Основные вопросы лекции

1. Понятие соответствия
2. Понятие отображения
3. Понятие отношения
4. Свойства отношений

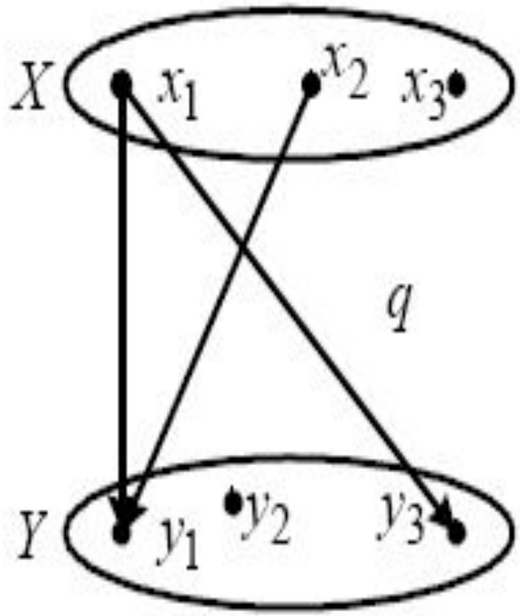
Рассмотрим два множества

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

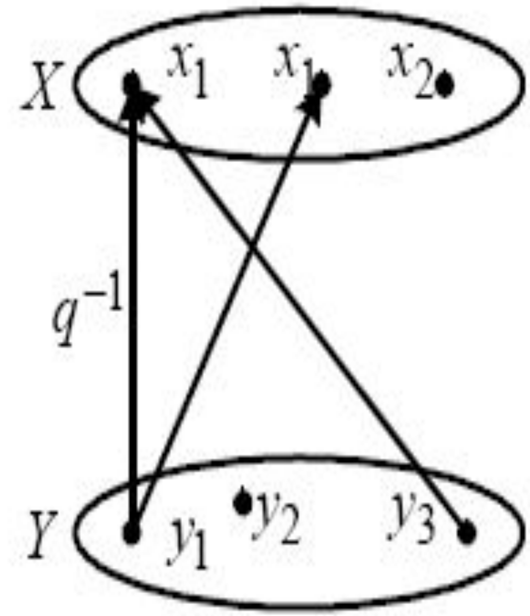
Соответствие q представляет собой тройку множеств q = (X,Y,Q), где X и Y – это множества, элементы которых сопоставляются

Множество $Q \subseteq X \times Y$ определяет закон, по которому осуществляется соответствие , т.е. перечисляет все пары, участвующие в сопоставлении.

Для каждого $q = (X, Y, Q)$ можно указать обратное соответствие $q^{-1} = (X,Y,Q^{-1})$, где $Q^{-1} = Y \times X$.



Прямое соответствие



Обратное соответствие

Обратное соответствие обратного соответствия даст прямое соответствие

$$(q^{-1})^{-1} = q.$$

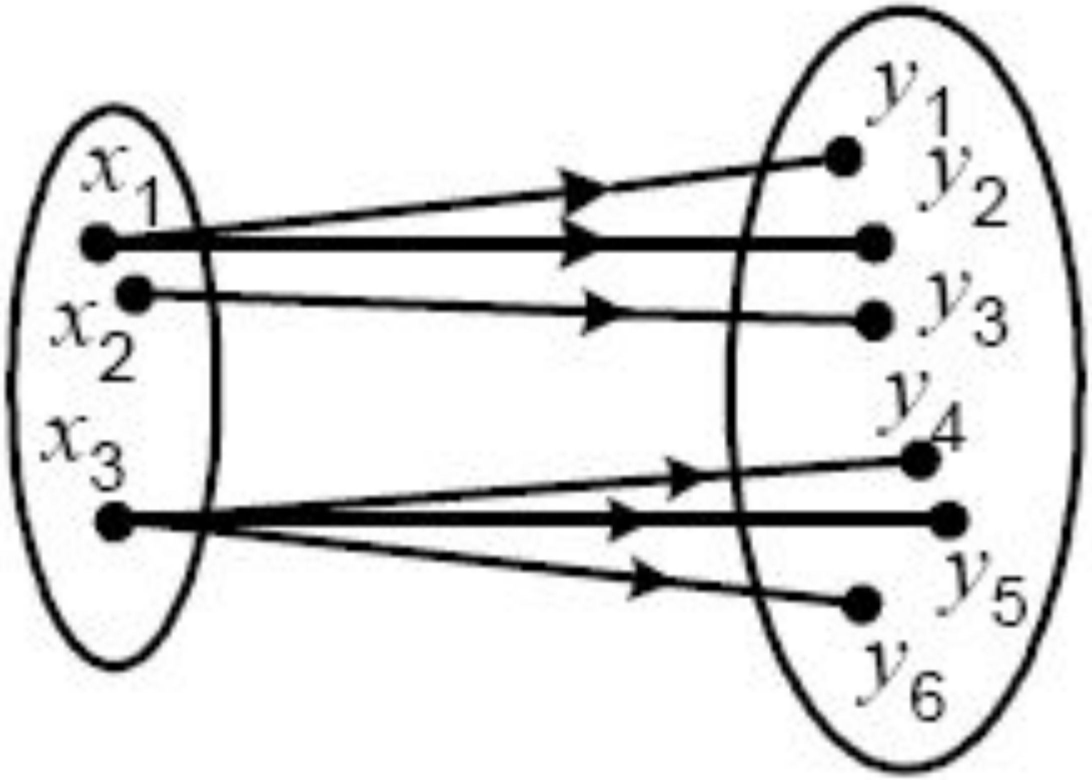
Соответствие называется **взаимно однозначным**, если каждому элементу множества X соответствует (поставлен в пару с ним) единственный элемент множества Y и обратно.

Если между X и Y установлено ***взаимно однозначное*** соответствие, то они имеют поровну элементов.

Отображение является *частным случаем соответствия (однозначное соответствие)*.

Соответствие, характеризующее правило, по которому ***каждому*** элементу множества *X* сопоставляется один или несколько элементов множества *Y*, называется *отображением* и записывается как Г: X→Y , где множество Г определяет закон отображения.

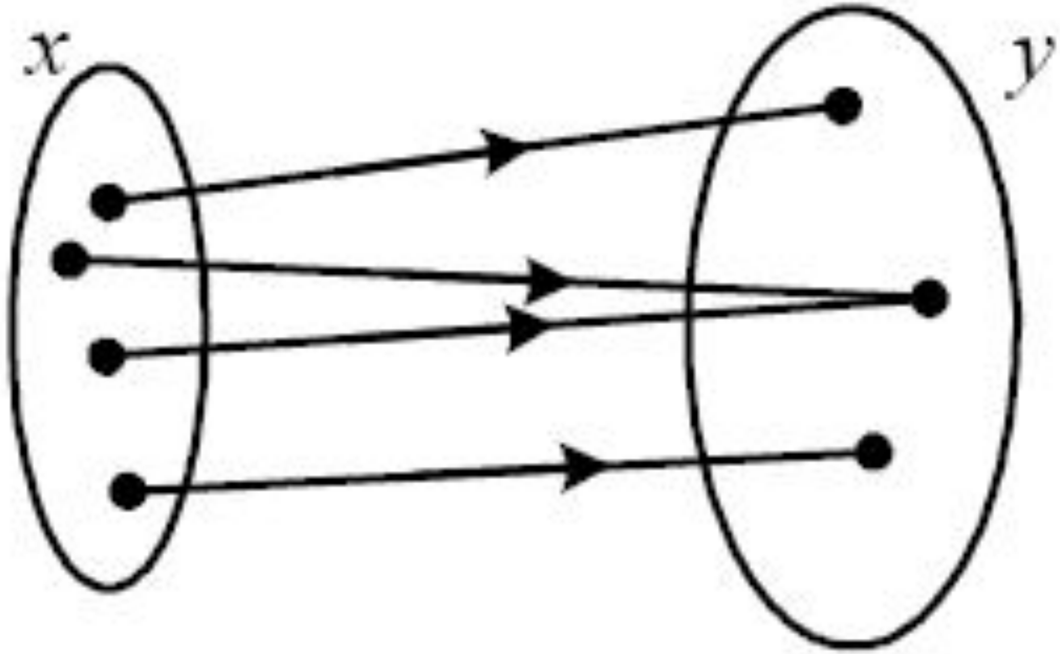
Пусть
$X = \{x_1, x_2, x_3\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$.



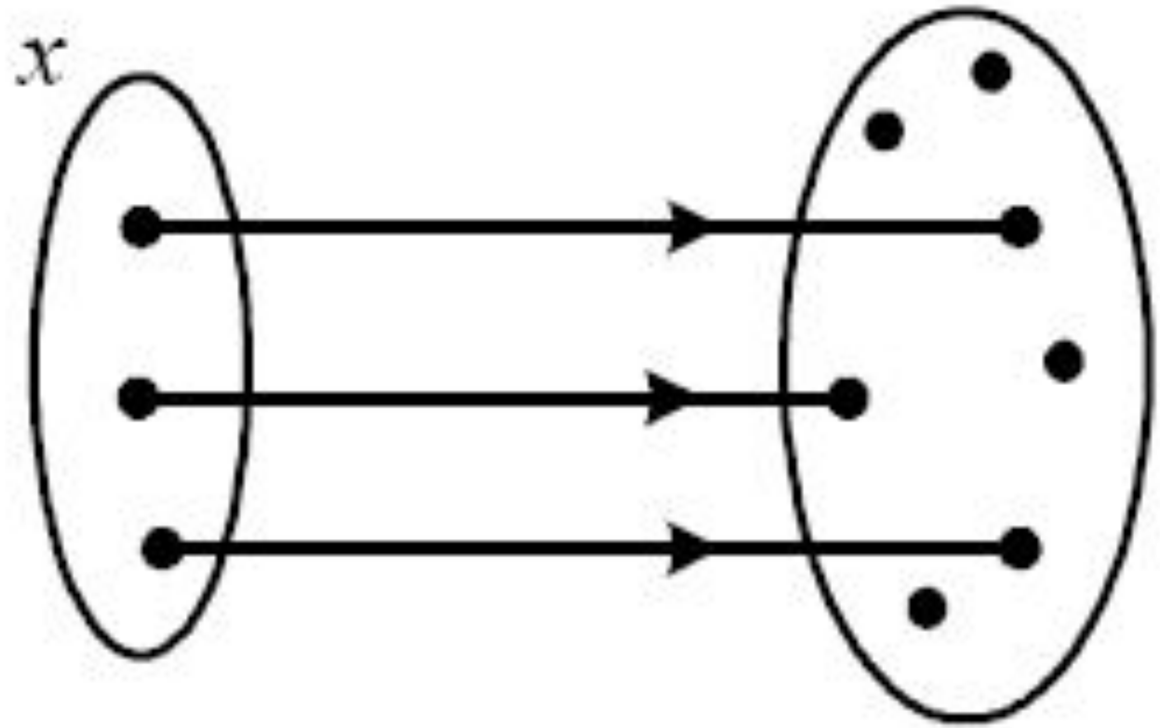
Каждому элементу $x_i \in x$ отображение Г ставит в соответствие некоторое подмножество $Г \subseteq Y$, называемое образом элемента x:

$Г_{x1} = \{y_1, y_2\}$, $Г_{x2} = \{y_3\}$, $Г_{x3} = \{y_4, y_5, y_6\}$.

Отображение называется ***<u>сюръективным</u>*** (или отображением "на"), если образы точек множества *X* заполняют все множество *Y*, причем различные точки множества *X* могут иметь один и тот же образ.


x
y

Отображение называется ***инъективным*** (или отображением "в"), если элементы множества X отображаются не на все множество Y, а в его какую-то часть.



x

- ***Биективное*** отображение является одновременно инъективным и сюръективным, т.е. является взаимно однозначным.

Важным случаем отображения является отображение элементов внутри одного множества.

При этом отображение Г: X→X будет определяться парой (X, Г),

где Г $\subseteq$ X×X или Г $\subseteq$ X ^{2}.

С помощью отображений могут быть даны определения таким понятиям, как функция, функционал, оператор.

Если отображение Г: $X \to Y$ рассматривается как соответствие между множествами X и Y, то множество $f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ называется функцией.

Таким образом, f является множеством, элементами которого являются пары (x, y), участвующие в соответствии, и $f(x)$ является обозначением для $y \in Y$, соответствующего данному $x \in X$.

Произвольное подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

называется отношением, заданным или определенным на множествах

$A_1, A_2, \ldots, A_n$.

элементы $x_1, \ldots, x_n$

(где $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$)

связаны отношением R тогда и только

тогда, когда , $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$

а – $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

упорядоченный набор из n элементов.

Бинарным отношением (соответствием) R из A в B называется подмножество декартового произведения множеств A × B.

$R \subseteq A \times B$.

Если $(a,b) \in R$, это записывается

как aRb;

при этом говорят, что a и b находятся в

отношении R, или просто,

что a относится к b.

Примером отношений могут служить

такие понятия:

как "меньше, чем",

"делится на",

"включено в",

"больше чем" и т.д.

Примеры отношений:

- а) соответствие между множеством отпечатков пальцев A = {a, b, c} и множеством подозреваемых B = {Иванов, Петров}.
- б) все множество A × B есть отношение множеств A и B.

- в) пусть A – множество товаров в магазине, а B – множество действительных чисел.

  Тогда $\{(x,y)\;\; A \times B: y$ – цена $x\}$ – отношение множеств A и B.

- г) пусть A – множество женщин, а

  B – множество мужчин,

  тогда {(x,y) A × B: y является мужем x}

  есть отношение A и B.

- д) если A – множество людей,

  то {(x,y) A × A: y является

  родственником x} есть отношение на A.

- e) если $A = \{1,2,3\}$, а $B = \{r, s\}$,

  так что

$A \times B = \{(1,r), (1,s), (2,r), (2,s), (3,r), (3,s)\}$,

  тогда $R = \{(1,r), (1,s), (3,s)\}$

  есть отношение множеств A и B.

Пример

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$R = \{(x, y) : x, y \in A, \text{где } x - \text{делитель } y \text{ и } x \leq 5\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), \\ (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), \\ (4,4), (4,8), (5,5), (5,10) \end{array} \right\}$$

Подмножество R декартового произведения множеств $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется ***отношением степени n*** (n-арным отношением).

Если $A_1=A_2=A_3=\ldots=A_n$, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется ***декартовым произведением*** n-й степени множества $A(A^n)$, а отношение R, заданное на множествах $A_1, A_2, \ldots A_n$ – n –арным отношением на множестве A.

- Обобщенное понятие отношения: n-местное отношение R – множество упорядоченных наборов

$$R \subseteq A^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots x_n) \middle| x_i \in A, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Пример

Отношение $R = \left\{(x, y) \middle| \; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

круг радиуса 1 с центром в начале координат, то есть множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

задает отношение между осью абсцисс и осью ординат.

Пример

Если А –конечное, то отношение задают списком пар.

$$A = \{1,2,3,4\} \text{ и } R = \{(x, y) | x \in A, y \in A, y \le x - 1\}, \text{ то}$$

$$R = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

Бинарное отношение можно задавать матрицей $[R]$ элементы которой равны:

единице, если пара принадлежит отношению R,

нулю, если пара не принадлежит отношению.

Пример отношения заданного матрицей

$$[R] = \{a_{ij}\}, a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & x_i \overline{R} x_j \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Любая матрица размерности $m \times n$ является матрицей бинарного отношения между множествами A и B, мощность которых

$$|A| = m, |B| = n$$

Отношение между двумя элементами называется ***бинарным***, или двухместным, между тремя-тернарным, или трехместным, между *n* элементами *n*–нарным, или *n*–местным.

Мощность множества кортежей, входящих в отношение R, называют ***мощностью отношения R.***


Элементы A и B
включенные в R

Свяжем с каждым бинарным отношением R между A и B

- **область определения** D(R) и
- **область значений** $\Re$(R) .
- Они определяются следующим образом.

<u>Область определения</u> отношения R на A и B есть множество всех x $\in$ A таких, что для некоторых y $\in$ B имеем (x,y) $\in$ R. Другими словами, область определения R есть множество всех ***первых координат*** упорядоченных пар из R.

Область значений отношения R на

A и B есть множество всех $y \in B$ таких, что для некоторых $x \in A$ имеем $(x,y) \in R$. Другими словами, область значений R есть множество всех ***вторых координат*** упорядоченных пар из R.

Пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$R = \{(x, y) : x, y \in A, \text{где x - делитель y и x} \leq 5$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)$$

$$D(R) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Re(R) = A$$

С каждым отношением R на A $\times$ B связано отношение R^{-1} на B $\times$ A.

Пусть $R \subseteq A \times B$

есть отношение на $A \times B$.

Тогда отношение R^{-1} на $B \times A$

определяется

следующим образом:

$$R^{-1} = \{(b,a): (a,b) \in R\}.$$

Другими словами $(b,a) \in R^{-1}$, тогда и только тогда, когда $(a,b) \in R$.

Отношение R^{-1} называется

<u>обратным отношением</u> к данному отношению R.

- Пример:

$R = \{(x,y) \mid x,y \in N \ \& \ y=x^2\}$ – отношение на множестве натуральных чисел N.

Если R – отношение возведения натуральных чисел в квадрат, то R^{-1} – извлечение квадратного корня.

- Термин «реляционное представление данных», впервые введенный Коддом, происходит от термина *relation*.

- *Во-первых*, все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Например, рассмотрим отношение, состоящее из трех следующих кортежей

{(1, «Иванов», 1000), (2, «Петров», 2000), (3, «Сидоров», 3000)}.

- Однотипность кортежей позволяет считать их аналогами строк в простой таблице, т.е. в такой таблице, в которой все строки состоят из одинакового числа ячеек и в соответствующих ячейках содержатся одинаковые типы данных.

- Множество {(1), (1, 2), (1, 2, 3)}, состоит из *разнотипных* числовых кортежей. Это множество не является отношением ни в R, ни в R^2, ни в R^3. Из кортежей, входящих в это множество, нельзя составить простую таблицу.

- *Во-вторых*. За исключением крайнего случая, когда отношение есть само декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения.

- Для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие - нет.
- Этот критерий, по существу, определяет для *смысл (семантику)* отношения.

- Каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящее от n параметров (n-местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ принадлежать отношению R.

- Это логическое выражение называют *предикатом отношения* R.

- Кортеж (a_1, a_2, …, a_n) принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда предикат этого отношения P(a_1, a_2, …, a_n) принимает значение «истина».

- Каждый n-местный предикат задает некоторое n-арное отношение.
- Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между n-арными отношениями и n-местными предикатами.

основные свойства отношений

- тождественность,
- рефлексивность,
- антирефлексивность,
- симметричность,
- антисимметричность,
- транзитивность.

Отношение R называется ***<u>тождественным</u>*** на множестве А, если, оно состоит из всех пар вида (a,a), где $a \in A$, и обозначается i_A или просто i.

Пары вида (a,a) называются диагональными.

Например, "получают повышенную стипендию" и "сдали сессию на хорошо и отлично" на множестве студентов факультета.

Отношение R называется ***<u>рефлексивными</u>*** на множестве A, <u>если</u> <u>для всех</u> $a \in A$ справедливо aRa или $(a,a) \in R$ на множестве A.

Например, "равенство", "самообслуживание".

Студент x – ровесник студента y. ($i_A \in R$, т.е. включает диагональ).

Отношение R называется ***антирефлексивным***, если для всех $a \in A$ не выполняется aRa т.е. $(a,a) \notin R$. Другими словами, если $(a,b) \in R$, следует, $a \neq b$.

Например, "строгое неравенство", "быть старше", т.е. отношения, которые могут выполняться только для несовпадающих объектов. ($A \not\subset A$)

- *Отношение R называется* ***<u>симметричным</u>*** на множестве A, если <u>для каждой пары</u> a и b $\in$ A справедливо соотношение: если aRb, то bRa или если $(a,b) \in R$, то $(b,a) \in R$. Например, "расстояние между двумя точками", "быть братом". Студент x является соседом по парте студента y. ($R \subseteq R^{-1}$).

Отношение *R* называется ***антисимметричным*** на множестве A, если для каждой пары a и b $\in$ A справедливо соотношение: если из *aRb* и b*Ra* следует a=b.

Например, множество A является подмножеством множества B.

$(R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$.

Отношение *R* называется ***<u>транзитивным</u>*** на множестве А, если <u>для любой тройки</u> a,b,c $\in$ A справедливо соотношение: если a*Rb* и b*Rc*, то a*Rc*.

Например, "параллельность", "больше чем". Город x связан с городом y шоссейной дорогой. ($R^2 \subseteq R$).

Примеры:

Рассмотрим следующее отношение

«x делит y на множестве натуральных чисел».

- Отношение рефлексивно, так как x всегда делит сам себя.
- Отношение не симметрично, так как 2 является делителем, но не наоборот: 6 не делит 2.

Предположим, что x делит y, а y в свою очередь делит z.

Тогда из первого предположения следует, что $y = m*x$ для некоторого натурального числа m, а из второго – $z = n*y$, где n – натуральное число. Следовательно, $z = n*y = (n*m)*x$, т.е. x делит z.

Значит данное отношение транзитивно.

Отношение антисимметрично, так как если из предположения x делит y и y делит x вытекает, что x = y.

Рассмотрим следующее отношение: «количество лет x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей».

Отношение рефлексивно, так как возраст любого человека совпадает с количеством прожитых им лет.

Отношение симметрично, так как высказывание «количество лет x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей» равносильно высказыванию «количество лет y совпадает с возрастом x» на множестве всех людей.

Отношение транзитивно, так как если найдутся такие три человека x, y, z, что «количество лет x совпадает с возрастом y», «количество лет y совпадает с возрастом z», то все трое будут одинакового возраста.

Отношение антисимметрично, так как из высказывания высказывание «количество лет x совпадает с возрастом y» и «количество лет y совпадает с возрастом x», следует, что $x = y$.

- Пусть A = {1,2,3,4,5,6},
- $R \subseteq A \times A$
- R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4),(2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)}.

- Отношение R рефлексивно,

  так как **для каждого a** $\in$ **A, (a,a)** $\in$ **R**.

  {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}.

Отношение R симметрично так как,

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4),(2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)}.

$(a,b) \in R$	$(b,a) \in R$
(1,2)	(2,1)
(1,4)	(4,1)
(2,4)	(4,2)
(3,5)	(5,3)

- Отношение транзитивно,

$(a,b) \in R$	$(b,c) \in R$	$(a,c) \in R$
(1,2)	(2,1)	(1,1)
(1,2)	(2,2)	(1,2)
(1,2)	(2,4)	(1,4)
(1,4)	(4,1)	(1,1)
(1,4)	(4,2)	(1,2)
(2,1)	(1,4)	(2,4)
(2,1)	(1,1)	(2,1)
(3,5)	(5,3)	(3,3)
(4,1)	(1,1)	(4,1)
(4,1)	(1,2)	(4,2)
(4,1)	(1,4)	(4,4)
(5,3)	(3,5)	(5,5)

Отношение R не является антисимметричным, так как,

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4),(2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)}.

$(a,b) \in R$	$(b,a) \in R$	$a = b$
(1,2)	(2,1)	$2 \neq 1$
(1,3)	(3,1)	$1 \neq 3$

- Пусть A = {♠, ♣, ♥, ♦} ,
- R $\subseteq$ A $\times$ A
- R = {(♠,♠), (♠,♣), (♠,♦), (♣,♠), (♦,♠),(♦,♦), (♥, ♦), (♥,♥)}.

- Отношение не рефлексивно,
- так как ♣ $\in$ A, но (♣,♣) $\notin$ A ,
- R = {(♠,♠), (♦,♦), (♥,♥)}.

- Отношение не симметрично, так как
- R = {(♠,♠), (♠,♣), (♠,♦), (♣,♠), (♦,♠),(♦,♦), (♥, ♦), (♥,♥)}

(a,b) ∈ R	(b,a) ∈ R	(b,a) ∉ R
(♠,♣)	(♣,♠)	
(♠,♦)	(♦,♠)	
(♥,♦)		(♦,♥)

- Отношение не является антисимметричным, так как
- R = {(♠,♠), (♠,♣), (♠,♦), (♣,♠), (♦,♠),(♦,♦), (♥, ♦), (♥,♥)}

(a,b) ∈ R	(b,a) ∈ R	a = b
(♠,♣)	(♣,♠)	♠ ≠ ♣
(♠,♦)	(♦,♠)	♦ ≠ ♠

- Отношение не является транзитивным,

так как R = {(♠,♠), (♠,♣), (♠,♦), (♣,♠), (♦,♠),(♦,♦), (♥,♦), (♥,♥)}

(a,b) ∈ R	(b,c) ∈ R	(a,c) ∈ R
(♠,♣)	(♣,♠)	(♠,♠)
(♠,♦)	(♦,♠)	(♠,♠)
(♦,♠)	(♠,♦)	(♦,♦)
(♠,♦)	(♦,♦)	(♠,♦)
(♥,♦)	(♦,♦)	(♥,♦)
(♣,♠)	(♠,♦)	(♣,♦) ∉ R
(♥,♦)	(♦,♠)	(♥,♠) ∉ R

Замыкание отношений

Если отношение R на множестве A не обладает тем или иным свойством, то его стоит попытаться продолжить до отношения R*, которое будет иметь нужное свойство.

Под продолжением понимается присоединение некоторых упорядоченных пар к подмножеству

$$R \subset A \times A$$

Новое полученное множество R* уже будет обладать требуемым свойством. Исходное множество R будет подмножеством R*.

Если вновь построенное множество R* будет ***<u>минимальным</u>*** среди всех расширений R с выделенным свойством, то R* является ***замыканием*** R относительно данного свойства.

Рефлексивное замыкание R есть ***наименьшее*** рефлексивное отношение на A, содержащее R как подмножество.

Рефлексивным замыканием R_i отношения R называется отношение

$$R \cup i$$

, где i – отношение тождества на A (диагональ).

Симметричное замыкание R

наименьшее симметричное отношение

на A, содержащее R как подмножество.

Симметричным замыканием Rs отношения R называется отношение

$$R \cup R^{-1}$$

т.е. если (a,b) $\in$ R,

то (a,b) $\in$ Rs и (b,a) $\in$ Rs

Транзитивное замыкание R **наименьшее** транзитивное отношение на А, содержащее R как подмножество.

Транзитивным замыканием R_t отношения R называется отношение

$$R_t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots,$$

т.е. $(a,b) \in R_t$ тогда и только тогда, когда существуют элементы такие что a_1Ra_2, a_2Ra_3, …, $a_{n-1}Ra_n$.

Пример

- A = {1,2,3}, отношение R на A задано упорядоченными парами
- R = {(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2.3)}. Отношение R не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно.
- Найти соответствующие замыкания.

- Замыкание относительно ***рефлексивности*** должно содержать все пары вида (a,a). Поэтому, искомое замыкание имеет вид:

$$R^* = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 3);\ \ (2,\ 2),\ (3,\ 3)\},$$

- Добавленные пары отделены от исходных пар точкой с запятой.

- Замыкание относительно симметричности должно содержать все пары, симметричные исходным.

$$R^* = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 3);\ \ (2,\ 1),\ (3,\ 2)\}.$$

Замыкание относительно транзитивности.
Необходимо выполнить несколько шагов.
Отношение R = {(1,1), (1,2), (1,3), (3,1),(2.3)}:
- содержит пары (3,1) и (1,2), замыкание обязано включать пару (3,2);
- содержит пары (2,3) и (3,1) замыкание обязано включать пару (2,1);
- содержит пары (3,1) и (1,3) замыкание обязано включать пару (3,3);

Добавим эти пары.

$$R^* \supset \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 3);\quad (3,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 3)\}.$$

Появились пары (2,1) и (1,2).

Следовательно, замыкание R* должно

содержать пару (2,2).

Все необходимые пары перебрали.

$$R^* = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 3);\ \ (3,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 3),\ (2,\ 2)\}.$$

- Пусть A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,
- $R = \{(a_1,a_3), (a_3,a_4), (a_4,a_2), (a_3,a_3)\}$.

- $R_i = \{(a_1,a_3), (a_3,a_4), (a_4,a_2), (a_3, a_3); (a_1,a_1), (a_2,a_2), (a_4,a_4)\}$.

- $R_s = \{(a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_3,a_4), (a_4, a_3); (a_4,a_2), (a_2,a_4), (a_3,a_3)\}$.

- $R_t = \{(a_1,a_3), (a_3,a_4), (a_4,a_2), (a_3, a_3), (a_1,a_4), (a_1,a_2), (a_3,a_2)\}$.