Синус, косинус и тангенс половинного угла. Формулы приведения

Установите соответствие между формулами

1. $\sin 2\alpha$
2. $\cos 2\alpha$
3. $tg 2\alpha$
4. $\sin(\alpha + \beta)$
5. $\sin(\alpha - \beta)$
6. $\cos(\alpha + \beta)$
7. $\cos(\alpha - \beta)$
8. $tg(\alpha + \beta)$
9. $tg(\alpha - \beta)$

а) $\dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

б) $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$

в) $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

г) $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$

д) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

е) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

ж) $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

з) $\dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$

и) $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta$

Ответ:1-в, 2-д, 3-а, 4-ж, 5-б, 6-и, 7-г, 8-е, 9-з.

Формулы двойного аргумента

$$\cos 2\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

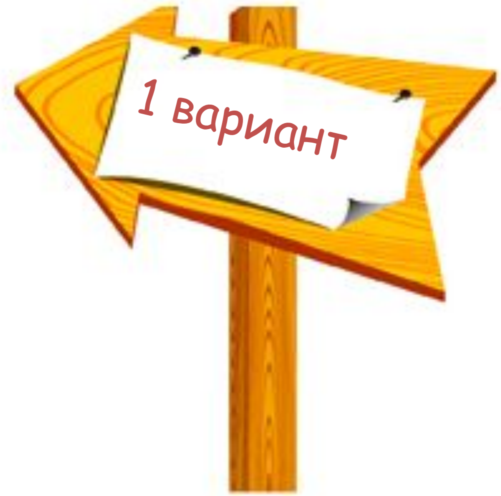
$$\sin 2\alpha$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$tg\,2\alpha$$

$$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$$

Самостоятельная работа



1. Известно, что $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos 2\alpha$.

2. Упростите выражение $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

3. Решите уравнение $\sin 3x \cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1. Известно, что $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Найдите $\sin 2\alpha$.

2. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

3. Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{6} - \cos^2 \frac{x}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вывод формул

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$$

$$\cos\alpha = \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Вывод формул

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2} \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+cos\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Формулы понижения степени

Формулы понижения степени

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

$$ctg^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

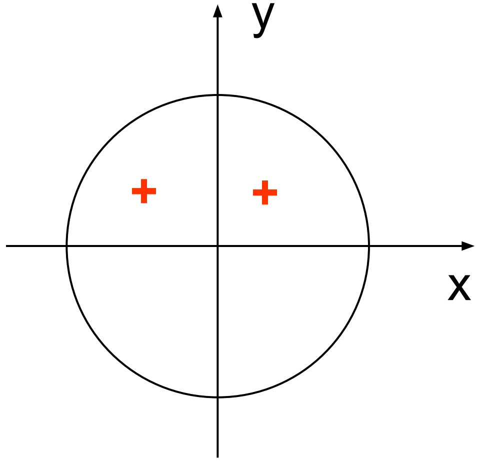
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

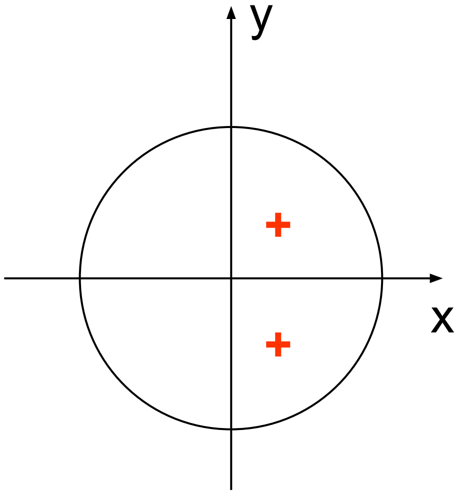
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Знаки тригонометрических функций

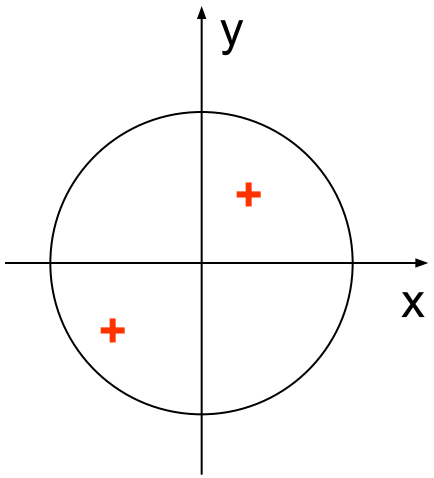
$\sin\alpha$



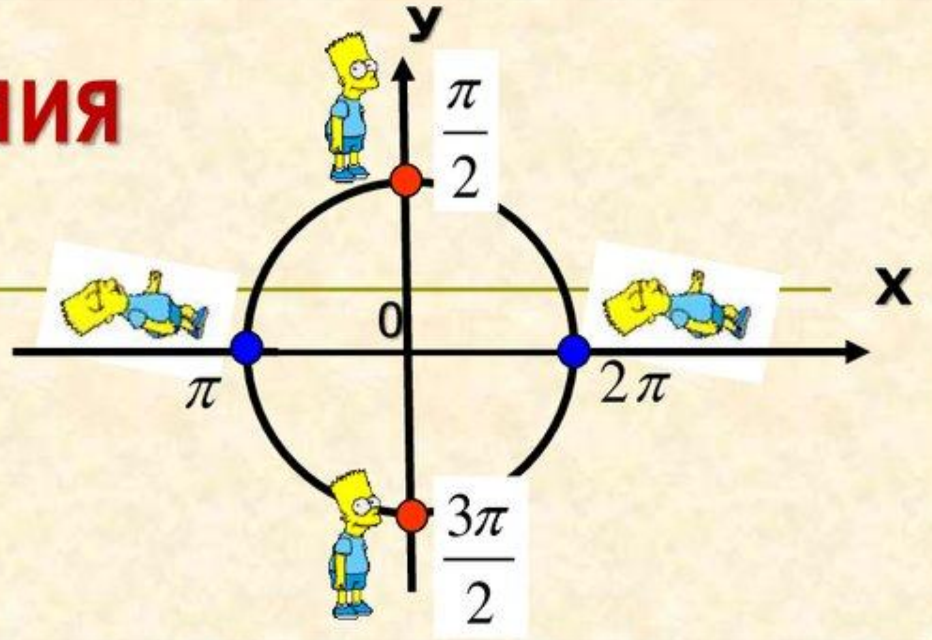
$\cos\alpha$



$tg\alpha$



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ (ПРАВИЛО)



	Приведение через «рабочие» углы: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2};...$ 	Приведение через «спящие» углы: $\pi; 2\pi; 3\pi; ...$ 
Название функции	**Меняется на конфункцию**	**Не меняется**
Знак	**Определяется по знаку функции в левой части формулы**	

Формулы приведения.

$k \in Z$

$\cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha$ $\quad \sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\alpha+2\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha+2\pi k)=\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{ctg}\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$

$$\underline{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}=\operatorname{tg}(\alpha+\pi-2\pi)=\underline{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}=-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-(-\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}(\alpha+\pi-2\pi)=\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)=-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-(-\operatorname{ctg}\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$$

Применение формул

Дано: $\cos x = -\frac{12}{13}, x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Найти: $\cos\frac{x}{2}$

Решение:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{-\frac{12}{13} + 1}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{26}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{26}}$$

$$\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}}$$

Ответ: $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}}$

Дано: $\cos x = -\frac{12}{13}, x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Найти: $\sin \frac{x}{2}$

Решение:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\frac{12}{13}}{2} \qquad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{25}{26}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \frac{5}{\sqrt{26}} \qquad \frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \sin \frac{x}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

Ответ: $\sin \frac{x}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \dfrac{1}{2}$

$$\left(\sin^2 x\right)^2 + \left(\cos^2 x\right)^2 = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1 - cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 4\sin 2x - 2$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4\sin 2x - 2$$

$$2+2\cos^2 2x = 4\sin 2x - 2$$

$$2\cos^2 2x - 4\sin 2x + 4 = 0$$

$$2(1-\sin^2 2x) - 4\sin 2x + 4 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 2x - 4\sin 2x + 4 = 0$$

$$-2\sin^2 2x - 4\sin 2x + 6 = 0$$

$$-2y^2 - 4y + 6 = 0$$

$y = -3$ $\quad\quad$ $\sin 2x = -3$ $\quad\quad$ *нет.решения*

$y = 1$ $\quad\quad$ $\sin 2x = 1$ $\quad\quad$ $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Выполните упражнения

○21.23. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5^\circ$; в) $\sin \frac{3\pi}{8}$;

○21.11. а) Дано: $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Вычислите: $\cos \frac{t}{2}$; $\sin \frac{t}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

Докажите тождество

○21.20. а) $\sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2}$;

б) $2 \sin^2 \frac{t}{2} + \cos t = 1$;

Домашнее задание

Формулы наизусть,
№ 21.23(б,г)
21.11(б)
21.20(в,г)