

Математическая логика и теория алгоритмов

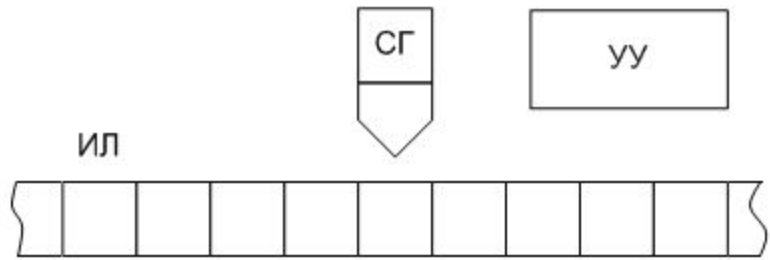
Институт Информационных
Технологий
ЧелГУ, 2013

A decorative graphic element consisting of several horizontal lines of varying lengths and colors (teal and white) extending from the right side of the page towards the center.

Машина Тьюринга

Алгоритмические процессы - это процессы, которые может совершить специальным образом устроенная машина.

Машина Тьюринга представляет собой абстрактный исполнитель и способна имитировать (с помощью задания правил перехода) все другие исполнители, которые каким-либо образом могут реализовать процесс пошагового вычисления.



ИЛ - Бесконечная в обе стороны информационная лента

УУ – Устройство управления

СГ – Считывающая головка

Машина Тьюринга

Информационная лента представляет собой память машины, разделённую на ячейки, в каждую из которых может быть сохранён один из символов конечного внешнего алфавита.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ - внешний алфавит

$\lambda \in S$ - пустой символ

Считывающая головка способна перемещаться над ИЛ в обе стороны, считывать и изменять данные, находящиеся в ячейке, напротив которой в данный момент она находится.

Управляющее устройство в каждый момент времени способно находиться в каком либо одном предопределённом состоянии из конечного множества состояний.

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ - множество состояний

q_1 - исходное состояние

q_n - конечное состояние

Машина Тьюринга

В начальный момент времени на ИЛ располагается конечное число ячеек, символы в которых отличаются от пустого символа λ . СГ в начальный момент указывает на первый символ строки данных.

В зависимости от состояния, в котором находится УУ, а также символа, напротив которого располагается СГ:

СГ меняет символ в ячейке напротив

УУ меняет состояние

СГ перемещается влево или вправо или остаётся на месте

По достижению заключительного состояния на ленте размещается выходная строка данных.

Машина Тьюринга

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ - внешний алфавит

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ - множество состояний

$D = \{L, R, E\}$ - возможные направления движения СГ

Можно говорить, что пара: (q_i, s_j)
на каждом шаге определяет тройку: (q'_i, s'_j, d_k)

q'_i - новое состояние УУ

s'_j - новый символ напротив СГ

d_k - направление движения СГ

Логическая функция МТ

Функция, переводящая пару (q_i, s_j) в тройку (q'_i, s'_j, d_k) называется *логической функцией* МТ.

Логическая функция и определяет алгоритм, реализованный данной МТ.

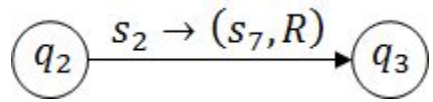
Способы задания логической функции МТ:

1 Функциональная схема

	q_1	q_2	q_3	...	q_n
s_1					
s_2		(q_3, s_7, R)			
s_3					
...					
s_k					

2 Система Тьюринговых команд
 $(q_2, s_2) \rightarrow (q_3, s_7, R)$

3 Граф переходов



Вычисление функций на МТ

$\{1, 2, 3, \lambda\}$ - внешний алфавит

q_1 - начальное состояние

$\{q_1, q_2, q_3, \vdash\}$ - набор состояний

\vdash - заключительное состояние

Функциональная схема логической функции

	q_1	q_2	q_3	\vdash
1	$(\vdash, 1, L)$	$(q_3, 3, R)$	(q_3, λ, R)	
2	$(q_3, 2, R)$	$(q_1, 1, E)$	$(q_2, 1, R)$	
3	$(q_3, 3, R)$	$(\vdash, 2, R)$	(q_1, λ, R)	
λ	$(q_2, 1, E)$	$(\vdash, 3, L)$	$(\vdash, 1, R)$	

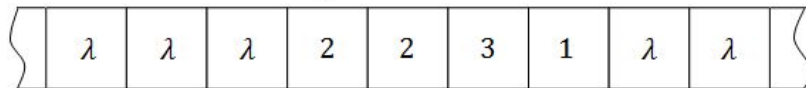
Задача:

Вычислить результат для строки входных данных: 2231

Вычисление функций на МТ



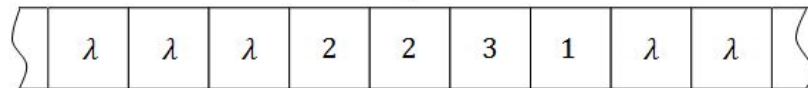
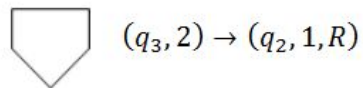
$(q_1, 2) \rightarrow (q_3, 2, R)$



	q_1	q_2	q_3	\vdash
1	$(\vdash, 1, L)$	$(q_3, 3, R)$	(q_3, λ, R)	
2	$(q_3, 2, R)$	$(q_1, 1, E)$	$(q_2, 1, R)$	
3	$(q_3, 3, R)$	$(\vdash, 2, R)$	(q_1, λ, R)	
λ	$(q_2, 1, E)$	$(\vdash, 3, L)$	$(\vdash, 1, R)$	



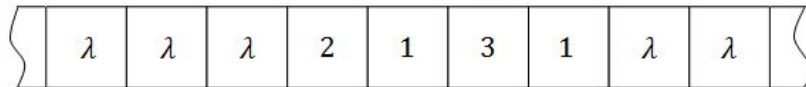
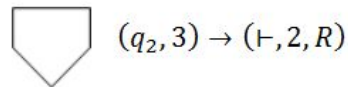
Вычисление функций на МТ



	q_1	q_2	q_3	\vdash
1	$(\vdash, 1, L)$	$(q_3, 3, R)$	(q_3, λ, R)	
2	$(q_3, 2, R)$	$(q_1, 1, E)$	$(q_2, 1, R)$	
3	$(q_3, 3, R)$	$(\vdash, 2, R)$	(q_1, λ, R)	
λ	$(q_2, 1, E)$	$(\vdash, 3, L)$	$(\vdash, 1, R)$	



Вычисление функций на МТ



	q_1	q_2	q_3	\vdash
1	$(\vdash, 1, L)$	$(q_3, 3, R)$	(q_3, λ, R)	
2	$(q_3, 2, R)$	$(q_1, 1, E)$	$(q_2, 1, R)$	
3	$(q_3, 3, R)$	$(\vdash, 2, R)$	(q_1, λ, R)	
λ	$(q_2, 1, E)$	$(\vdash, 3, L)$	$(\vdash, 1, R)$	



Тезис Тьюринга

Всякий алгоритм представим в виде машины Тьюринга.

Любая функция, которая может быть вычислена физическим устройством, может быть вычислена машиной Тьюринга.

Замечание:

Также как и тезис Чёрча, тезис Тьюринга недоказуем и является принимаемым без доказательства фундаментальным положением теории алгоритмов.

Замечание:

Уверенность в истинности тезиса Тьюринга основана на опыте: пока не найден алгоритм, который не может быть записан в виде МТ.

Тезис Тьюринга (полнота по Тьюрингу)

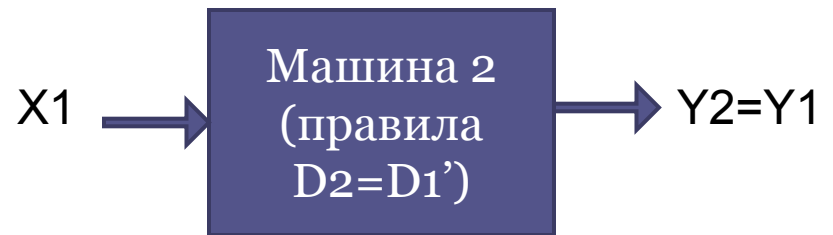
Один из естественных способов доказательства того, что алгоритмы вычисления, которые можно реализовать на одной машине, можно реализовать и на другой, — это имитация первой машины на второй.

Имитация:

На вход второй машине подаётся описание программы (правил работы) первой машины $D1$ и входные данные $X1$, которые должны были поступить на вход первой машины. Нужно описать такую программу (правила работы второй машины), чтобы в результате вычислений на выходе оказалось $Y2$ то же самое, что вернула бы первая машина $Y1$ ($Y1=Y2$), если бы получила на вход данные $X1$.



Имитация:



Тезис Тьюринга (полнота по Тьюрингу)

На машине Тьюринга можно имитировать:

машину Поста,
нормальные алгоритмы Маркова,
машины с арх. фон-Неймана
и др.

В свою очередь, на различных абстрактных исполнителях можно имитировать Машину Тьюринга. Исполнители, для которых это возможно, называются *полными по Тьюрингу*