Импульс. Закон сохранения импульса.

О неизменности в мире …

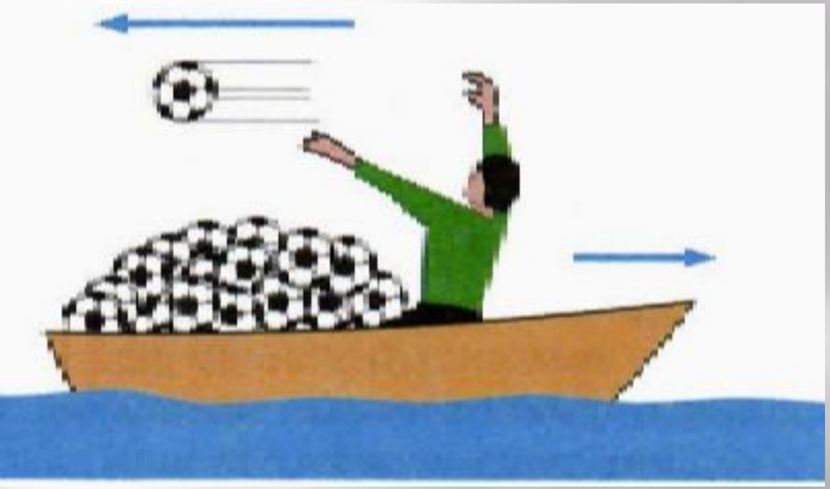
«Я принимаю, что во Вселенной …
есть известное количество движения,
которое никогда не увеличивается,
не уменьшается, таким образом,
если одно тело приводит в движение
другое, то теряет столько своего
движения, сколько его сообщает».

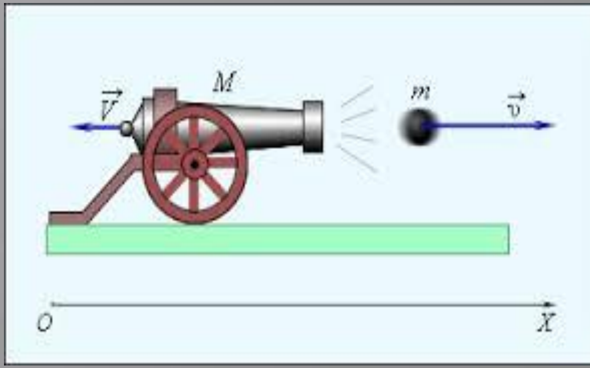
В XVII веке впервые были указаны ***величины, сохраняющиеся в тех или иных явлениях***.

Импульс. Закон сохранения импульса.

- Импульс тела. Импульс силы.
- Закон сохранения импульса.
- Применение закона сохранения импульса – реактивное движение.

Объясните явления…





- Второй закон Ньютона
- $\vec{F} = m\vec{a}$
- $\vec{a} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 / t$
- $\vec{F}t = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0$
- $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ - импульс тела
- $\vec{p}$ = кг м/с СИ
- $\vec{F}t$ - импульс силы.
- $m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0$ – изменение им пульса тела

- **Импульс силы – мера механического взаимодействия**, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени:

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

В проекциях на координатные оси:

$$(x): p_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \qquad (y): p_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \qquad (z): p_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.$$

В случае постоянной силы: $\vec{p} = \vec{F}(t_2 - t_1).$

В проекциях на координатные оси:

$$p_x = X(t_2 - t_1); \qquad p_y = Y(t_2 - t_1); \qquad p_z = Z(t_2 - t_1);$$

- **Импульс равнодействующей – равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени:**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n.$$

Умножим на *dt*:

$$\vec{R} dt = \vec{F}_1 dt + \vec{F}_2 dt + \ldots + \vec{F}_n dt.$$

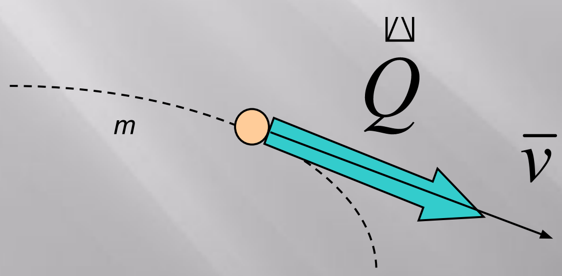
Проинтегрируем на данном промежутке времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n dt. \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n.$$

- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным произведению массы точки на вектор ее скорости:**

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

- **Количество движения системы материальных точек – геометрическая сумма количеств движения материальных точек:**



$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \ldots + \vec{Q}_n = \sum \vec{Q}_k.$$

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k = \sum m_k \vec{v}_k = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \vec{r}_k\right).$$

По определению центра масс: $$M\vec{r}_C = \sum m_k \vec{r}_k.$$

Тогда: $$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_c) = M\frac{d\vec{r}_C}{dt} = M\vec{v}_C. \qquad \vec{Q} = M\vec{v}_C.$$

Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.

В проекциях на координатные оси: $$Q_x = M\dot{x}_C; \qquad Q_y = M\dot{x}_C; \qquad Q_y = M\dot{x}_C.$$

Теорема об изменении количества движения системы – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$ или $$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\right) = \bar{R}^e.$$

Из определения количества движения системы:

$$\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.$$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

$$\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

$$\bar{R}^e \quad \bar{R}^i = 0$$

Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e.$$

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы
(законы сохранения):

1. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный вектор внешних сил системы
равен нулю, $\boldsymbol{R}^e = 0$, то вектор количества движения постоянен, $\boldsymbol{Q}$ = **const**
– **закон сохранения количества движения системы**).

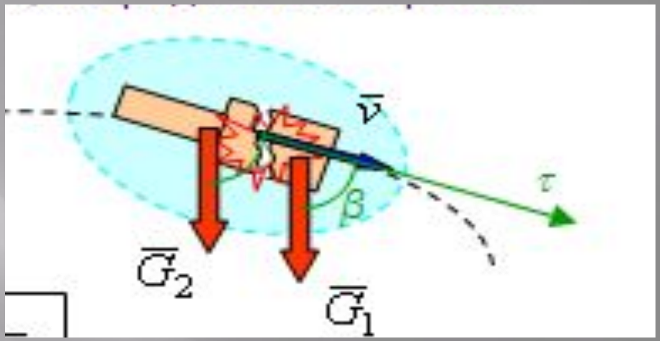
2. Если в интервале времени [t_1, t_2] проекция главного вектора внешних сил
системы на ось *x* равна нулю, $R_x{}^e = 0$, то проекция количества движения
системы на ось *x* постоянна, Q_x = const.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

Пример: Граната массы *M*, летевшая со скоростью *v*, разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1. Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната):

2. Объект – свободная система, связи и их реакции отсутствуют.



3. Добавляем активные силы:

4. Записываем теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e = \vec{G}_1 + \vec{G}_2.$$

Проецируем на ось *τ* : $$\frac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g\cos\beta + m_2 g\cos\beta \neq 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем :

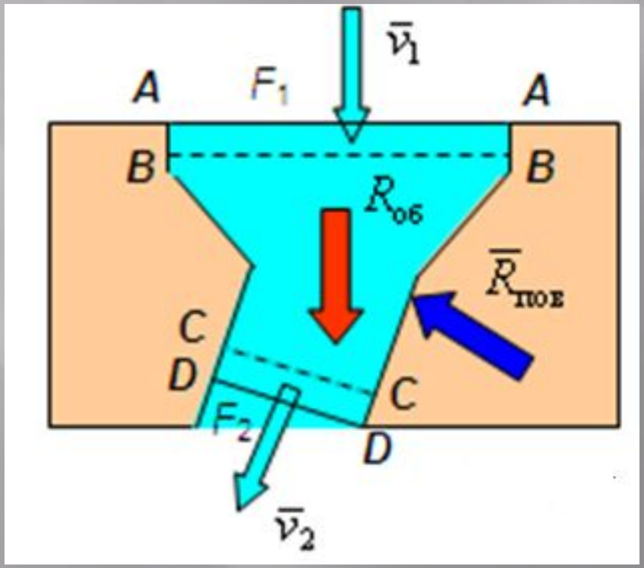
$$\int_{Q_0}^{Q} dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g \cos\beta + m_2 g \cos\beta)dt \approx 0.$$

Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва *t*<<1*.*

Отсюда *закон сохранения* :

$$Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0 \quad \text{или} \quad Q_{\tau 0} \approx Q_\tau . \Rightarrow Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2 . \Rightarrow v_2 = \frac{Mv - m_1 v_1}{m_2} v_2 .$$

- **Теорема Эйлера** – Применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды) .



1.Выбираем в качестве объекта движения
объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины:

2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями
(***R***$_{пов}$ – равнодействующая поверхностных сил)

3. Добавляем активные силы
(***R***$_{об}$ – равнодействующая объемных сил):

4. Записываем теорему об изменении
количества движения системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{об} + \vec{R}_{пов} \, .$$

Изменение количества движения
воды в интервале времени [t_0,t_1] :

$$\overline{Q}_0 = \overline{Q}_{AB} + \overline{Q}_{BC} \, .$$

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{BC} + \overline{Q}_{CD} \, .$$

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{Q}_{CD} - \vec{Q}_{AB} \, .$$

Изменение количества движения воды
за бесконечно малый интервал времени *dt*:

$$d\overline{Q}_{AB} = (\rho F_1 v_1 dt)\overline{v}_1 ;$$

$$d\overline{Q}_{CD} = (\rho F_2 v_2 dt)\overline{v}_2 .$$

, где $d\overline{Q} = d\overline{Q}_{CD} - d\overline{Q}_{AB}$

Принимая произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за секундную массу получаем: $M_{сек} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,$

$$d\vec{Q}_{AB} = (M_{\text{ñåê}} dt)\vec{v}_1; \quad d\vec{Q} = \text{Ì}_{\text{ñåê}}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dt.$$

$$d\vec{Q}_{CD} = (M_{\text{ñåê}} dt)\vec{v}_2.$$

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем: $\text{Ì}_{\text{ñåê}}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R}_{\text{îá}} + \vec{R}_{\text{ïîâ}}.$

В проекциях на оси: $(x): M_{\text{сек}}(v_{2x} - v_{1x}) = R_x^{\text{об}} + R_x^{\text{пов}};$

$$(y): M_{\text{сек}}(v_{2y} - v_{1y}) = R_y^{\text{об}} + R_y^{\text{пов}};$$

$$(z): M_{\text{сек}}(v_{2z} - v_{1z}) = R_z^{\text{об}} + R_z^{\text{пов}}.$$

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

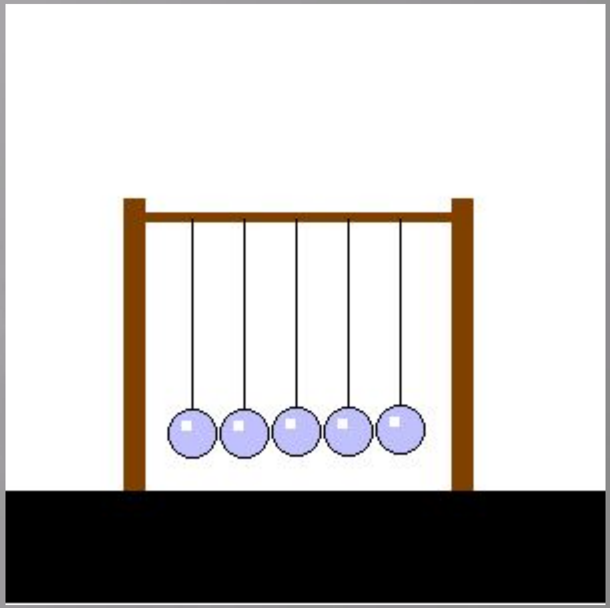
Второй закон Ньютона в импульсной форме:

Импульс силы равен изменению импульса тела.

- Если два или несколько тел взаимодействуют только между собой (не подвергаются воздействию внешних сил), то эти тела образуют **замкнутую систему**.
- Импульс каждого из тел, входящих в замкнутую систему может меняться в результате их взаимодействия друг с другом.
- Для описания существует очень важный закон – закон сохранения импульса.

Закон сохранения им пульса:

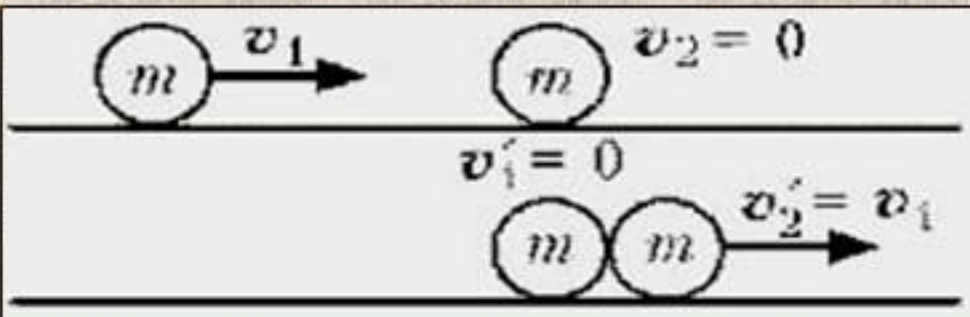
Векторная сумма импульсов замкнутой системы тел не изменяется.



Упругий удар

Абсолютно упругий удар – столкновения тел, в результате которого их внутренние энергии остаются неизменными. При абсолютно упругом ударе сохраняется не только импульс, но и механическая энергия системы тел.

Примеры: столкновение бильярдных шаров, атомных ядер и элементарных частиц. **На рисунке показан абсолютно упругий центральный удар:**

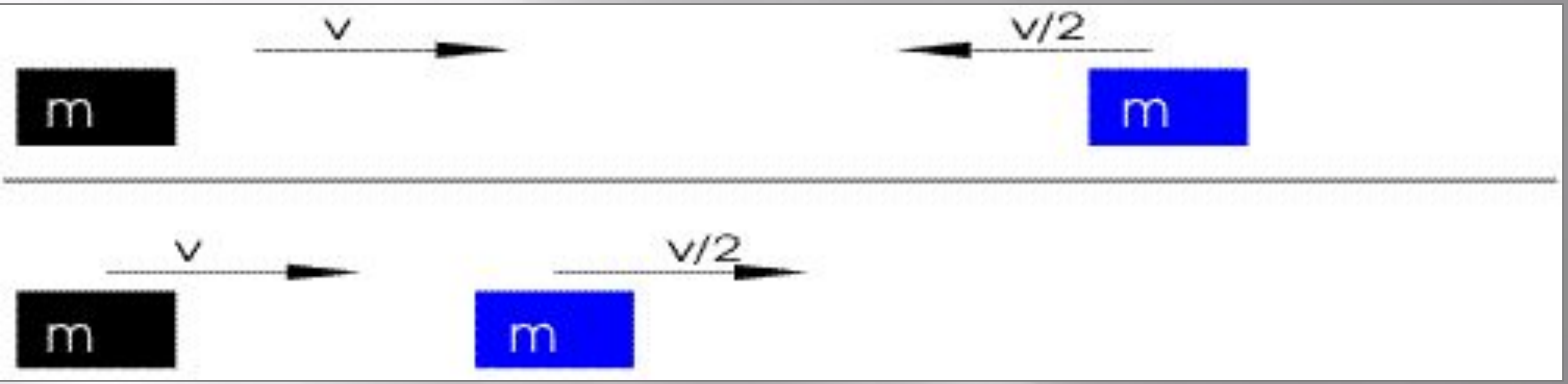


$$mv_1 = mv_1' + mv_2',$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}.$$

В результате центрального упругого удара двух шаров одинаковой массы, они обмениваются скоростями: первый шар останавливается, второй приходит в движение со скоростью, равной скорости первого шара.

<u>Абсолютно упругий удар</u> – модель соударения при которой полная кинетическая энергия системы сохраняется



1.одинаковые тела обмениваются проекциями
скорости на линию, соединяющую их центры.

Для математического описания простейших абсолютно упругих ударов, используется:

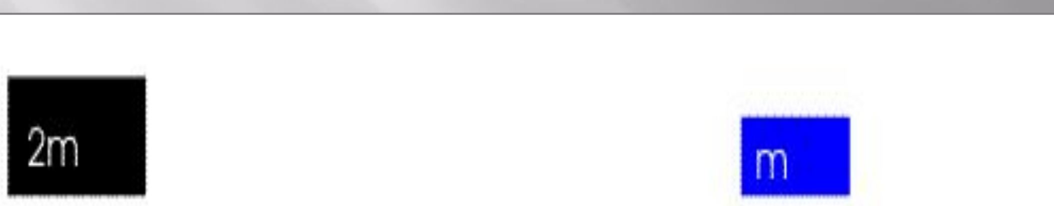
закон сохранения импульс

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$$

закон сохранения энергии

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}$$

абсолютно упругий удар тел равных масс



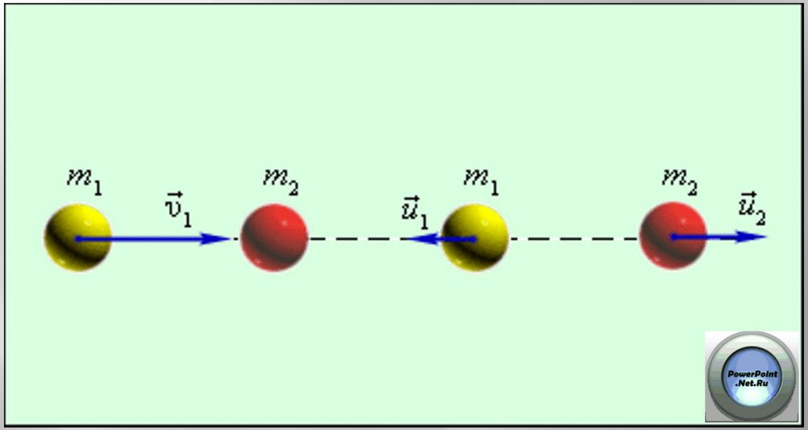
абсолютно упругий

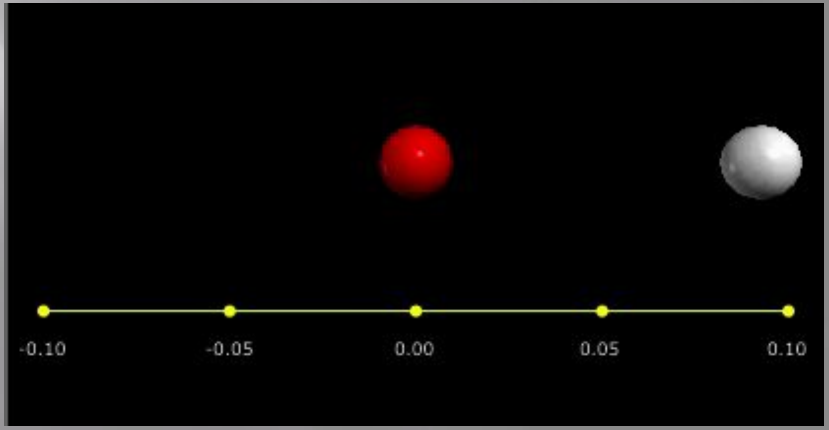
тел не равных масс

Импульсы складываются <u>векторно,</u> а энергии

Центральный абсолютно упругий удар

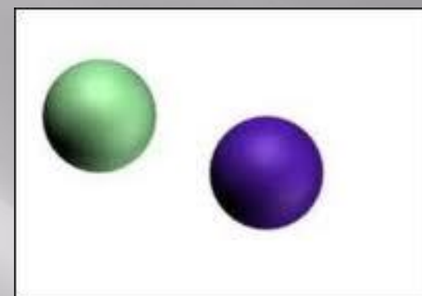
Когда оба шара имеют одинаковые массы ($m_1 = m_2$), первый шар после соударения останавливается ($v_1 = 0$), а второй движется со скоростью $v_2 = v_1$, т. е. шары обмениваются скоростями (импульсами)

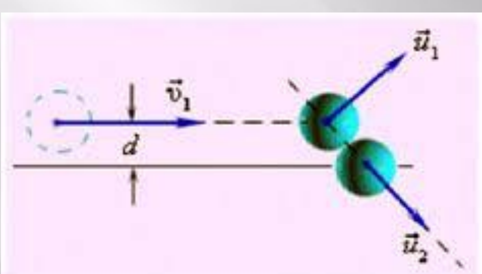


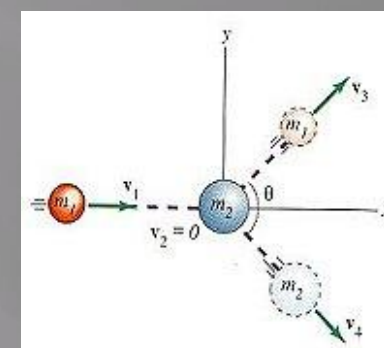


<u>Центральным ударом</u> шаров называют соударение, при котором скорости шаров до и после удара направлены по линии центров.

После **нецентрального** упругого соударения шары разлетаются под некоторым углом друг к другу



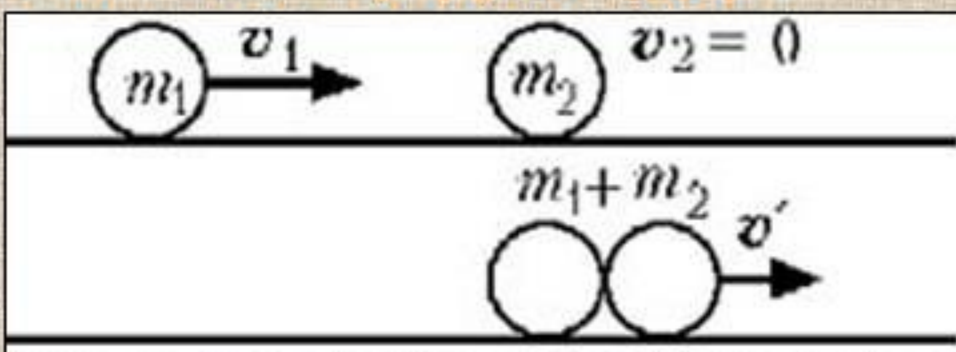




- *Если* ***массы шаров одинаковы****, то векторы скоростей шаров после нецентрального упругого соударения всегда направлены* ***перпендикулярно*** *друг к другу*

Неупругий удар

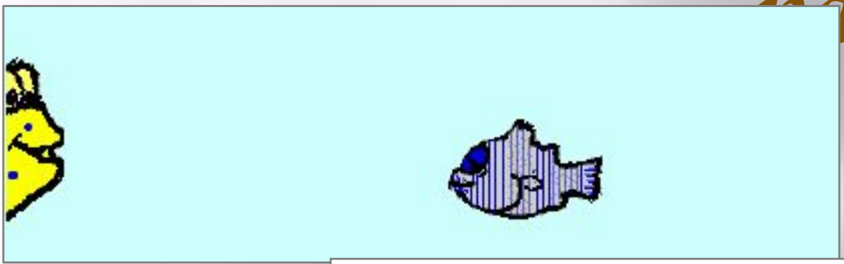
Абсолютно неупругий удар: так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно целое. При неупругом ударе часть механической энергии взаимодействующих тел переходит во внутреннюю, импульс системы тел сохраняется. **Примеры неупругого взаимодействия:** столкновение слипающихся пластилиновых шаров, автосцепка вагонов и т.д. **На рисунке показан абсолютно неупругий удар:**

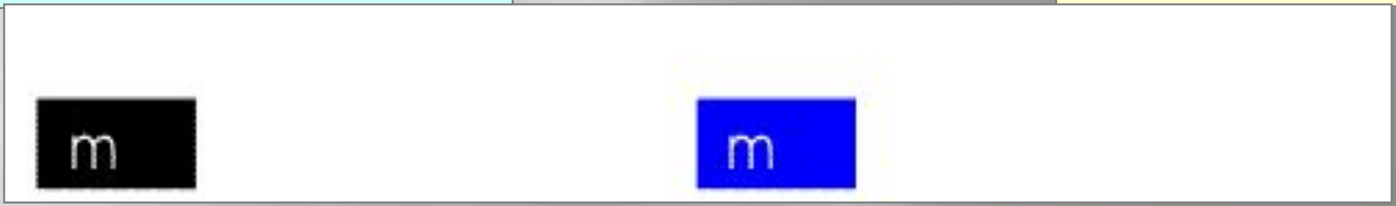


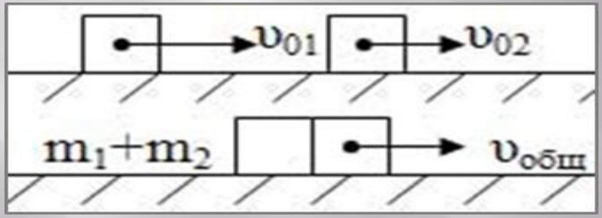
$$p' = p,$$
$$(m_1 + m_2) \cdot v' = m_1 v_1,$$
$$E'_к < E_к.$$

После неупругого соударения два шара движутся как одно целое со скоростью, меньшей скорости первого шара до соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, в результате которого компоненты скоростей тел становятся равными







$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}'$$

При абсолютно неупругом ударе, выполняется закон сохранения импульса, но не выполняется закон сохранения механической энергии (часть кинетической энергии соударямых тел, в результате неупругих деформаций переходит в тепловую)

Реактивное движение

Реактивное движение –

это движение, которое возникает при отделении от тела некоторой его части с определенной скоростью.

Особенностью этого движения

Реактивное движение, например, выполняет ракета.

Продукты сгорания при вылете получают относительно ракеты некоторую скорость. Согласно закону сохранения импульса, сама ракета получает такой же импульс, как и газ, но направленый в другую сторону. Закон сохранения импульса нужен для расчета скорости ракеты.

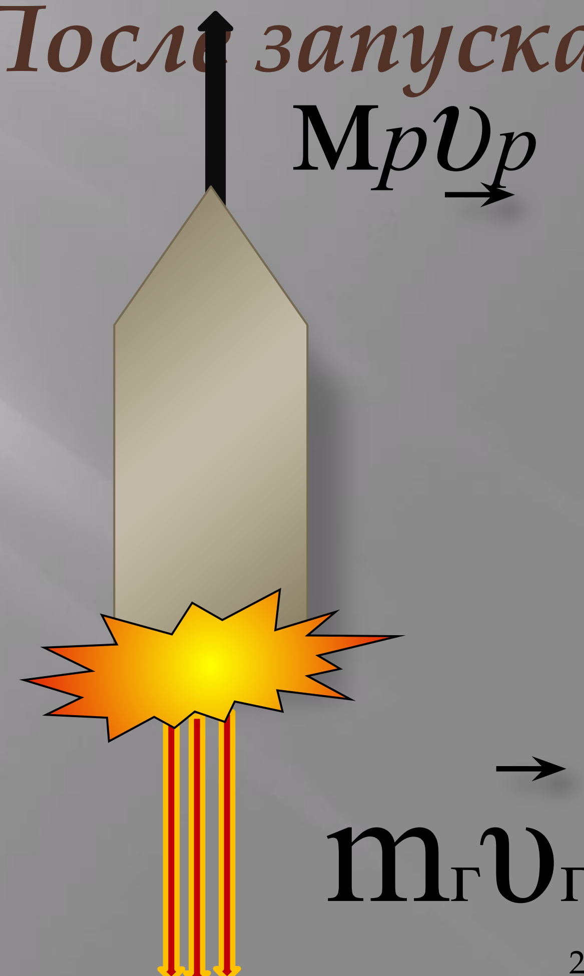
ЗАДАЧА: ракеты

С какой скоростью будет двигаться ракета, если средняя скорость выхлопных газов 1 км/с, а масса горючего составляет 80% от всей массы ракеты?

До запуска

$M_р \upsilon_р = 0, \quad m_г \upsilon_г = 0$

После запуска



Реактивное движение в живой природе:

Реактивное движение присуще медузам, кальмарам, осьминогам и другим живым организмам.



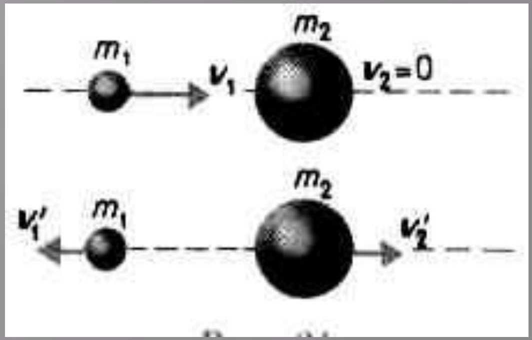
Реактивное движение можно обнаружить и в мире растений. В южных странах и на нашем побережье Черного моря произрастает растение под названием «бешеный огурец» . При созревании семян внутри плода создается высокое давление в результате чего плод отделяется от подложки, а семена с большой силой выбрасываются наружу.

Сами огурцы при этом отлетают в противоположном направлении. Стреляет «бешеный огурец» более чем на 12 метров.

В технике реактивно движение встречается на речном транспорте (катер с водометным двигателем), в авиации, космонавтике военном деле.

Легкий шар движущийся со скоростью 10 м/с, налетает на покоящийся тяжелый шар и между шарами происходит абсолютно упругий удар. После удара шары разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми скоростями. Во сколько раз различаются массы шаров

Решение:



$$\begin{cases} \upsilon_1' = \upsilon_2 \\ m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1 \Rightarrow m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2\upsilon_2 \qquad \Rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_1' = \upsilon_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2\upsilon_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2\upsilon_2 \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{(\upsilon_1 + \upsilon_1')}{\upsilon_2} = 3 \\ \upsilon_1' = \upsilon_2 = \dfrac{\upsilon_1}{2} \end{cases}$$

Брусок массой 600 г, движущийся со скоростью 2 м/с,
сталкивается с неподвижным бруском массой 200 г.
Определите изменение кинетической энергии первого
бруска после столкновения. Удар считать
центральным и абсолютно упругим.

Решение:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2\upsilon_2' \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2\upsilon_2'^2 \end{cases} \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2'$$

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1}{(m_1 + m_2)} = 1\,\frac{м}{с} \Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{m_1}{2}(\upsilon_1'^2 - \upsilon_1^2) = -0{,}9\,Дж$$

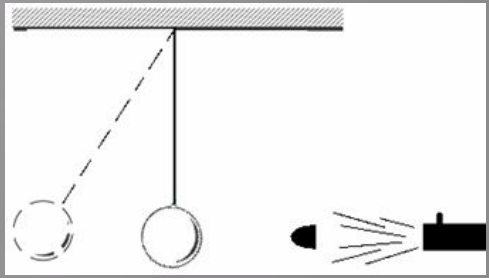
Два шарика массы которых соответственно 200 г и 600 г, висят, соприкасаясь, на одинаковых вертикальных нитях длиной 80 см. Первый шар отклонили на угол 90° и отпустили. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^{\,2}}{2} = m_1 g l \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gl} = 4\dfrac{м}{с} \\ m\upsilon_1 = 3m\upsilon_2' - m\upsilon_1' \Rightarrow m(\upsilon_1 + \upsilon_1') = 3m\upsilon_2' \qquad \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1 - \upsilon_1' \\ \dfrac{m\upsilon_1^{\,2}}{2} = \dfrac{m\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{3m\upsilon_2'^{\,2}}{2} \Rightarrow m\left(\upsilon_1^{\,2} - \upsilon_1'^2\right) = 3m\upsilon_2'^{\,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(\upsilon_1 + \upsilon_1') = 3m\upsilon_2' \\ \upsilon_2' = \upsilon_1 - \upsilon_1' \end{cases} \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_1' = 3(\upsilon_1 - \upsilon_1') \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{2} = 2\frac{м}{с} \Rightarrow \frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \frac{3m\upsilon_2'^{\,2}}{m\upsilon_1'^2} = \frac{3\cdot 4}{4} = 3$$

Шарик массой 100 г, летящий горизонтально со скоростью 5 м/с, абсолютно упруго ударяется о неподвижный шар массой 400 г, висящий на нити длиной 40 см. Удар центральный. На какой угол отклонится шар , подвешенный на нити после удара



Решение:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{l-h}{l} = 1 - \dfrac{h}{l} \\ h = \dfrac{\upsilon_2'^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{\upsilon_2'^2}{2g}$$

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2' - m_1\upsilon_1' \Rightarrow m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2\upsilon_2' \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2\upsilon_2'^2 \end{cases} \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1 - \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_1 - \upsilon_2'$$

$$\begin{cases} \upsilon_1' = \upsilon_1 - \upsilon_2' \\ m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2\upsilon_2' \end{cases} \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = 2\,\frac{м}{с} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$