

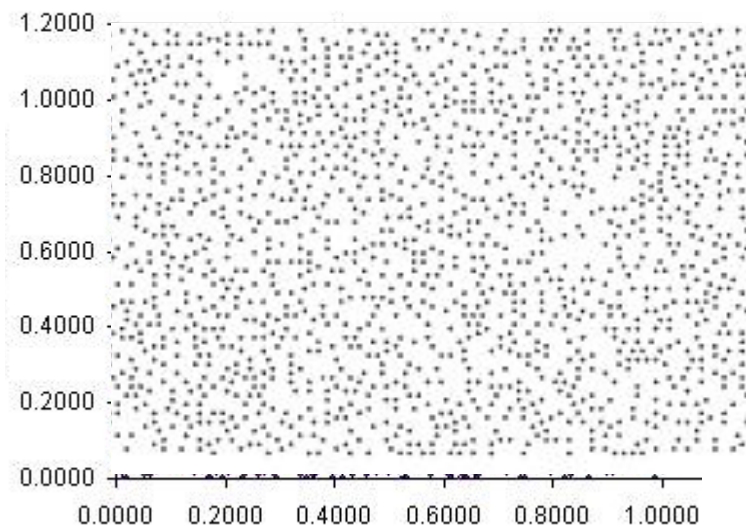
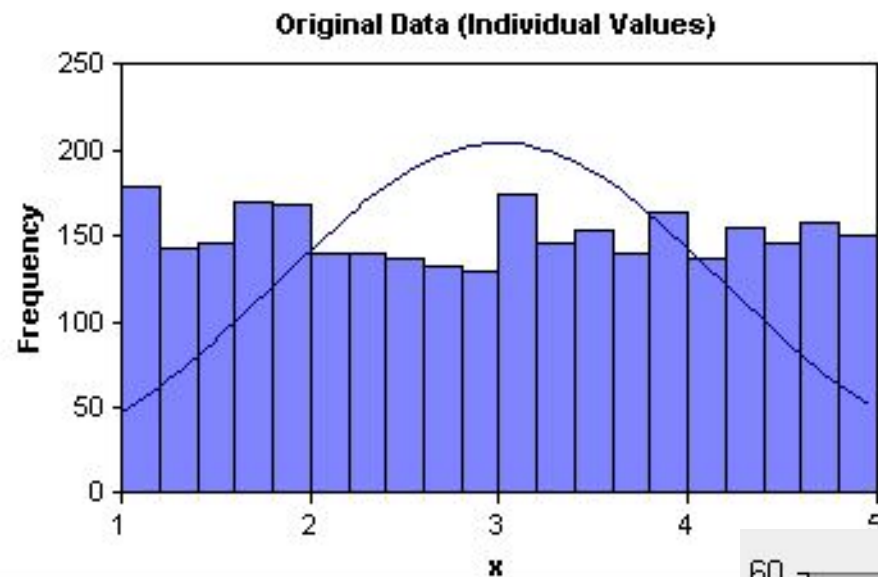
Виды распределения дискретных случайных величин

10.3.2.16 распознавать виды
распределения дискретных
случайных величин: биномиальное
распределение

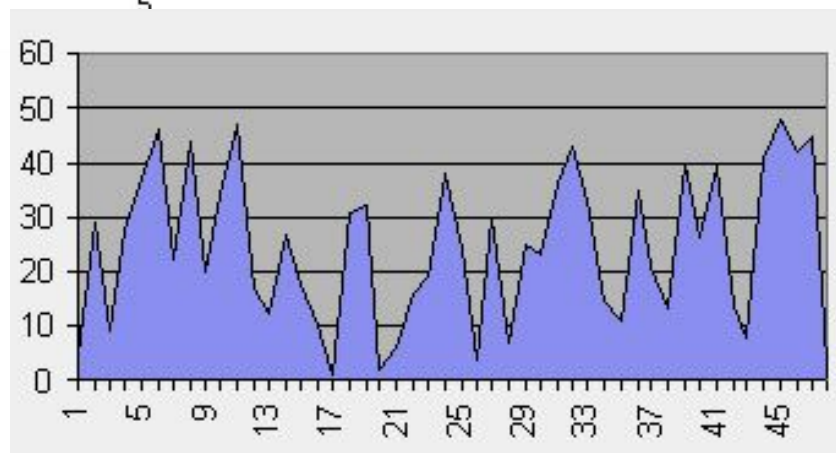
Трансформация данных

Какие бывают распределения:

1. Равномерное (uniform)



2. Случайное (random)



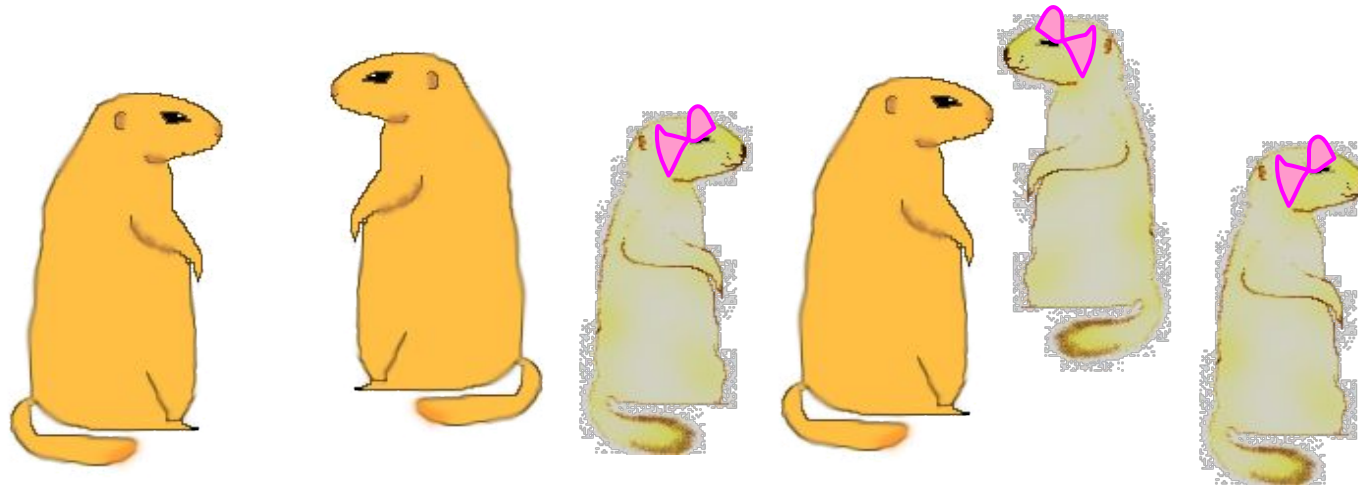
Могут быть и дискретными, и непрерывными

3. Биномиальное распределение (дискретное).

Пример: рассмотрим выводки из 6 детёнышей каждый.

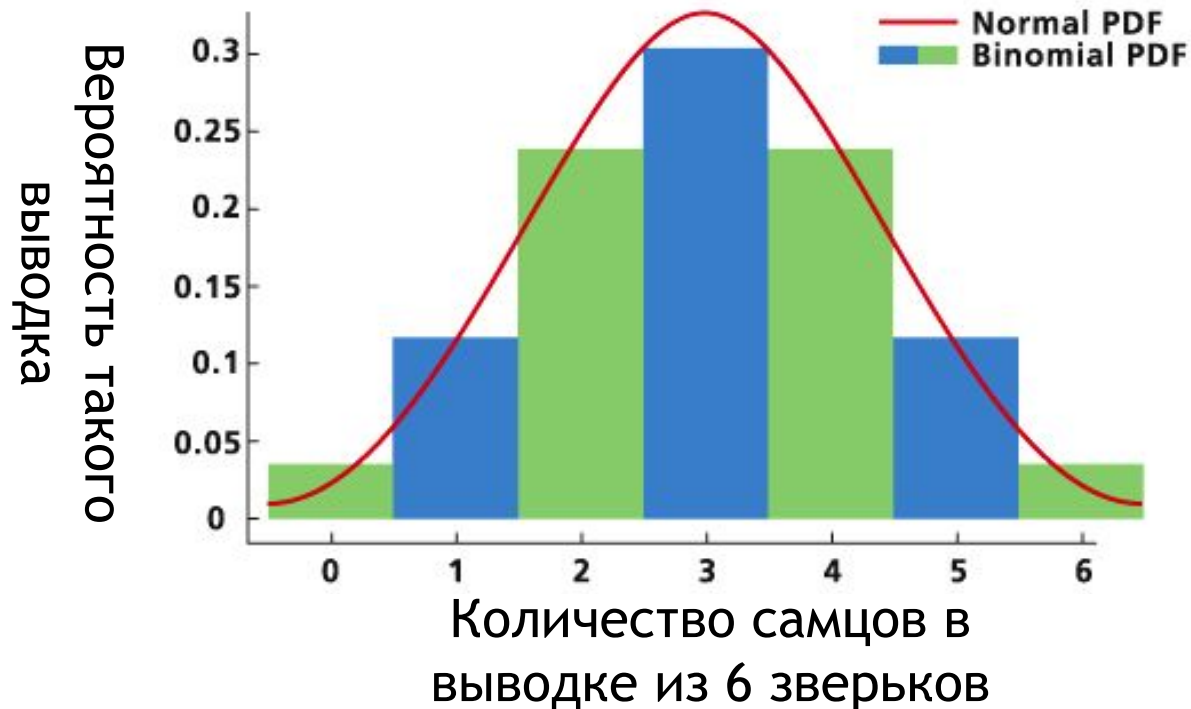
Возможное соотношение самцов и самок в выводке:

6:0; 5:1; 4:2; 3:3; 2:4; 1:5; 0:6



Биномиальное распределение

распределение количества «успехов» (*самцов*) в последовательности из N независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» (*рождения самца*) в каждом из них постоянна и равна p .



Биномиальное распределение

О случайной величине — числе «успехов» в n испытаниях Бернулли — говорят, что она имеет **биномиальное распределение** с параметрами n и p и обозначают $X \sim B(n, p)$

Пример 1. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что стрелок ровно два раза попадет в цель.

При решении примера 1 (о трех выстрелах стрелка) мы фактически находим закон распределения случайной величины

X — числа попаданий при трех выстрелах:

То есть X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=3$ и $p=0,9$ или $X \sim B(3, 0.9)$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Пример 2. Дано что $X \sim B(8, 0.25)$.

Найдите (а) $P(X=6)$;

(б) $P(X \leq 2)$;

(в) $P(X > 0)$;

Решение:

$$(а) P(X=6) = C_8^6 \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^2 = 28 \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^2 \approx 0.00385$$

округленное с точностью до 3 значащихся цифр

$$(б) P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = C_8^0 \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^8 + \\ + C_8^1 \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^7 + C_8^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^6 = 0.1001... + 0.2669... +$$

$+ 0.3114... = 0.6785... \approx 0.679$ округленное с точностью до трех значащихся цифр

$$(в) P(X > 0) = 1 - P(X=0) = 1 - C_8^0 \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^8 = 1 - 0.1001 = 0.8998... \approx \\ \approx 0.900$$
 округленное с точностью до трех значащихся цифр

Пример 3. Составьте ряд распределения величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n=4$, $p=\frac{1}{3}$.

Производится серия из $n=4$ опытов. Случайная величина X - число опытов, в которых может произойти событие A , может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности находятся по формуле Бернулли при $n=4$, $p=1/3$, $q=1-1/3=2/3$.

$$p(X = m) = C_4^m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-m}$$

Вероятность того, что событие A не произойдет ни в одном опыте ($m=0$):

$$p(X = 0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Вероятность того, что событие А произойдет в одном опыте ($m=1$):

$$p(X = 1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

Аналогично находим вероятности того, что это событие произойдет в двух ($m=2$), в трех ($m=3$) и в четырех ($m=4$) опытах:

$$p(X = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$p(X = 3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$p(X = 4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X будет выглядеть так:

X_m	0	1	2	3	4
P_m	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Можно убедиться, что суммарная вероятность действительно равна 1.

Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

X - число опытов в серии из n , в которых произошло событие A .

Введем для каждого $i=1,2,\dots,n$ случайную величину Z_i .

Пусть Z_i принимает всего два значения: 1 - если событие A произойдет в i -ом опыте и 0 - если событие A не произойдет в i -ом опыте.

Тогда событие X выразится через сумму событий Z_i :

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X :

$$M[X] = M[Z_1] + M[Z_2] + \dots + M[Z_n]$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	0	1
P_i	q	p

Тогда $M[Z_i] = p$ и $M[X] = np$.

Найдем дисперсию случайной величины Z_i

$$D[Z_i] = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq$$

Так как случайные величины Z_i
независимы, то

$$\begin{aligned} D[X] &= D[Z_1] + D[Z_2] + \dots + D[Z_n] = \\ &= n \cdot D[Z_n] = n \cdot p \cdot q \end{aligned}$$

Таким образом, для случайной величины,
распределенной по биномиальному закону

$$M[X] = n \cdot p$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q$$