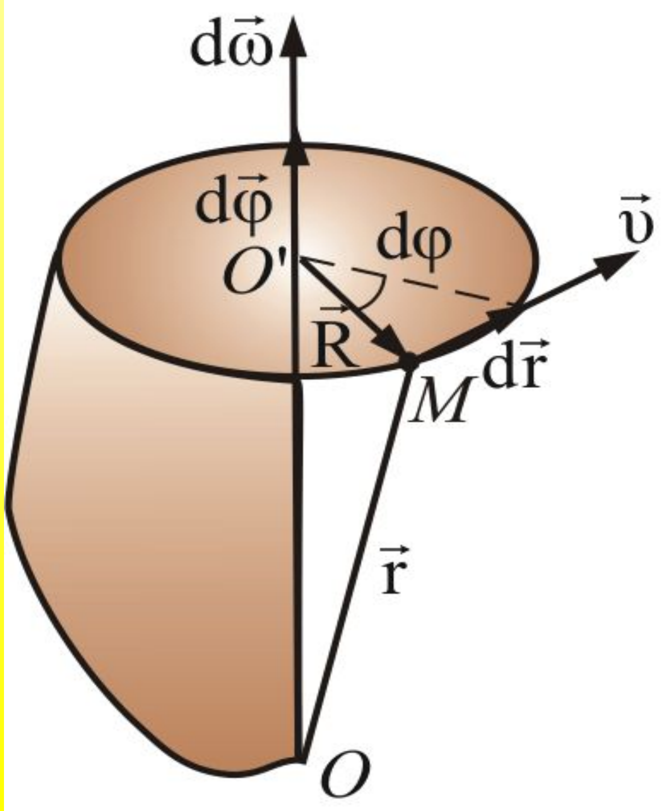
$$\mathrm{d}\vec{\varphi} = \mathrm{d}\vec{\varphi}_1 + \mathrm{d}\vec{\varphi}_2 .$$

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ *называется вектор численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении* $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.4.1)$$

Связь линейной и угловой скорости

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени d*t* точка *M* проходит путь $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t.$ В то же время $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\varphi$ (центральный угол). Тогда,



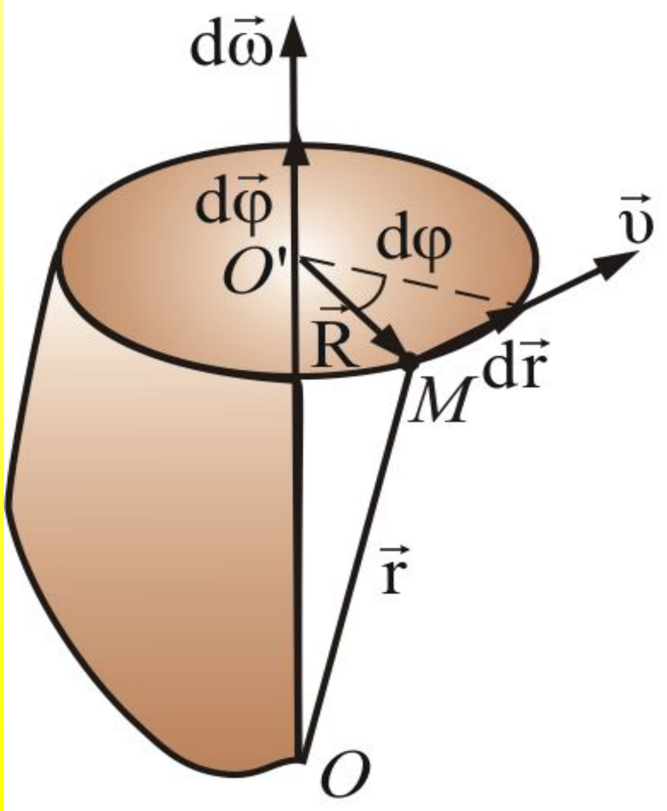
$$\boxed{\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega R}$$

(2.4.2)

$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

В векторной форме $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$

Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$



Период T – *промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

Частота ν – *число оборотов тела за* 1 *сек.*

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$

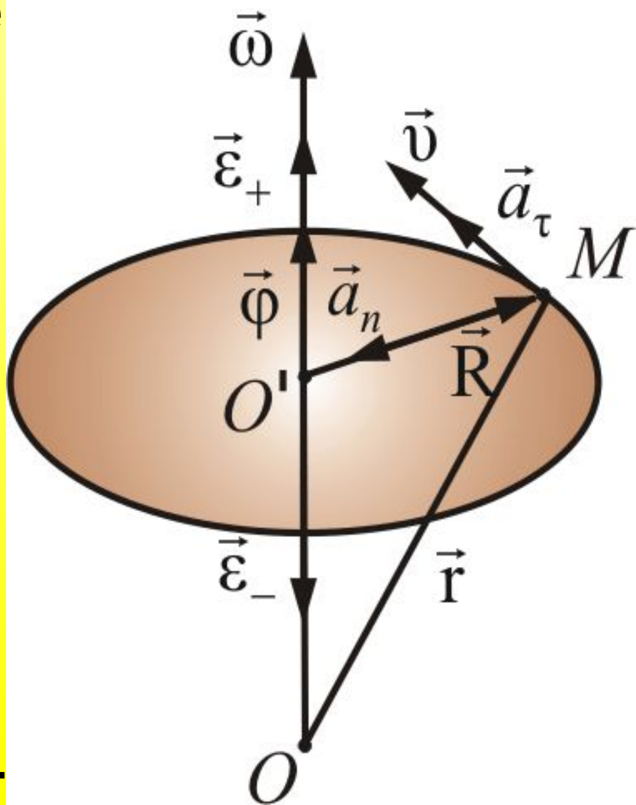
Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \qquad (2.4.3)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$

а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$

(рисунок 2.13).



Выразим нормальное и тангенциальное ускорения точки *M* через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega R) = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon;$$

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon;}$$

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.}$$

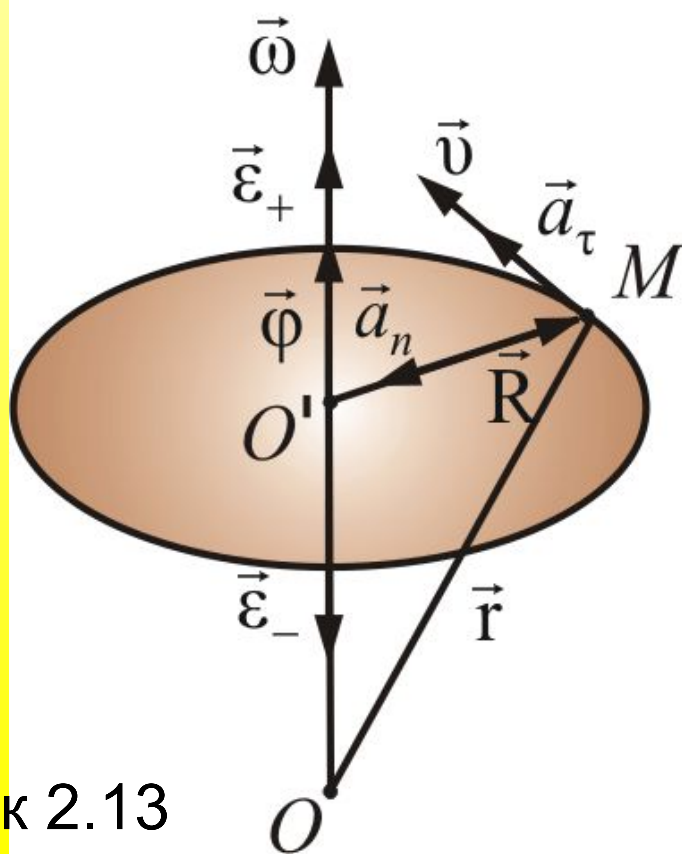


Рисунок 2.13

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- равномерное вращение $\varepsilon = 0;$ $\omega = \text{const};$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \pm \omega t;}$$

- равнопеременное вращение $\varepsilon = \text{const};$

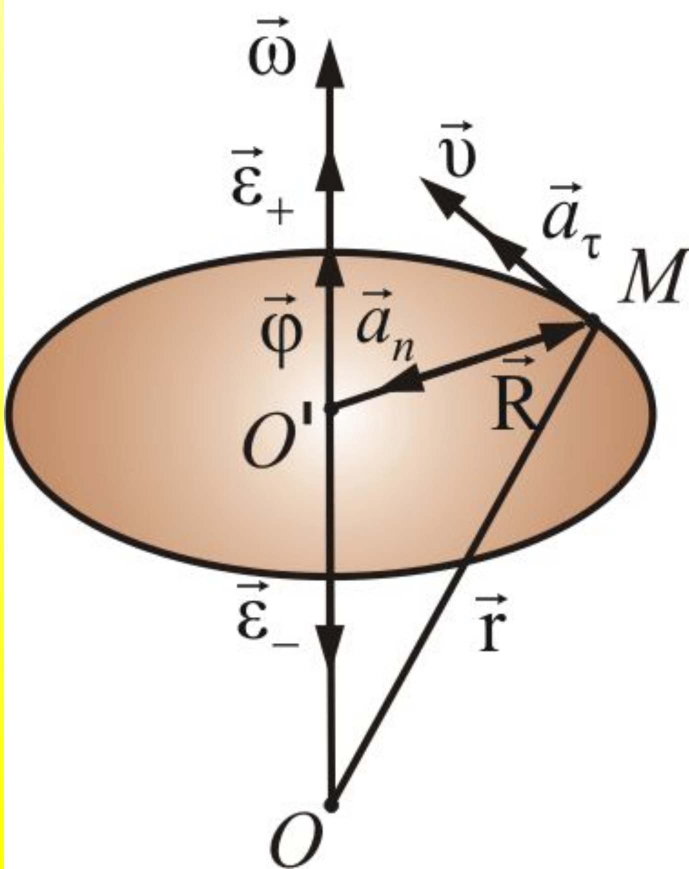
$$\boxed{\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t}$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}}$$

Обратите внимание.

Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота)

направлены вдоль оси вращения.



Поступательное движение

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t \upsilon dt$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$