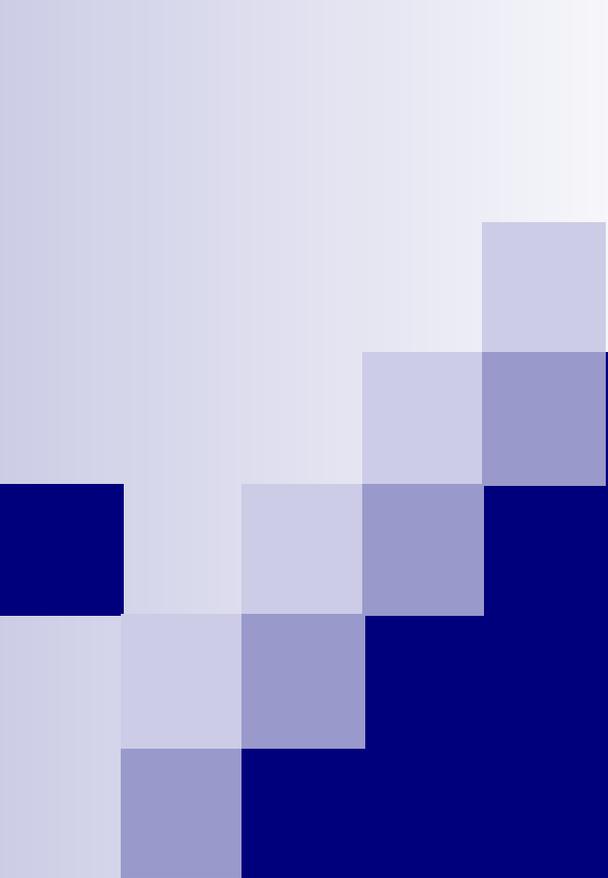
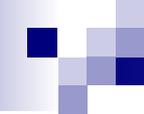


Теория алгоритмов и рекурсивных функций



1. Понятие алгоритма

- 
- 
- ***Алгоритм*** – это совокупность правил, соблюдение которых при вычислениях приводит к решению поставленной задачи.

Можно выделить некоторые черты, присущие каждому алгоритму

- ***Дискретность.***

Преобразование начальных данных происходит пошагово. На каждом шаге из данных по правилам получается новая совокупность данных.



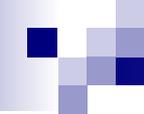
- ***Детерминированность.***

На каждом шаге результат работы алгоритма однозначно определяется совокупностью данных предыдущего шага.



- ***Направленность.***

Для алгоритма есть критерий, позволяющий определить, что является результатом работы алгоритма.

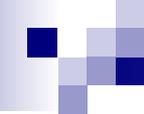
- 
- 
- ***Элементарность шагов алгоритма.***

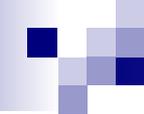
Описание действий на каждом шаге алгоритма должно быть достаточно простым.

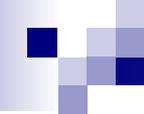


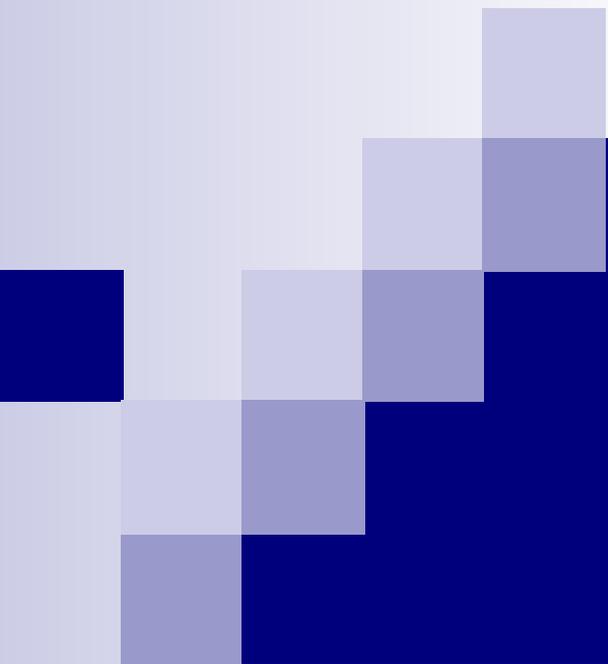
- ***Массовость.***

Применимость алгоритма не к одной задаче, а к целому классу задач.

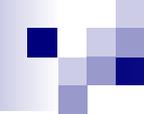
- 
- 
- **Каждый алгоритм предполагает наличие данных**
 - **ВХОДНЫЕ,**
 - **промежуточные,**
 - **ИТОГОВЫЕ,**
 - **с которыми производятся определенные действия.**

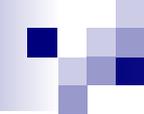
- 
- 
- Будем считать, что все данные представлены натуральными числами.
 - Каждое входное натуральное число должно быть конечным, тем не менее не предполагается верхняя граница этого числа.

- 
- 
- **Так же нет верхней границы количества шагов для обработки конкретных данных, однако количество шагов должно быть конечным.**



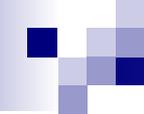
2. Машина Тьюринга

- 
- 
- **Первый важный и достаточно широкий класс алгоритмов был описан А.Тьюрингом и Э. Постом в 1936-1937гг.**

- 
- 
- **Поскольку алгоритм – это совокупность правил, то чтобы решить проблему интерпретации (понимания) правил, необходимо задать конструкцию интерпретирующего устройства.**

Для этого нужно определить

- **язык, на котором описывается множество правил поведения,**
- **и машину, которая может интерпретировать утверждения, сделанные на таком языке и выполнять шаг за шагом каждый точно определенный процесс.**

- 
- 
- **Английский математик А.М.Тьюринг в 1937 году впервые предложил модель вычислительной машины, известной теперь под названием *машина Тьюринга*, которая представляет собой воображаемую машину или математическую модель машины.**

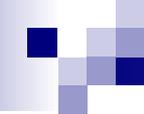
Требования, которые предъявляются к машине

- **детерминированность работы**
- **возможность ввода различных
начальных данных**
- **возможность получения
результата работы машины.**



**Под одноленточной машиной
Тьюринга понимают такое
кибернетическое устройство,
которое состоит из следующих
элементов:**

- 
- ***бесконечной ленты,***
разделенной на ячейки, которая
используется для ввода и
вывода данных, а также для
записи промежуточных
результатов



**На ленте могут записываться буквы
некоторого алфавита $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$
(внешний алфавит машины
Тьюринга).**

**Удобно считать, что пустые ячейки
на самом деле содержат некоторую
букву алфавита A (будем считать,
что это буква a_0)**

- ***управляющей головки,***
способной читать символы,
содержащиеся в ячейках ленты,
писать символы в эти ячейки и
оставаться на месте или
передвигаться на одну ячейку
вправо или влево.

- 
- ***выделенной ячейки памяти,***
содержащей символ внутреннего
алфавита, задающий состояние
машины Тьюринга

Головка может находиться в одном из состояний $Q=\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ (внутренний алфавит машины Тьюринга).

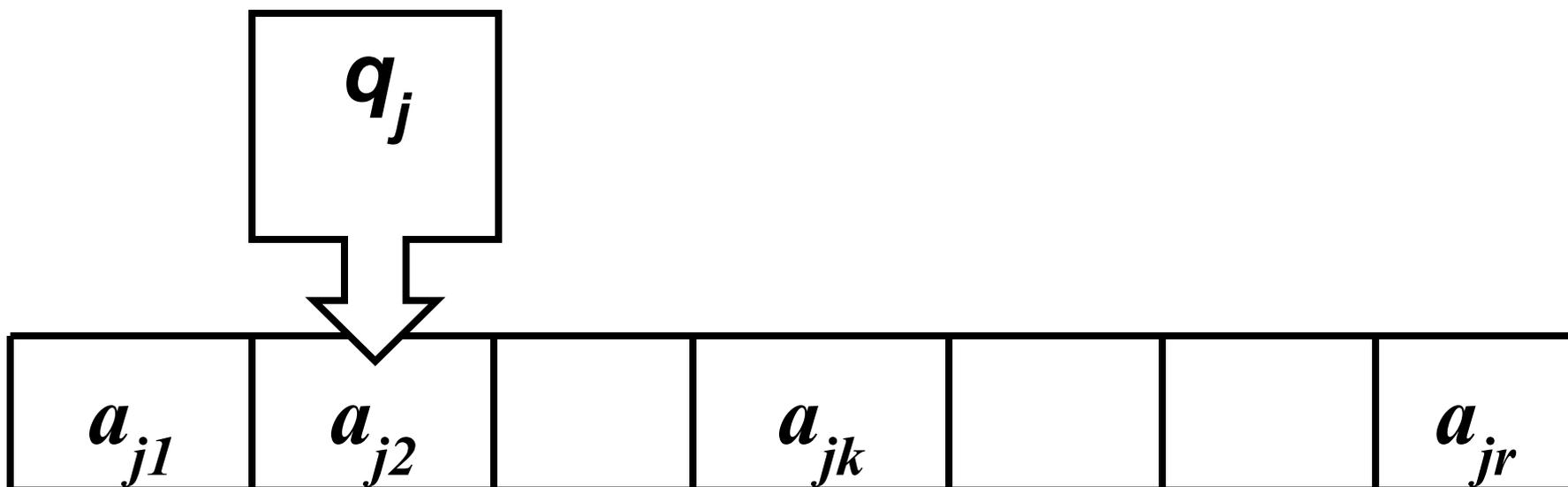
Состояние

q_0 – заключительное,

q_1 – начальное.

- ***механического устройства управления, обеспечивающего перемещение головки относительно ленты***
- ***функциональной схемы — области памяти, содержащей команды (программу) машины Тьюринга, доступной только для чтения***

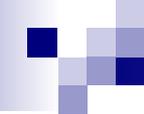
Обычно машина Тьюринга
схематично изображается так



- если машина, имея внутреннее состояние q_i и воспринимая ячейку ленты с символом a_i**
- **переводит внутреннюю память в состояние q_b и**
 - **одновременно содержимое воспринимаемой ячейки заменяет символом a_s ,**
 - **управляющая головка остается на месте (H), сдвинется на одну ячейку вправо (R) или влево (L),**

ТО машина выполняет одну из команд

- $q_i a_i \rightarrow a_s H q_b$
- $q_i a_i \rightarrow a_s R q_b$
- $q_i a_i \rightarrow a_s L q_b$

- 
- 
- **Совокупность всех команд, которые может выполнять машина, называется ее *программой*.**

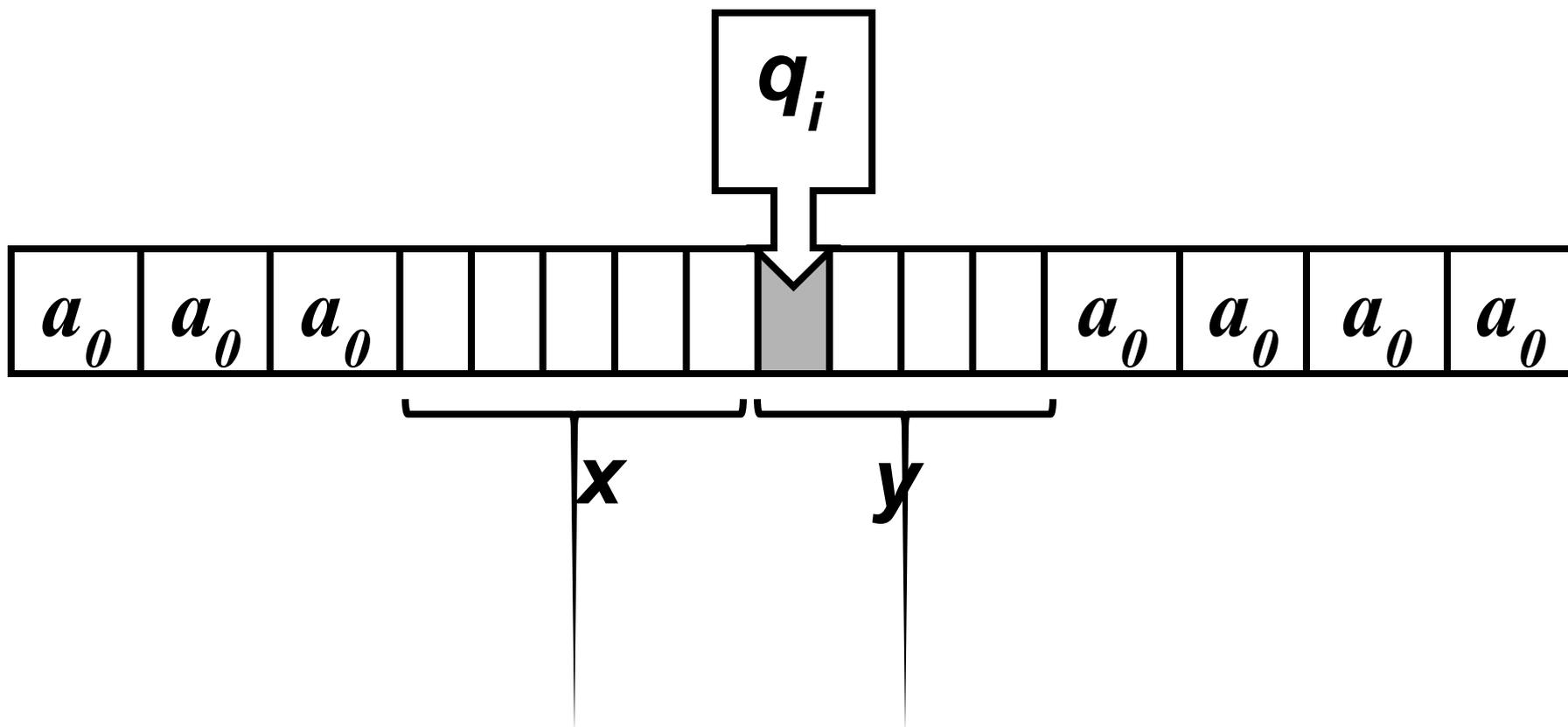
- Т. к работа машины целиком определяется состоянием в данный момент ее внутренней памяти q_i и состоянием воспринимаемой ячейки a_j ,
- то для каждой пары q_i, a_j программа машины должна содержать одну и только одну команду, начинающуюся словом $q_i a_j$

- ***Текущее состояние*** машины Тьюринга или ***конфигурация*** – это полная информация о внутреннем состоянии машины, о содержимом ячеек ленты и о ячейке, которую обзревает головка машины.

Конфигурация машины может быть записана в виде слова xq_iy , где x и y – слова записанные на ленте

- левее слова x и правее слова y все ячейки содержат пустой символ,
- головка машины обозревает ячейку, которая находится сразу после слова x ,
- первая буква слова y записана в ячейке ленты, обозреваемой головкой машины,
- q_i – состояние машины на данном шаге.

Конфигурация x q_i y



- 
- **Конфигурация с начальным состоянием головки называется *начальной*,**
 - **с заключительным состоянием – *заклучительной*.**

- **Переход за один такт работы МТ из конфигурации $x_1 q_i y_1$ в конфигурацию $x_2 q_j y_2$ будем обозначать так**

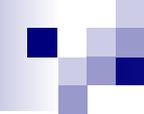
$$x_1 q_i y_1 \vDash x_2 q_j y_2$$

- Если переход из одной конфигурации в другую осуществляется более, чем за один шаг, то это будем обозначать таким образом

$$x_1 q_i y_1 \vdash x_2 q_j y_2$$

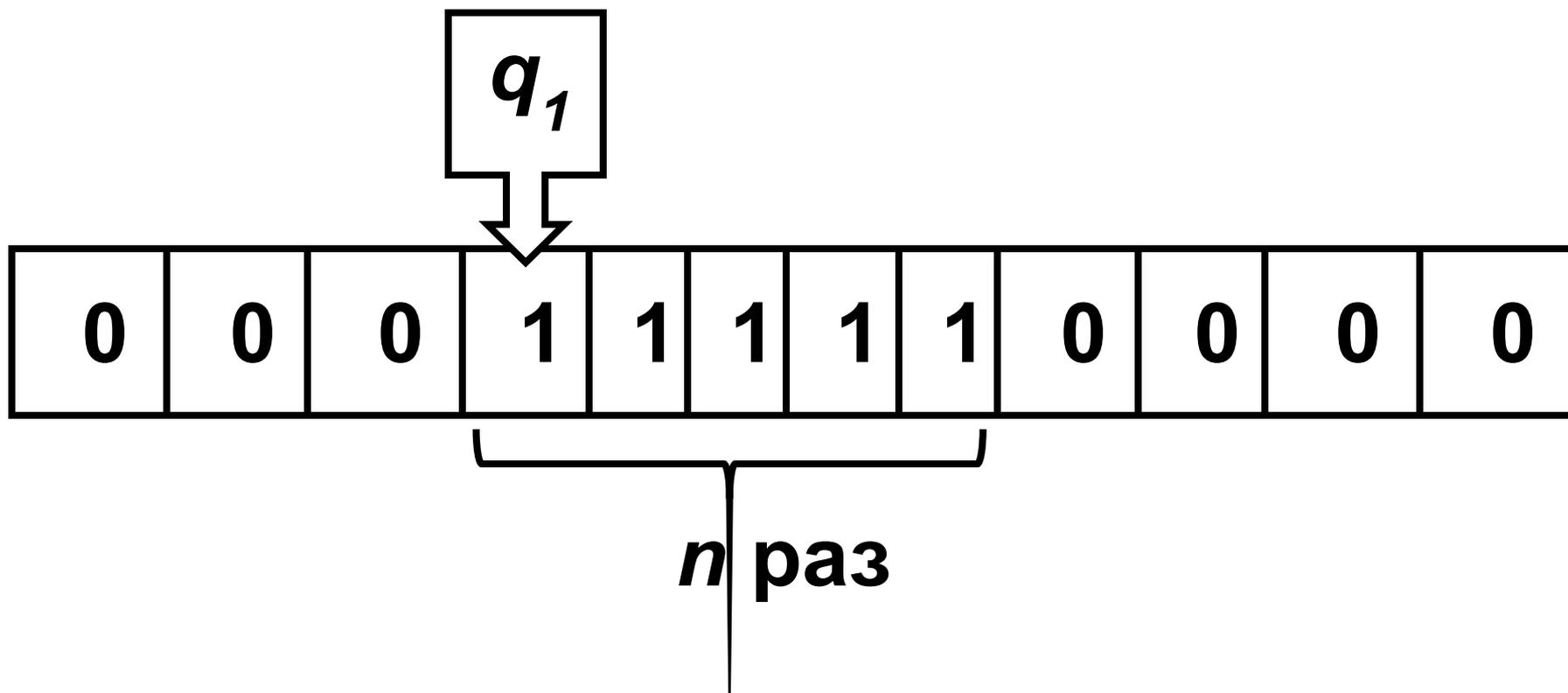
Пример 1.

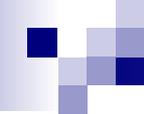
- Построить МТ, которая осуществляет переход $0 q_1 1^n \vdash 01^n q_0 0$, $n \geq 0$

- 
- 
- **внешний алфавит для такой МТ достаточно взять двухсимвольный $A=\{0,1\}$,**
 - **причем пустым символом будет 0**

Начальная конфигурация

$0 q_1 1^n$



- 
- 
- **Действия МТ сводятся к переходу к первому нулю после последовательности единиц и остановке.**

Программа МТ

- $q_1 0 \rightarrow 0 H q_0$
- $q_1 1 \rightarrow 1 R q_2$
- $q_2 1 \rightarrow 1 R q_2$
- $q_2 0 \rightarrow 0 H q_0$

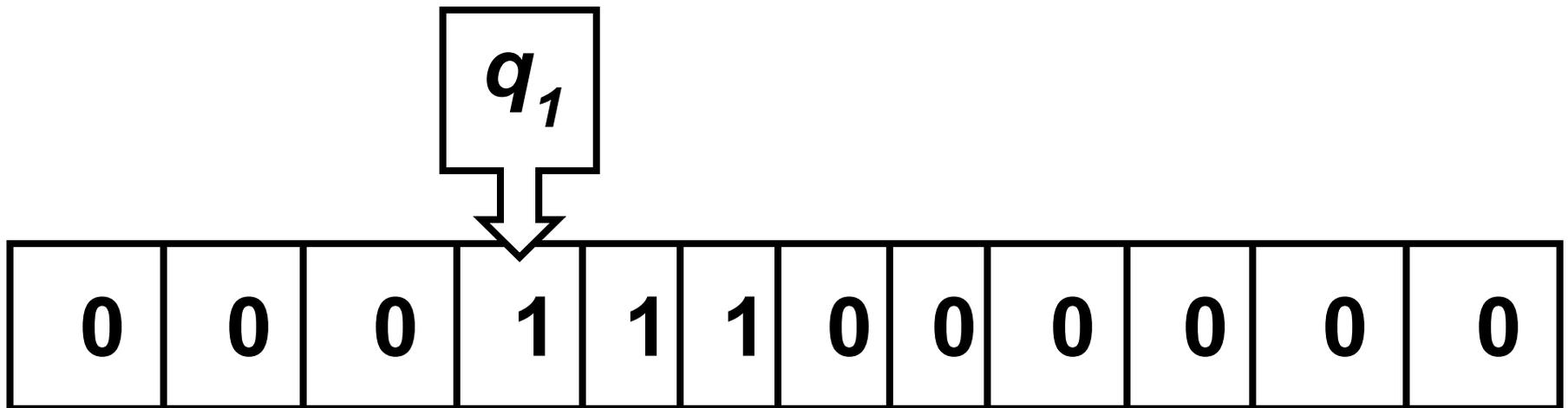
$1Rq_2$

| | q_1 | q_2 |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0 | $0Hq_0$ | $0Hq_0$ |
| 1 | $1Rq_2$ | $1Rq_2$ |

- 
- **Приведем пошаговое исполнение программы для начальной конфигурации при $n=3$**

$0 \ q_1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \mid \neq$

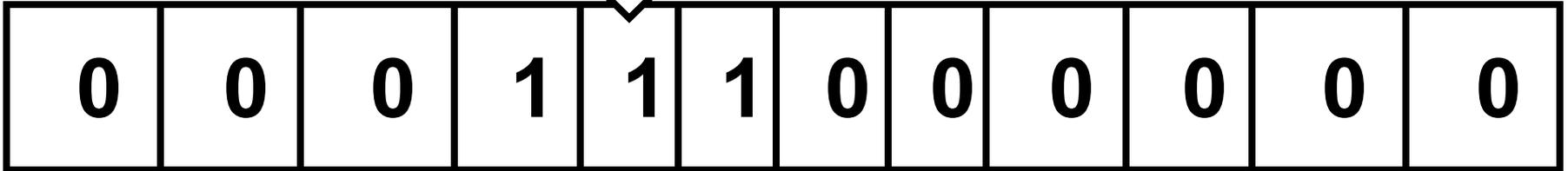
$q_1 \ 1 \rightarrow 1 \ R \ q_2$



0 1 q_2 1 1 \vdash

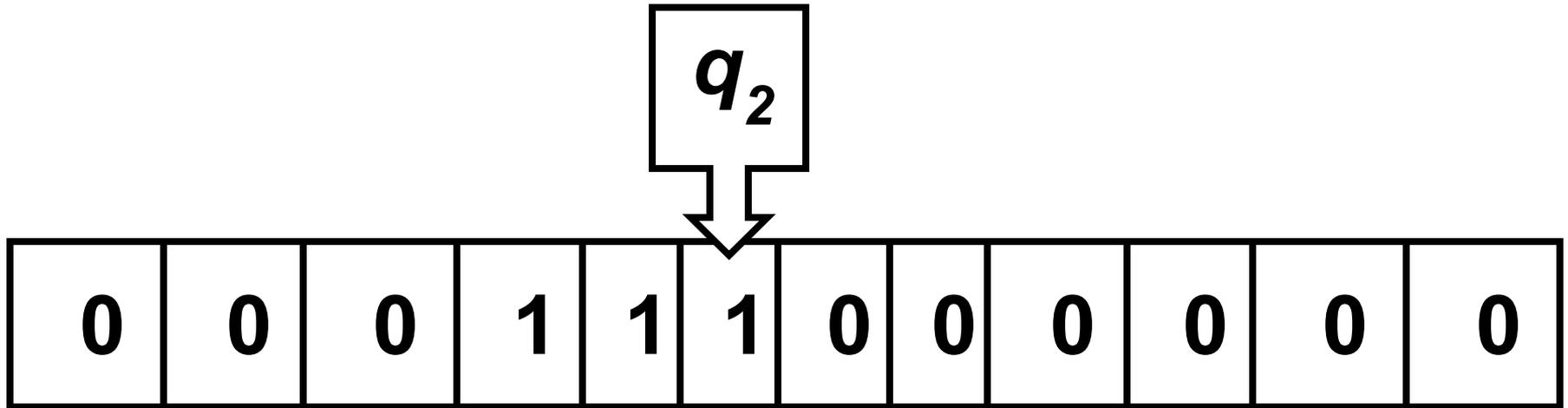
q_2 1 \rightarrow 1 R q_2

q_2

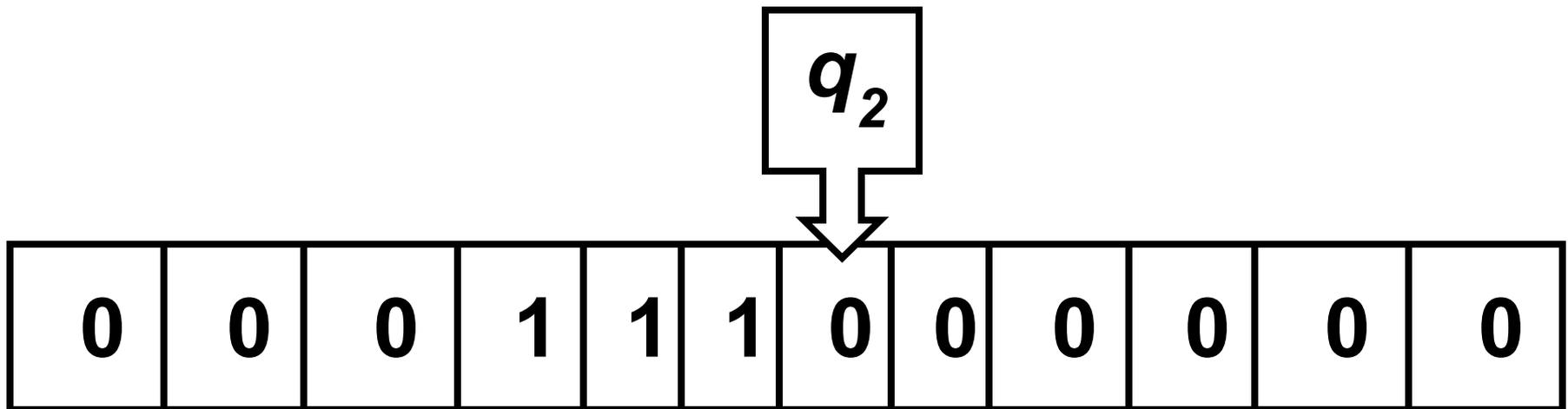


0 1 1 q_2 1 0 |

q_2 1 \rightarrow 1 R q_2



$0\ 1\ 1\ 1\ q_2\ 0 \models$
 $q_2\ 0 \rightarrow 0\ H\ q_0$



0 1 1 1 q_0 0

