Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт»
(национальный исследовательский университет)

Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 805 «Математическая кибернетика»

Выпускная квалификационная работа на тему: «Сравнительный анализ алгоритмов многокритериального выбора»

Студент(ка) группы М80-405Б-18: Пицхелаури Софья Георгиевна

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 805, Смерчинская Светлана Олеговна

Москва 2022

Актуальность и новизна

Каждый день человек совершает множество решений. Все решения несут за собой последствия, поэтому особенно важно делать правильный выбор. Математические методы теории принятия решений позволяют лицу, принимающему решение принять обоснованный выбор и при необходимости скорректировать решение. Такие модели помогают сделать структуру исходной задачи более содержательной и понятной, решают проблему формирования и уточнения критериев или системы критериев выбора.

Необходимо разработать программную систему, позволяющую построить ранжирования и выборать наилучшую альтернативу из имеющихся, на основе трех методов: метода анализа иерархий, аксиоматической теории важности критериев, аддитивной линейной свертки.

1. Подиновский В.В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М. : Наука, 2019. – 103-115 с.
2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation. McGraw-Hill, N. Y., 1980. – 395–412 p.

Цели работы

1. Разработать и реализовать ранжирование альтернатив, оцениваемых по критериям качества, методами: аддитивной линейной свертки, Саати (метод анализа иерархий) и Подиновского (аксиоматическая теория важности критериев).
2. Провести сравнительный анализ полученных результатов.
3. Разработать и реализовать удобный интерфейс программной системы ранжирования альтернатив.
4. Решить прикладную задачу.

Математическая постановка задачи

Дано:

- Множество альтернатив $A = \{A_1, A_2, .., A_n\}$.
- Множество критериев $K = \{K_1, K_2, .., Km\}$.
- Матрица оценок альтернатив по критериям.
- Матрицы парных сравнений по критериям и альтернатив по каждому критерию.

Требуется определить итоговые ранжирования альтернатив методами: аддитивной линейной свертки, анализа иерархий, аксиоматической теории важности критериев.

Аддитивная линейная свертка

Рассмотрим свертку:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

Такая свёртка обеспечивает отсутствие очень низких оценок по локальным критериям у победившей векторной оценки и называется аддитивной.

В состав интегрального критерия локальные критерии могут входить с весовыми коэффициентами $k_1, k_2, \ldots, k_m$, характеризующими важность этих критериев:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} k_i x_i$$

Ранжирование альтернатив проводится в соответствии со значениями функции ценности: чем больше значение функции, тем предпочтительнее альтернатива. Равные значения функции говорят о равноценности альтернатив.

Метод анализа иерархий

1. Построение качественной модели проблемы в виде иерархии: включающей цель, на самом верхнем уровне находится глобальная цель (фокус иерархии), продолжается к критериям, далее к подкритериям (при наличии) и так далее до самого нижнего уровня – альтернатив.
2. Определение приоритетов всех элементов иерархии, построенной согласно п.1, с использованием метода парных сравнений.

   Матрица должна удовлетворять требованиям:

a. Если $a_{ij}= \alpha$, то $a_{ij}= \frac{1}{\alpha}$.

b. Если i-й объект имеет одинаковую важность относительно j-го объекта, то $a_{ij}= 1$, $a_{ij}= 1$; также $a_{ii}= 1$ для всех i = 1, …, n.

3. Вычисление и нормализация среднего геометрического построчно для каждой матрицы сравнений.

Для начала требуется вычислить среднее геометрическое каждой строки матрицы: $\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}$

Затем нормализованное среднее геометрическое: $v_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}}$, i = 1, …, n.

4. Проверка суждений на согласованность.

$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \times v_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \times v_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \times v_n$

Тогда, индекс согласованности:

ИС = $\frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$

Метод анализа иерархий

Теперь имеется возможность вычислить отношение согласованности:

$ОС = \frac{ИС}{СС}$,

где СС – случайная согласованность, которая берется как константа и зависит от размера матрицы по таблице 1.1

Оценки в матрице считаются согласованными, если ОС ≤ 0,2, в противном случае их надо пересматривать.

Таблица 1.1 Значения случайной согласованности

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
СС	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1.41	1,45	1,49

5. Перемножение вектора весов критериев и подкритериев на матрицу приоритетов альтернатив по критериям.
6. Получение итогового ранжирования альтернатив.

Аксиоматическая теория важности критериев

1. Задана степень превосходства в важности одних критериев над другими: «Критерий K_i в h_{ij} раз важнее критерия K_j»
2. Определена важность отдельных критериев, количественно «измеряемые» по общей для них «шкале важности» V : «Важность критерия K_i имеет величину v_i ».

Матрица сверхтранзитивности H удовлетворяют условиям: $h_{ii} = 1$, $h_{ji} = \frac{1}{h_{ij}}$, $h_{ij} \cdot h_{jk} = h_{ik}$ $(i, j, k = 1, \ldots, m)$. Последнее условие представляет собой аналог транзитивности с учетом численного превосходства. Матрица H называется сверхтранзитивной.

Все значения (величины) важности отдельных критериев составляют (положительный) вектор важностей $v = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Утверждение 1. Матрица Н является сверхтранзитивной тогда и только тогда, когда существует положительный вектор v такой, что $h_{ij} = \frac{v_i}{v_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$.

Для сравнения векторных оценок альтернатив на основе количественной информации о важности критериев Подиновский вводит кратные модели. Векторному критерию K ставится в соответствие вектор N с натуральными компонентами, такой, что элементы матрицы H превосходства в важности критериев $h_{ij} = \frac{n_i}{n_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, причем сумма $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ наименьшая из возможных.

Числа n_1, n_2, n_m определяют кратность соответствующих компонент сравниваемых векторных оценок, и уже векторные оценки длины n с компонентами, упорядоченными по невозрастанию, как для равноважных критериев, сравниваются по Парето.

Решение задачи выбора работы

Рассмотрим задачу, в которой лицом, принимающим решение, является студент. Его цель – найти работу, которую он будет совмещать с учебой. Он рассматривает следующие варианты: a_1 — работа на кафедре, a_2 — работа в театре, a_3 — работа в общепите, a_4 — работа в банке, a_5 — работа на стройке; Студент оценивает варианты по следующим критериям: K_1 — уровень заработной платы, K_2 — удобство графика работы, K_3 — интерес к работе, K_4 — время на дорогу. Также он составил вектор приоритетов для каждого критерия $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0{,}35,\ 0{,}175,\ 0{,}35,\ 0{,}125)$. Т. е. для него критерии K_1 и K_3 равноважны, каждый из этих критериев в 2 раза важнее, чем критерий K_2 и в примерно в 3 раза важнее, чем критерий K_4.

Студент формализует критерии, предоставляя таблицу 1 и таблицу 2 – оценки альтернатив по критериям.

Таблица 1	$К_1$ – заработная плата	$К_2$ - график работы	$К_3$ - интерес к работе	$К_4$ - дорога
5	Больше 12	Очень удобный	Очень интересная	Менее 30
4	От 7 до 12	Удобный	Интересная	От 30 до 40
3	От 4 до 7	Средний по удобности	Средняя по интересности	От 40 до 50
2	От 2 до 4	Неудобный	Неинтересная	От 50 до 90
1	Менее 2	Очень неудобный	Совсем неинтересная	Больше 120

Решение задачи выбора работы

Таблица 2	$К_1$ – заработная плата	$К_2$ – график работы	$К_3$– интерес к работе	$К_4$ – дорога
a_1 – кафедра	4	2	4	3
a_2 – театр	2	5	4	2
a_3 – банк	5	2	5	3
a_4 – общепит	1	1	4	4
a_5 – стройка	2	4	2	2

Студент составил сравнительную таблицу критериев (таблица 3) и таблицы сравнения альтернатив по критериям, представленные в таблицах 4-7.

Таблица 3	$К_1$ – заработная плата	$К_2$ - график работы	$К_3$ - интерес к работе	$К_4$ - дорога
$К_1$ - заработная плата	1	1	1	7
$К_2$ - график работы	1	1	1	1
$К_3$ - интерес к работе	1	1	1	7
$К_4$ - дорога	1/7	1	1/7	1

Решение задачи выбора работы

Таблица 4. заработная плата	кафедра	стройка	банк	общественное питание	театр
кафедра	1	5	1	5	5
стройка	1/5	1	1/9	1	1
банк	1	9	1	9	9
общественное питание	1/5	1	1/9	1	1/3
театр	1/5	1	1/9	3	1

Таблица 6. интерес к работе	кафедра	стройка	банк	общественное питание	театр
кафедра	1	2	2	3	2
стройка	1/2	1	1	3	3
банк	1/2	1	1	5	7
общественное питание	1/3	1/3	1/5	1	2
театр	1/2	1/3	1/7	1/2	1

Таблица 5. график работы	кафедра	стройка	банк	общественное питание	театр
кафедра	1	3	1	1	3
стройка	1/3	1	1/5	1	1
банк	1	5	1	1	5
общественное питание	1	1	1	1	1
театр	1/3	1	1/5	1	1

Таблица 7. дорога	кафедра	стройка	банк	общественное питание	театр
кафедра	1	3	1	3	3
стройка	1/3	1	1/5	1	1
банк	1	5	1	7	7
общественное питание	1/3	1	1/7	1	1/3
театр	1/3	1	1/7	1	1

Решение задачи выбора работы методом аддитивной линейной свертки

Вектор приоритетов (весов) $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0.29, 0.25, 0.29, 0.17)$ следует из условия

Используя таблицу 2, вычислим значения функции полезности, имеем таблицу 8:

Таблица 8. Значения функции полезности

	K_1
a_1	3.525
a_2	2.425
a_3	4.225
a_4	2.425
a_5	2.35

После расчета функции полезности имеем следующий порядок альтернатив по ранжированию $a_3 - a_1 - \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} - a_5$.

Отсюда можно заключить, что лучшей является альтернатива под номером 3 – работа в банке.

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аддитивной линейной свертки

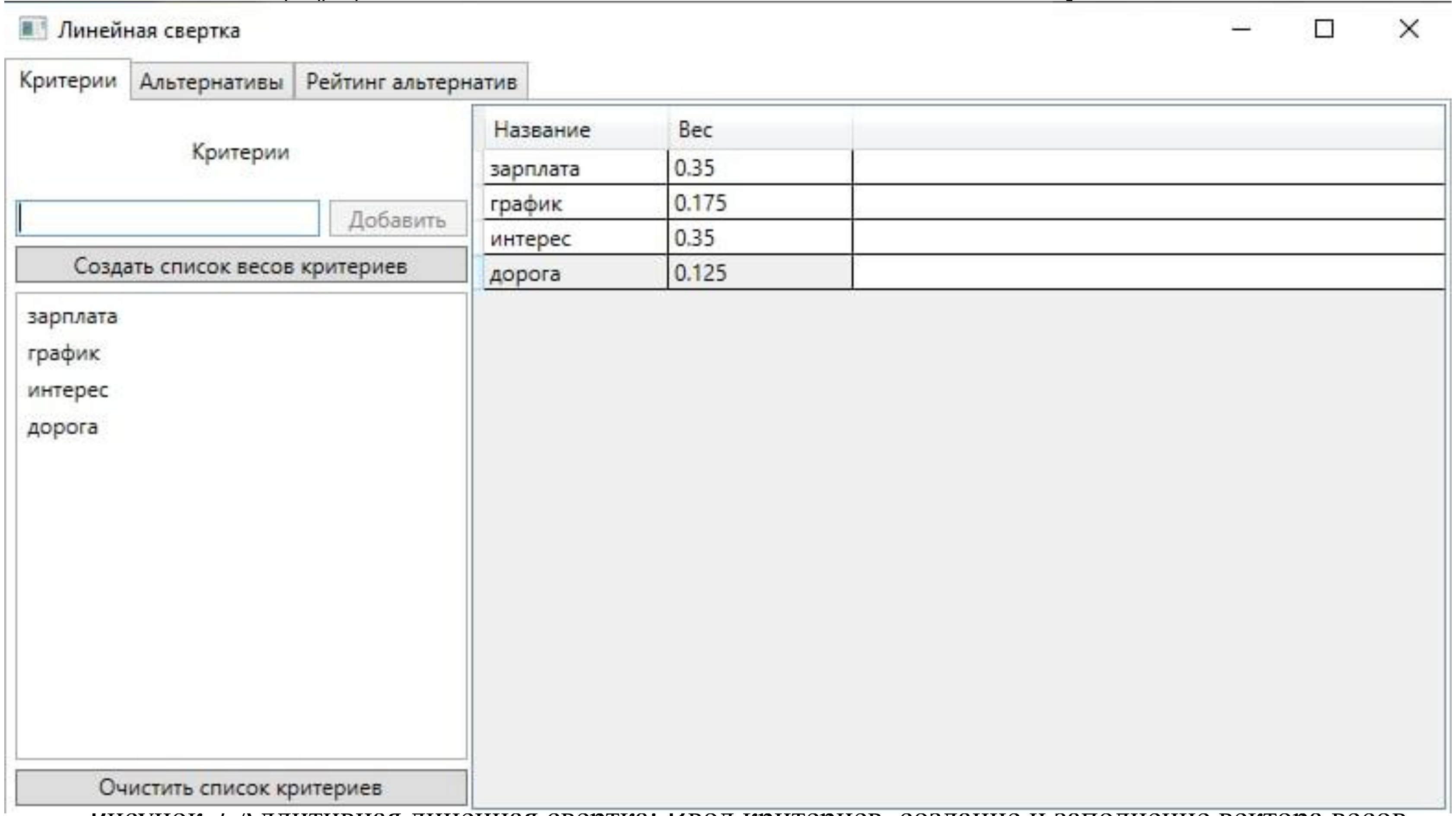

Рисунок 2 Аддитивная линейная свертка: Ввод критериев, создание и заполнение вектора весов

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аддитивной линейной свертки

Рисунок 3 Аддитивная линейная свертка : Ввод альтернатив, создание и заполнение матрицы значений

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аддитивной линейной свертки

Рисунок 4 Аддитивная линейная свертка : Вывод итогового ранжирования и лучшей альтернативы

Решение задачи выбора работы методом методом анализа иерархий

Построим иерархию:

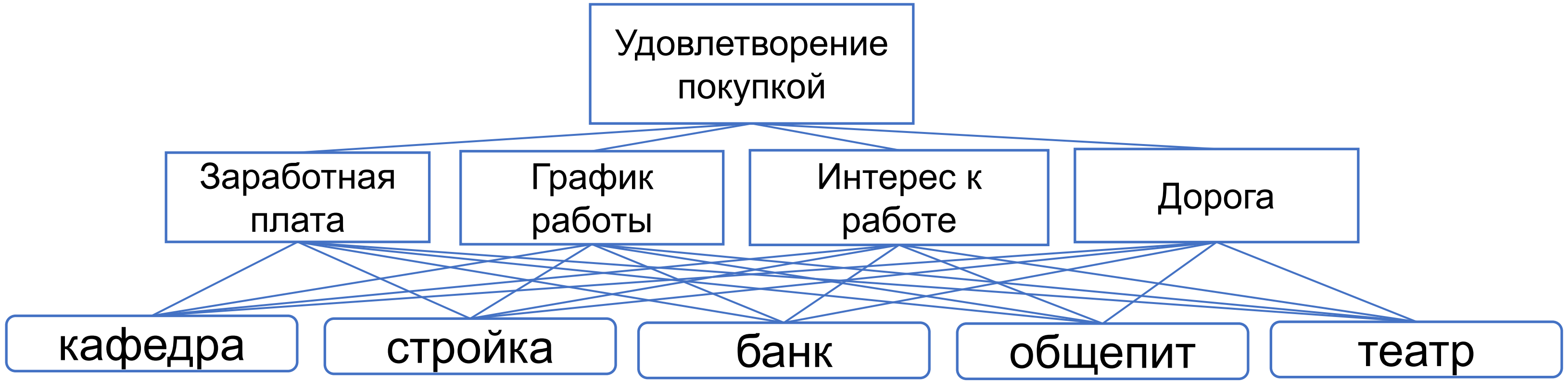

Рисунок 1 Иерархия задачи выбора работы

- Для таблицы 3 посчитаем среднее геометрическое строк матрицы. Получим (1,627;1;1,627;0,378) .

Для этой матрицы λ_{max} = 4,506 , что достаточно близко к значению в случае согласованности, которое равно 4, т.е. порядку матрицы;

ИС = 0,126; ОС = 0,14, значит, матрица хорошо согласована. Нормализованный вектор приоритетов (весов) критериев $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ этой матрицы, соответствующий собственному значению λ_{max}: v = (0,351;0,216;0,351;0,082). Что примерно равно заданному вектору весов критериев по условию (v = (*0.35, 0.175, 0.35, 0.125*)), значит студент составил таблицу значимости критериев по шкале Саати верно.

Посчитаем собственное значение и вектор весов для каждой таблицы сравнения влияний каждого из четырех выбранных критериев на рассмотренные альтернативы из таблиц 4-7.

Решение задачи выбора работы методом методом анализа иерархий

1 . Заработная плата (таблица 4)
среднее геометрическое строк (2,627; 0,467; 3,737; 0,375; 0,582)
${\lambda_{max}}^{(1)} = 5{,}192$, вектор весов $v^{(1)} = (0{,}337; 0{,}06; 0{,}48; 0{,}048; 0{,}075)$
ИС = 0,048; ОС = 0,043, значит, матрица хорошо согласована.
2. График работы (таблица 5)
среднее геометрическое строк (1,552; 0,582; 1,904; 1; 0,582)
${\lambda_{max}}^{(2)} = 5{,}337$, вектор весов $v^{(2)} = (0{,}276; 0{,}104; 0{,}339; 0{,}178; 0{,}104)$
ИС = 0,083; ОС = 0,074, значит, матрица хорошо согласована.

3. Интерес к работе (таблица 6)
среднее геометрическое строк матрицы (1,888; 0,351; 1,773; 0,536; 0,412)
${\lambda_{max}}^{(3)} = 5{,}401$, вектор весов $v^{(3)} = (0{,}317; 0{,}227; 0{,}297; 0{,}09; 0{,}069)$
ИС = 0,102; ОС = 0,091, значит, матрица хорошо согласована.
4. Дорога (таблица 7)
среднее геометрическое строк матрицы (1,1933;0,582;3,005;0,437;0,678)
${\lambda_{max}}^{(4)} = 5{,}078$, вектор весов $v^{(4)} = (0{,}291; 0{,}088; 0{,}453; 0{,}066; 0{,}102)$
ИС = 0,053; ОС = 0,047, значит, матрица хорошо согласована.

- Общую оценку каждой альтернативы получим, используя формулу:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \mathbf{S_3} \\ S_4 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}337 & 0{,}276 & 0{,}317 & 0{,}291 \\ 0{,}06 & 0{,}104 & 0{,}227 & 0{,}088 \\ 0{,}48 & 0{,}339 & 0{,}297 & 0{,}453 \\ 0{,}048 & 0{,}178 & 0{,}09 & 0{,}066 \\ 0{,}075 & 0{,}104 & 0{,}069 & 0{,}102 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}351 \\ 0{,}216 \\ 0{,}351 \\ 0{,}082 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}313 \\ 0{,}13 \\ \mathbf{0{,}383} \\ 0{,}092 \\ 0{,}081 \end{pmatrix}$$

Отсюда наиболее предпочтительным местом работы является банк, его общая оценка $S_3 = 0{,}366$.

Итоговое ранжирование $a_3 - a_1 - a_2 - a_4 - a_5$.

Интерфейс решения задачи выбора работы методом анализа иерархий

Рисунок 5 Метод анализа иерархий: Ввод критериев, создание и заполнение матрицы сравнений альтернатив

Интерфейс решения задачи выбора работы методом анализа иерархий

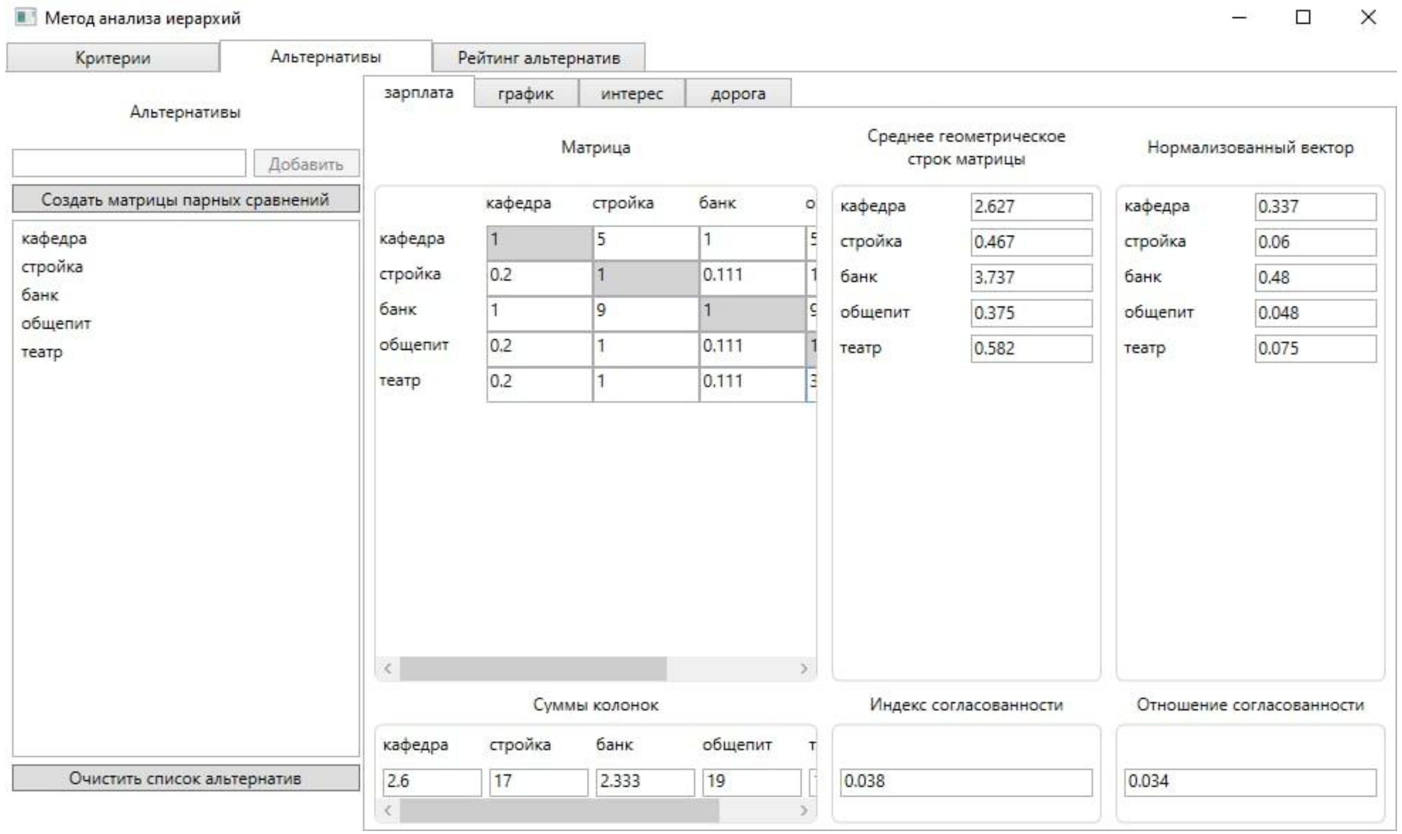

Рисунок 6 Метод анализа иерархий: Ввод альтернатив, создание и заполнение матриц сравнений альтернатив по критериям

Интерфейс решения задачи выбора работы методом анализа иерархий

Рисунок 7 Метод анализа иерархий: Вывод итогового ранжирования и лучшей альтернативы

Решение задачи выбора работы методом аксиоматической теории важности критериев

Составим матрицу превосходства в важности критериев K_1, K_2, K_3, K_4 на основе вектора важности критериев v.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{n_1}{n_2} = 2 \\ \frac{n_1}{n_4} = 3 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \to min \\ n_1, n_2, n_3, n_4 \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_2 = \frac{n_1}{2} \\ n_4 = \frac{n_1}{3} \\ n_1 + n_2 + n_3 \to min \\ n_1, n_2, n_3, n_4 \in N \end{cases} \Rightarrow \text{НОК}(2,3) = 6 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 6 \\ n_2 = 3 \\ n_3 = 6 \\ n_4 = 2 \end{cases}$$

Следовательно, N = $\langle 6,3,6,2 \rangle$,что определяет кратность каждой компоненты. Тогда

$f(a_1) = \langle 4,4,4,4,4,4,2,2,2,4,4,4,4,4,4,3,3 \rangle$
$f(a_2) = \langle 2,2,2,2,2,2,5,5,5,4,4,4,4,4,4,2,2 \rangle$
$f(a_3) = \langle 5,5,5,5,5,5,2,2,2,5,5,5,5,5,5,3,3 \rangle$
$f(a_4) = \langle 1,1,1,1,1,1,1,1,1,4,4,4,4,4,4,4,4 \rangle$
$f(a_5) = \langle 2,2,2,2,2,2,4,4,4,2,2,2,2,2,2,2,2 \rangle$

По возрастанию:

$f(a_1) = \langle 4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,3,3,2,2,2 \rangle$
$f(a_2) = \langle 5,5,5,4,4,4,4,4,4,2,2,2,2,2,2,2,2 \rangle$
$f(a_3) = \langle 5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,3,3,2,2,2 \rangle$
$f(a_4) = \langle 4,4,4,4,4,4,4,4,1,1,1,1,1,1,1,1,1 \rangle$
$f(a_5) = \langle 4,4,4,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2 \rangle$

После сравнения по Парето, получаем ранжирование критериев $a_3 - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}.$

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аксиоматической теории важности критериев

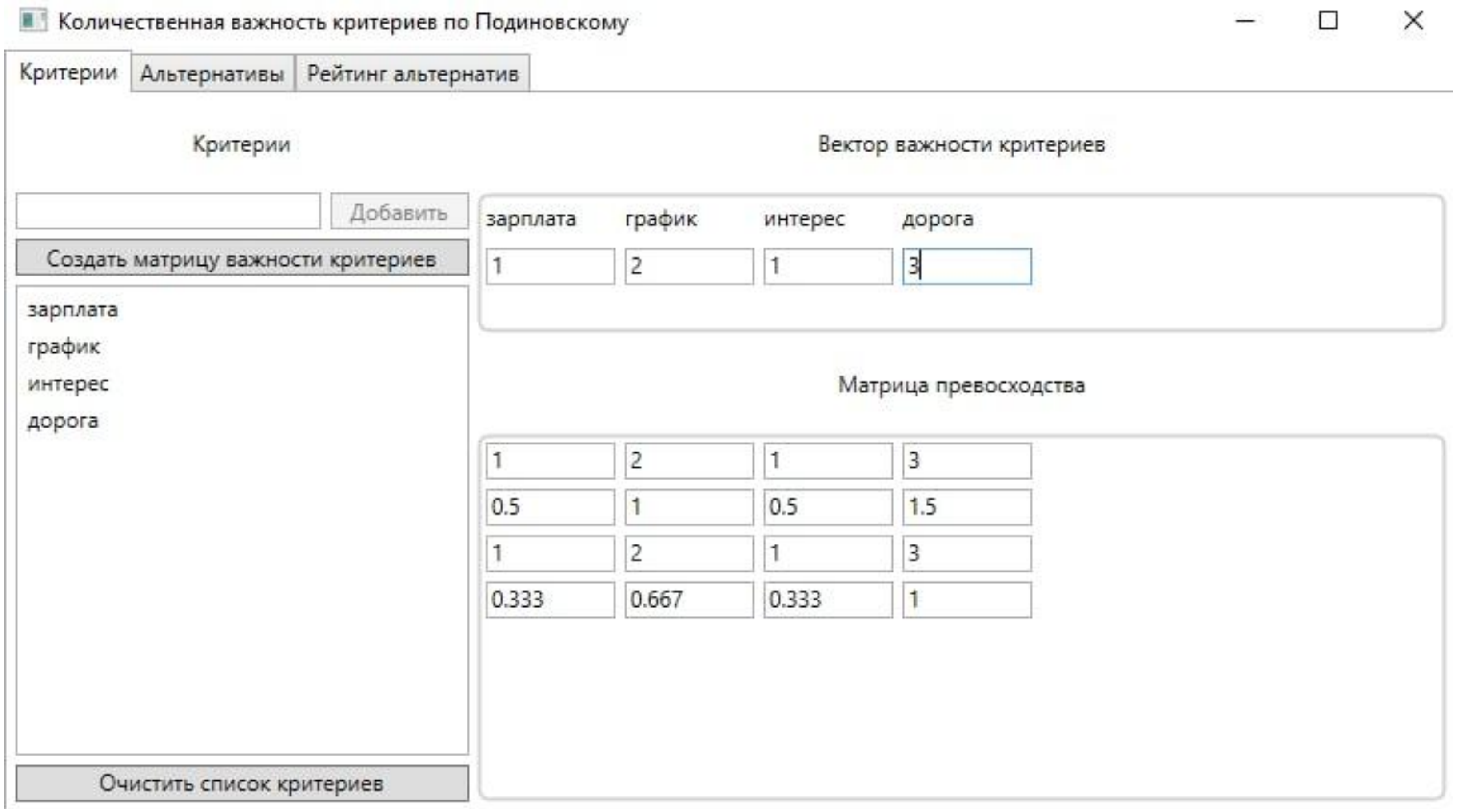

Рисунок 8 Аксиоматическая теория важности критериев: Ввод критериев, создание и заполнение вектора весов

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аксиоматической теории важности критериев

Рисунок 9 Аксиоматическая теория важности критериев: Ввод альтернатив, создание и заполнение матрицы значений

Интерфейс решения задачи выбора работы методом аксиоматической теории важности критериев

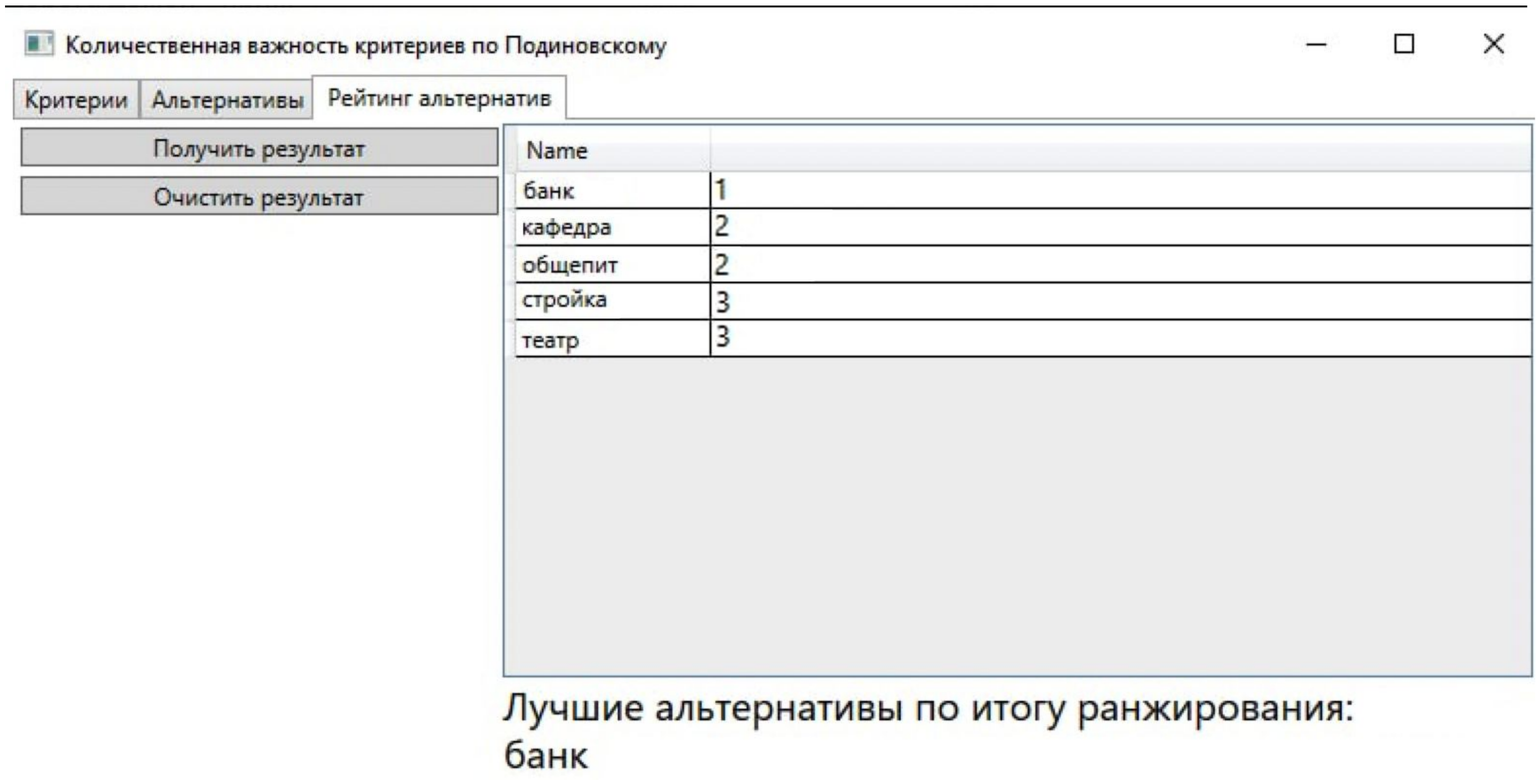

Рисунок 10 Ввод альтернатив, создание и заполнение матрицы значений : Вывод итогового ранжирования и лучшей альтернативы

Сравнение методов

- Имеем получившиеся итоговые ранжирования:

  1. – аддитивная линейная свертка;
  2. $a_3 - a_1 - a_2 - a_4 - a_5$ – метод анализа иерархий;
  3. $a_3 - \left[\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right. - \left[\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right.$ – аксиоматическая теория важности.

  Все три метода дают наилучшую альтернативу a_3, наихудшая a_5.

  Сделаем выводы:

  АТВК является наиболее математически обоснованным;

  МАИ является достаточно точным, однако он уступает в том, что для его реализации нужно собрать значительно больше информации от ЛПР, что затрудняет процесс и ведет к ошибкам;

  АЛС является самым простым и наименее математически обоснованным, однако часто используется на практике.

Заключение

Результатом выпускной квалификационной работы является:

I. Разработана программная система ранжирования альтернатив по предпочтительности с помощью трех методов:

1. Метода анализа иерархий.
2. Аддитивной линейной свертки.
3. Аксиоматической теории важности критериев.

II. Проведен анализ результатов ранжирования альтернатив тремя методами.

III. Решена прикладная задача выбора места работы.

Список использованных источников

1. Борисов А.Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. - Рига: Зинанте, 1990. - 133 с.
2. Демин Г. А. Методы принятия управленческих решений. - Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т., 2019. - 88 с.
3. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений: учебное пособие / А.В. Лотов, И.И. Поспелова.– М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
4. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора / Б.Г. Миркин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 256 с.
5. Осипова В.А., Алексеев Н.С. Математические методы поддержки принятия решений. - М.: ИНФРА-М, 2019. - 134 с.
6. Подиновский В.В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М. : Наука, 2019. – 103 с.
7. Hwang, C.L., Yoon, K., Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications. – Springer: Berlin Heidelberg, 1981. – 178 p.
8. Roper-Lowe G. C., Sharp J. A. The analytic hierarchy process and its application to an information technology decision. – The Journal of the Operational Research Society, 1990. – 181p.
9. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation. McGraw-Hill, N. Y., 1980. – 223 p.

Спасибо за внимание!