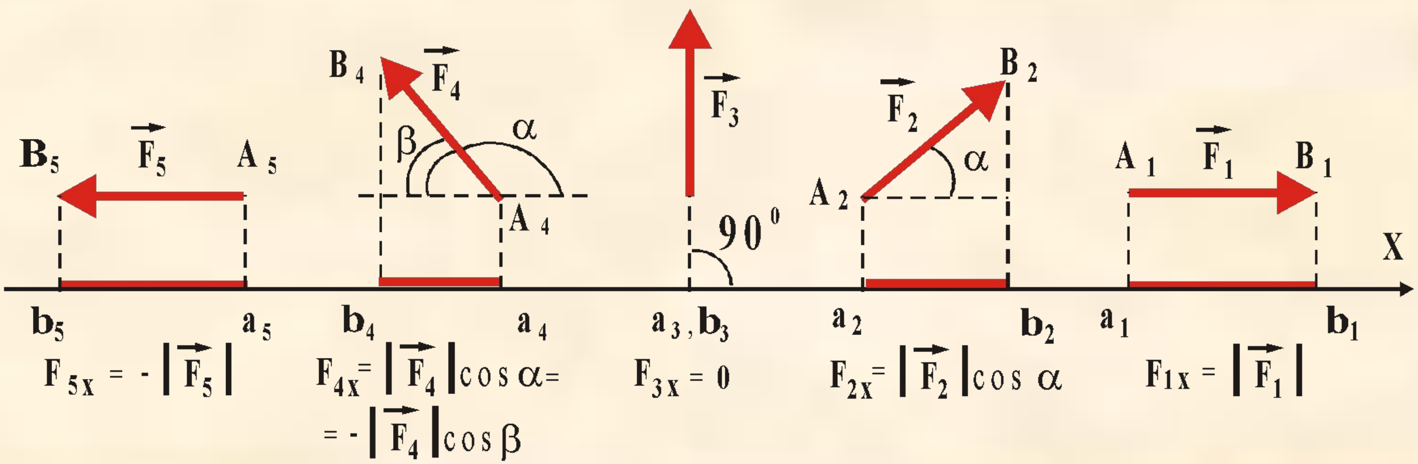
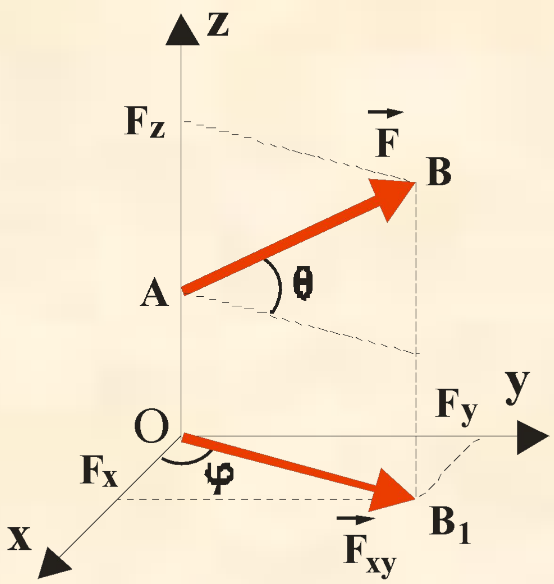
ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ

- Проекция силы на ось есть скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на данную ось.
- Проекция на ось имеет знак «+» если перемещение от ее начала к концу совпадает с положительным направлением оси и знак «−» в противном случае.
- Проекцию силы на ось можно вычислить аналитически как произведение модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.



ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ

- Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость ОХУ есть вектор $\vec{F}_{xy}$, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость.
- Модуль проекции $|\vec{F}_{xy}| = |\vec{F}|\cos\theta$, где θ - угол между направлением силы $\vec{F}$ и ее проекции $\vec{F}_{xy}$.



- Метод двойного проектирования используется в тех случаях, когда для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее сначала найти ее проекцию на координатную плоскость, в которой лежит эта ось, а затем найденную проекцию силы на плоскость спроектировать на данную ось

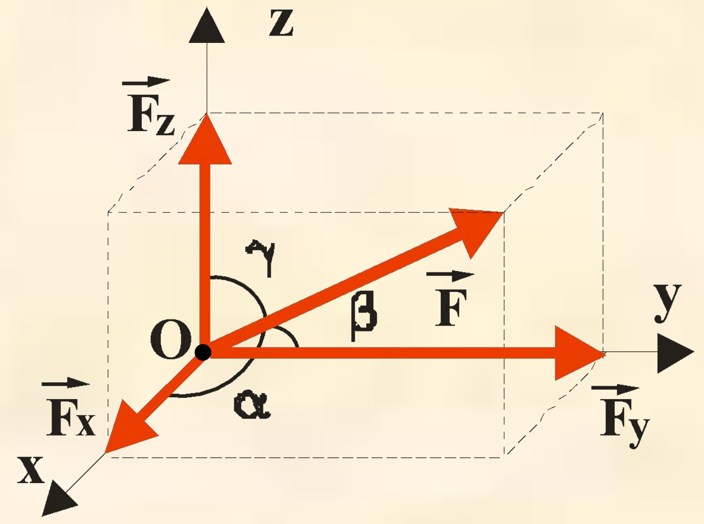
$$\begin{cases} F_x = |\vec{F}_{xy}|\cos\varphi = |\vec{F}|\cos\theta\cos\varphi, \\ F_y = |\vec{F}_{xy}|\sin\varphi = |\vec{F}|\cos\theta\sin\varphi, \\ F_z = |\vec{F}|\sin\theta. \end{cases}$$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ СИЛЫ

Аналитический способ задания силы $\vec{F}$ состоит в задании трех чисел: *Fx, Fy, Fz* - проекций силы на прямоугольные декартовы оси координат, при этом модуль силы и ее направление определяются по формулам:

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = F_x / \left|\vec{F}\right|, \\ \cos\beta = F_y / \left|\vec{F}\right|, \\ \cos\gamma = F_z / \left|\vec{F}\right|. \end{cases}$$



Составляющие силы по осям координат XYZ выражаются формулами:

$$\vec{F}_x = F_x\vec{i},\ \vec{F}_y = F_y\vec{j},\ \vec{F}_z = F_z\vec{k}.$$

Следовательно, вектор силы можно строить геометрически по правилу параллелограмма:

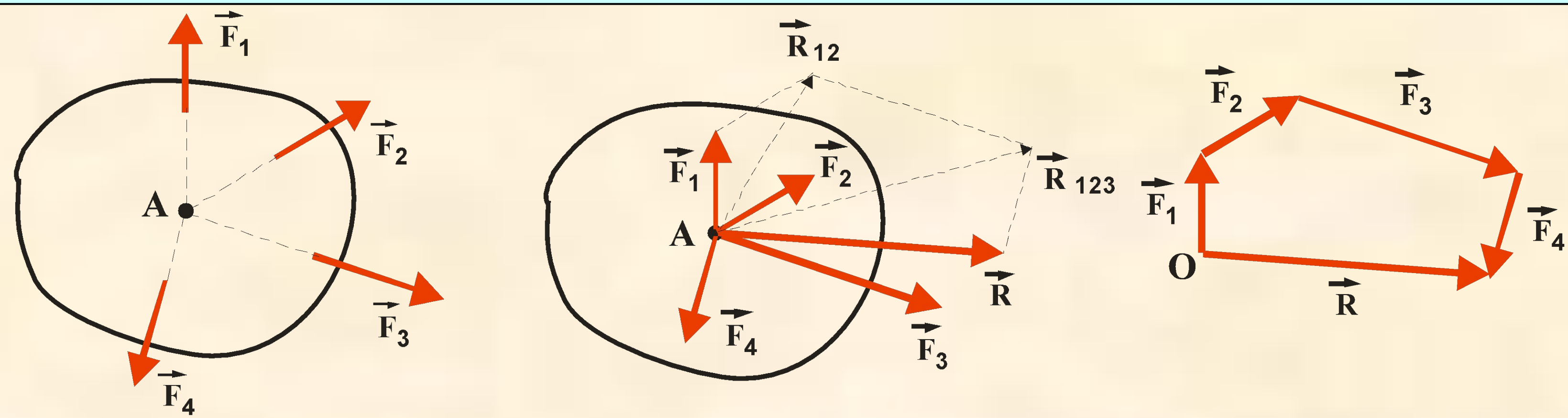
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}.$$

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называют такую систему сил, в которой линии действия всех сил пересекаются в одной точке.

Следует различать плоскую систему сходящихся сил, в которой линии действия всех сил лежат в одной плоскости, и пространственную систему сходящихся сил, в которой линии действия сил не лежат в одной плоскости.

Всякая система сходящихся сил может быть заменена одной силой – равнодействующей.



Для построения силового многоугольника, силы системы в выбранном масштабе откладываются от произвольной точки О, а их геометрическая сумма изобразится вектором $\vec{R}$, направленным из точки О в конец вектора последней силы:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Замечание. Модуль и направление равнодействующей определяются однозначно и не зависят от порядка, в котором складываются силы. Задача о разложении равнодействующей на составляющие однозначного решения не имеет!

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Аналитический способ сложения сил состоит в нахождении проекций вектора суммы сил $\vec{R}$ (главного вектора) на оси координат по заданным проекциям слагаемых векторов на те же оси:

$$R_x = \sum F_{kx},\ R_y = \sum F_{ky},\ R_z = \sum F_{kz},\ \left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

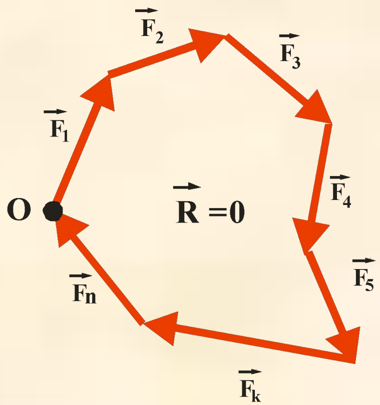
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{\left|\vec{R}\right|},\ \cos\beta = \frac{R_y}{\left|\vec{R}\right|},\ \cos\gamma = \frac{R_z}{\left|\vec{R}\right|}.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил:

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая данной системы сил была равна нулю.

Геометрически это означает, что силовой многоугольник, построенный на силах системы, должен быть замкнут!

геометрическая форма



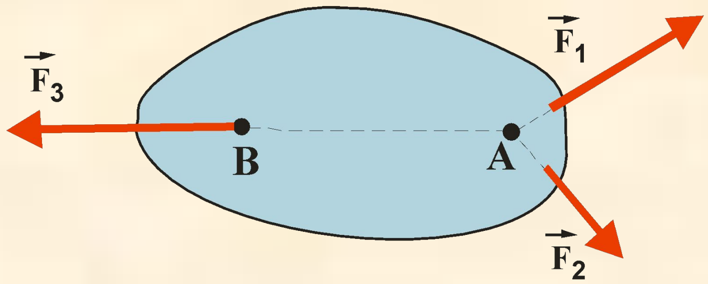
аналитическая форма

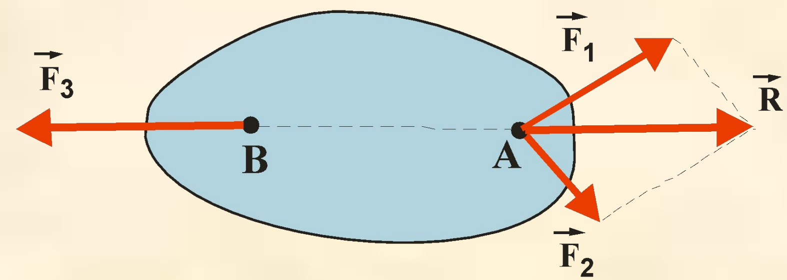
$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ

Если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство

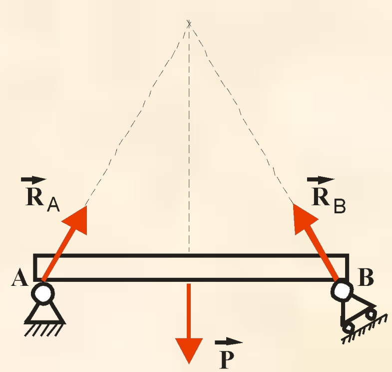




Замечание. Обратная теорема не имеет места!

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}\ , \ \ (\vec{F}_3, \vec{R}) \sim 0$$

Теорема о трех силах позволяет определить заранее неизвестное направление реакции неподвижного шарнира в точке А:



ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ

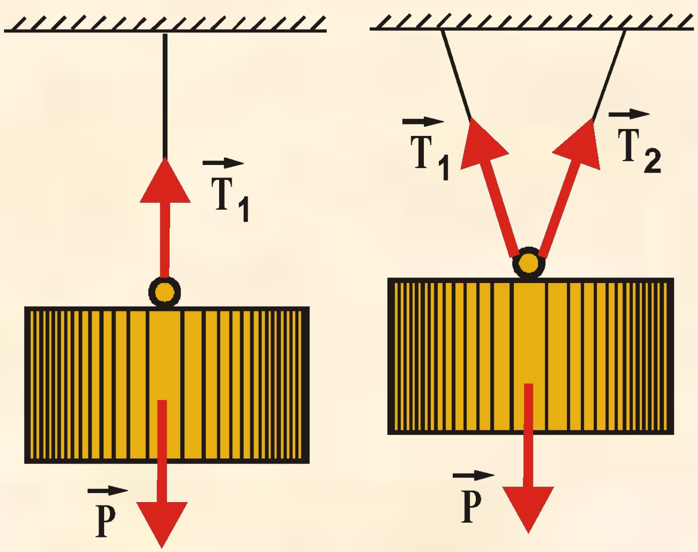
Задачу называют статически определимой если число неизвестных задачи не превышает числа уравнений равновесия, даваемых статикой твердого тела для данного вида системы сил.

В противном случае задачу называют статически неопределимой.

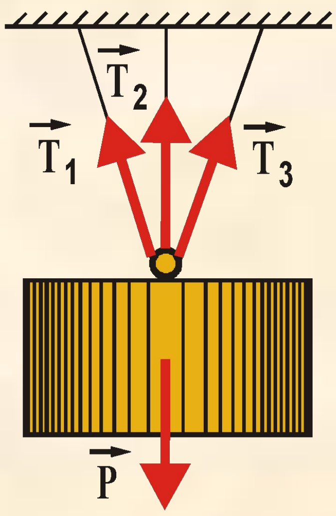
Замечание. Статическая неопределимость задачи может появиться за счет Наложения “лишних” связей, не нужных для обеспечения равновесия АТТ.

Расчет статически неопределимых систем требует учета деформаций и рассматривается в сопротивлении материалов и теории упругости.

ПРИМЕРЫ



Статически определимые задачи



Статически неопределимая задача

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Момент силы характеризует вращательный эффект действия силы на твердое тело.

Различают:

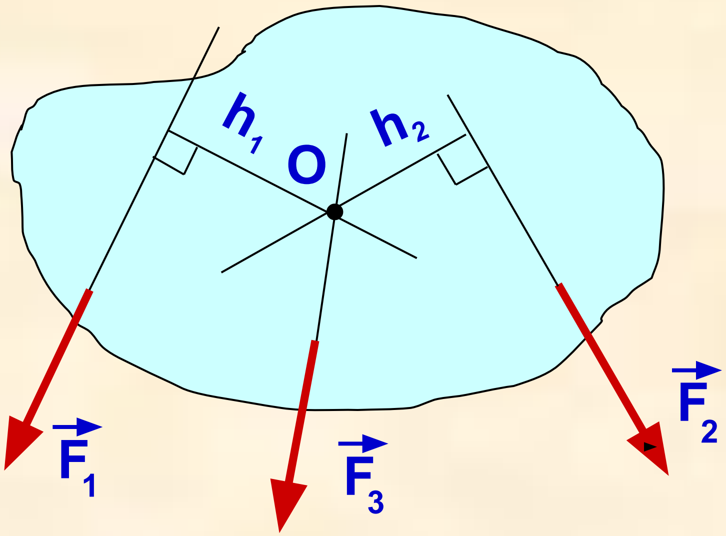
- момент силы относительно точки на плоскости;
- момент силы относительно центра в пространстве;
- момент силы относительно оси.

Моментом силы относительно точки на плоскости (алгебраическим моментом) называют скалярную величину, равную взятому со знаком «+» или «−» произведению модуля силы на плечо - кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы.

$$M_0(\vec{F}) = \pm\left|\vec{F}\right| \cdot h$$

Правило знаков: в теоретической механике момент силы считают положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против хода часовой стрелки и отрицательным, если по часовой стрелке

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

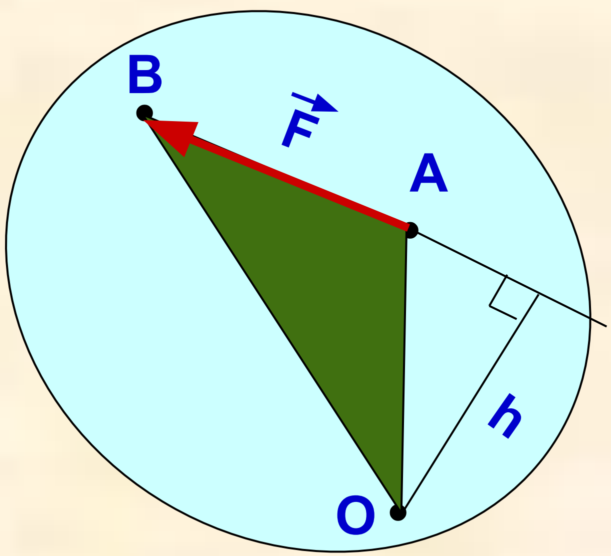


$$M_0(\vec{F}_1) = \left|\vec{F}_1\right| \cdot h_1\,;$$

$$M_0(\vec{F}_2) = -\left|\vec{F}_2\right| \cdot h_2\,;$$

$$M_0(\vec{F}_3) = 0.$$

Свойства момента силы относительно точки

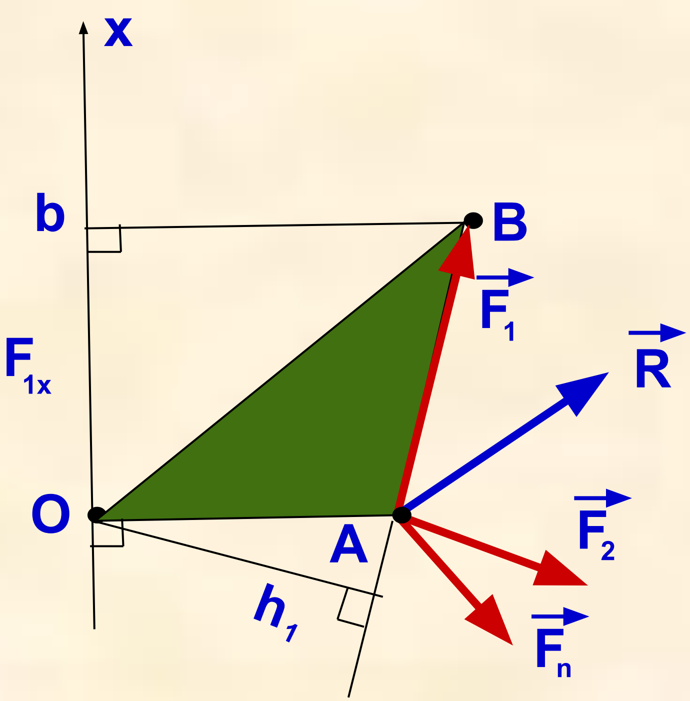


1) Момент силы не изменяется при переносе силы по линии ее действия.
2) Момент силы равен нулю если плечо силы h=0.
3) $M_O(\vec{F}) = 2\,S_{\triangle OAB}$.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно той же точки.

Доказательство:



$$M_O(\vec{F}_1) = 2 \cdot S_{\Delta}OAB = \left|\vec{F}_1\right| \cdot h_1 = F_{1X} \cdot OA;$$

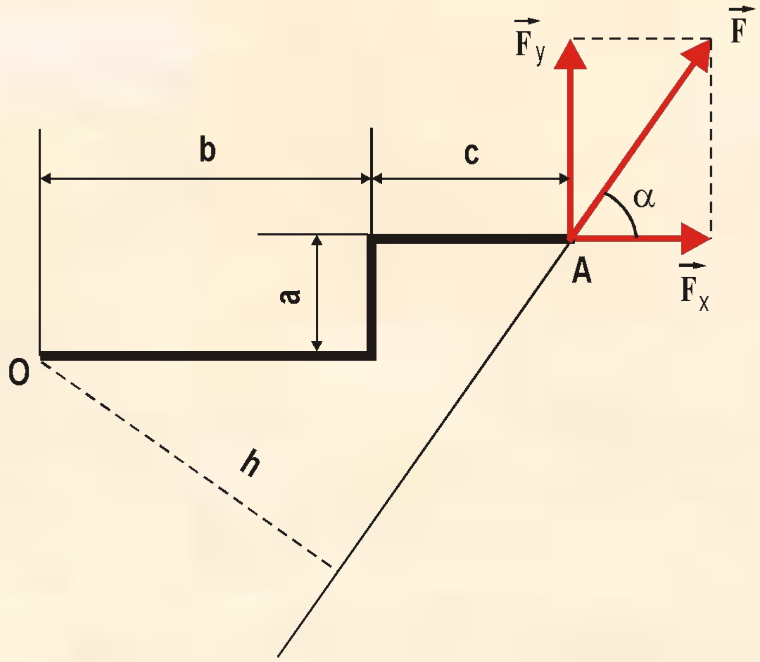
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \;;$$

$$R_X = \sum_{k=1}^{n} F_{kX}\;;$$

$$R_X \cdot OA = \sum_{k=1}^{n} F_{kX} \cdot OA;$$

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k).$$

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ ВАРИНЬОНА



$$M_O(\vec{F}) = |\vec{F}|h;$$

$$\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y;$$

$$|\vec{F}_X| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha, \quad |\vec{F}_Y| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha;$$

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_X) + M_O(\vec{F}_Y) =$$

$$= -|\vec{F}_X| \cdot a + |\vec{F}_Y|(b + c) =$$

$$= |\vec{F}| \cdot [(b + c) \cdot \sin\alpha - a \cdot \cos\alpha].$$

Следовательно: $h = (b + c) \cdot \sin\alpha - a \cdot \cos\alpha$