

Схема Бернулли

Лекция

Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми повторными испытаниями.
- В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью $1/6$ в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью $1/2$ в каждом испытании.

Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т. е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события A (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события A (неуспех) с постоянной вероятностью $q=1-p$, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли**.

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).



Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события A в одном испытании

$q=1-p$ - вероятность не появления события A в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях



Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию $n = 7$, $m = 4$, $p = 0.75$, $q = 1 - p = 0,25$

По формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^3 = 35 \cdot 0,316 \cdot 0,0156 \approx 0,172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969



Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х:
 $n=4$, $m=2$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти:
 $n=6$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. $3/8 > 5/16$, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.



Формула Бернулли

Пример. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

- a) менее трех цыплят $P_6(m < 3)$; (0,07047)
- b) более трех цыплят $P_6(m > 3)$; (0,74431)
- c) не менее трех цыплят $P_6(m \geq 3)$; (0,92953)
- d) не более трех цыплят $P_6(m \leq 3)$; (0,25569)



Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали

$$P = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P_5(0)=0,32768; \quad P_5(3)=0,0512;$$

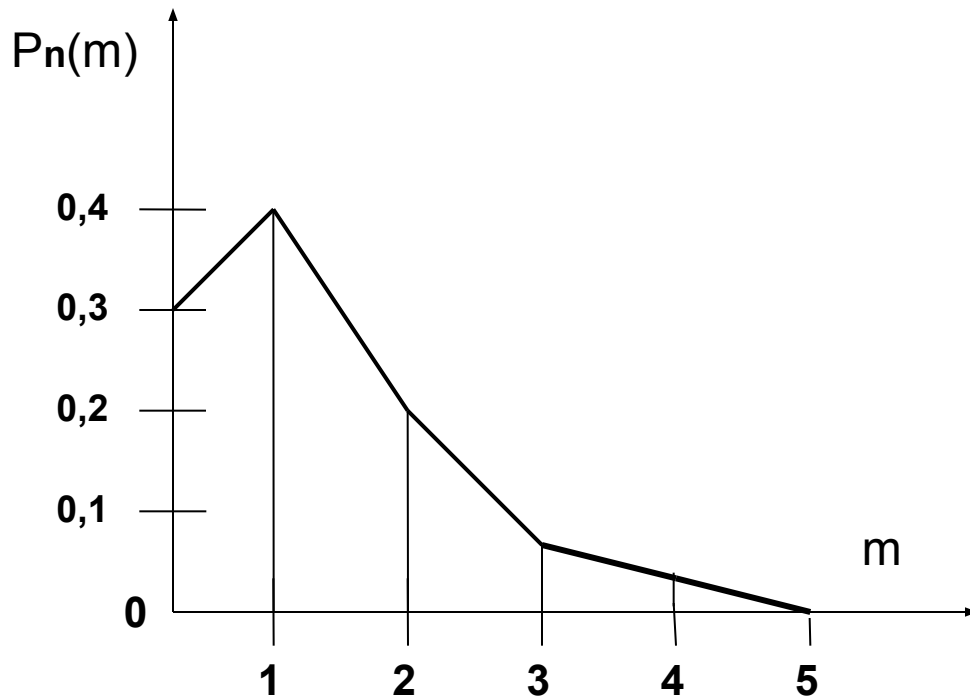
$$P_5(1)=0,4096; \quad P_5(4)=0,0064;$$

$$P_5(2)=0,2048; \quad P_5(5)=0,00032.$$

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m, P_n(m))$. Соединяя эти точки, получим **многоугольник, или полигон, распределения вероятностей.**



Наивероятнейшее число появлений события.



Рассматривая многоугольник распределения вероятностей мы видим, что есть такие значения m (в данном случае, одно - $m_0=1$), обладающие наибольшей вероятностью $P_n(m)$.



Наивероятнейшее число появлений события.

Число m_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m .

Для нахождения m_0 используется двойное неравенство:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$



Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение. По условию: $p=0.3$, $q=0.7$, $n=30$.

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

$$0.3 \cdot 30 - 0.7 \leq m_0 \leq 0.3 \cdot 30 + 0.3$$

$$8.3 \leq m_0 \leq 9.3$$

$$m_0 = 9$$

Ответ: наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет равно 9.

Т.е. вероятнее всего 9 раз за 30 лет 21 июля будет дождливым.

