Математическая логика

§ 8. Логика и компьютеры
§ 9. Логические элементы
§ 10. Другие логические операции
§ 11. Логические выражения
§ 12. Множества и логика

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018 http://kpolyakov.spb.ru

Математическая логика

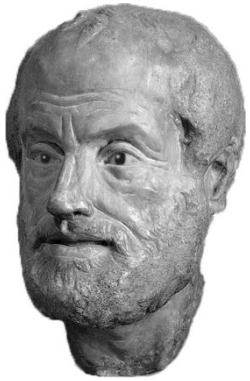
§ 5. Логика и компьютер

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λογικος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.

  История – интересный предмет.
- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

  Красиво!

  В городе N живут 2 миллиона человек.

  Который час?

Логика и компьютер

двоичная логика

Любое высказывание может быть **ложно** (0) или **истинно** (1).

Логика изучает операции между 0 и 1!

Связь с двоичным кодированием!

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, упрощают и преобразуют логические высказывания, вычисляют их значения.

Алгебра высказываний, булева алгебра

Джордж Буль

Простые и составные высказывания

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также $\overline{A}$, **not A**

таблица истинности операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Разные операции с одной переменной

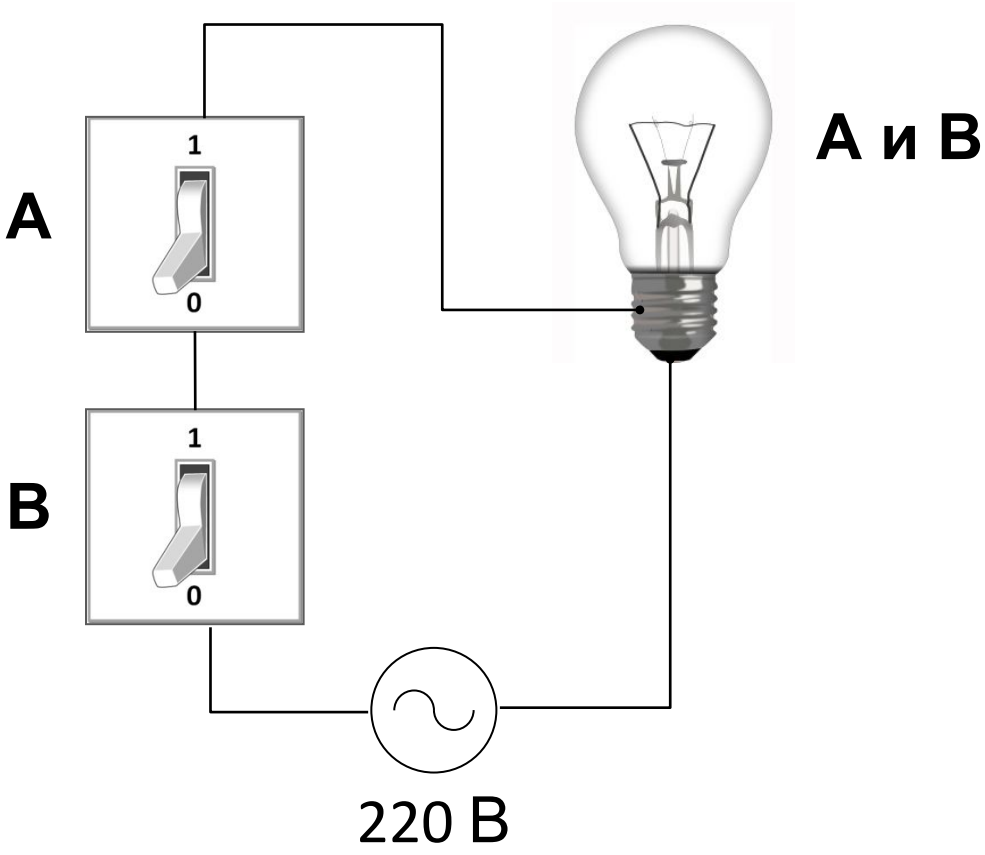
Сколько всего?

$2^2 = 4$

A	не A	A	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1

Операция И

Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также **A·B**, **A and B**

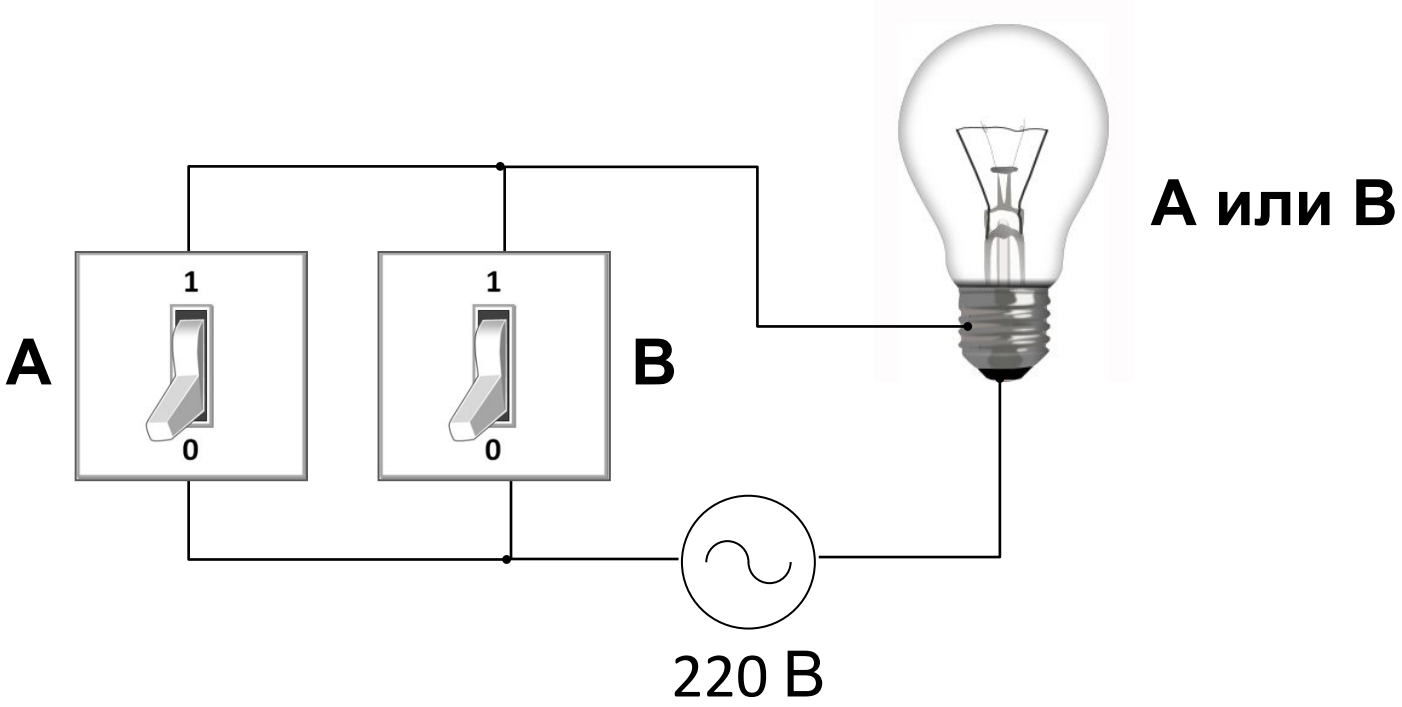
? Почему умножение?

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

A и B = min(A, B)

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: **A+B**, **A or B**

? Почему сложение?

! 1+1=1

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

A и B = max(A, B)

Упрощение логических выражений

A и 0 = A · 0 = 0

A и 1 = A · 1 = A

A или 0 = A + 0 = A

A или 1 = A + 1 = 1

A и не A = $A \cdot \overline{A} = 0$

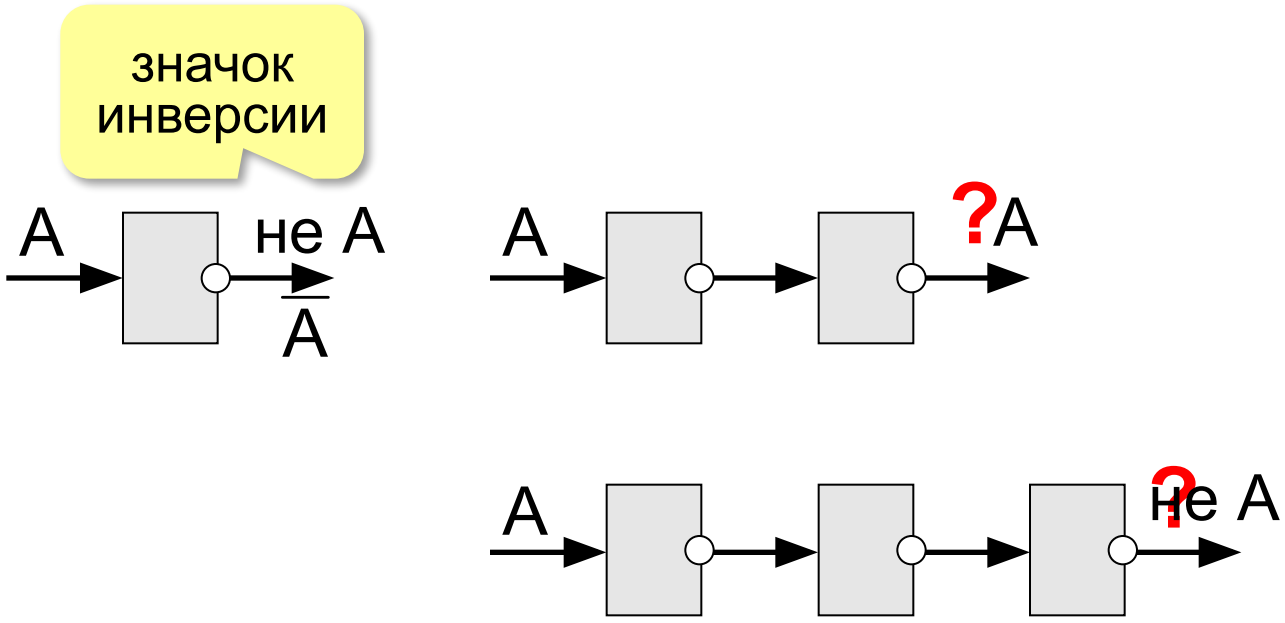
A или (не A) = $A + \overline{A} = 1$

Математическая логика

§ 6. Логические элементы

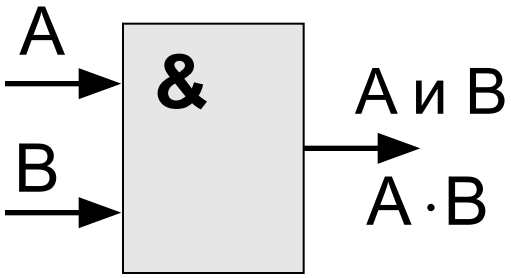
© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Элемент «НЕ»

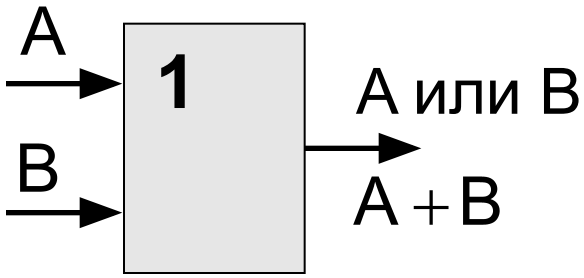


Элементы «И» и «ИЛИ»

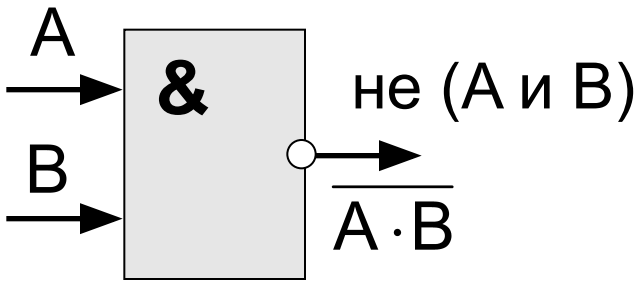
«И»

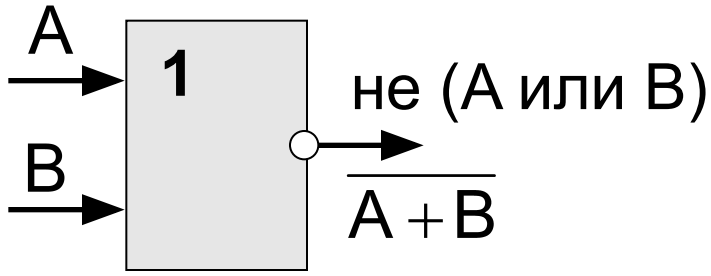


«ИЛИ»

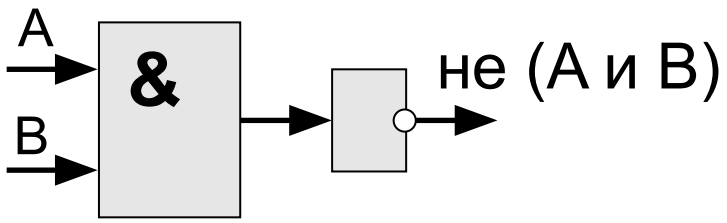


Двойные элементы:

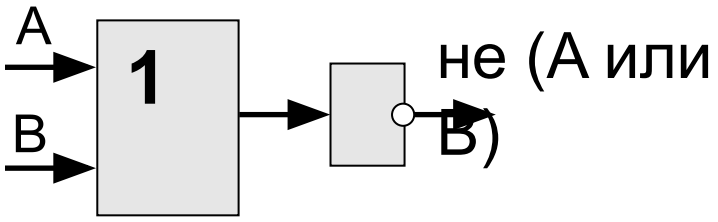




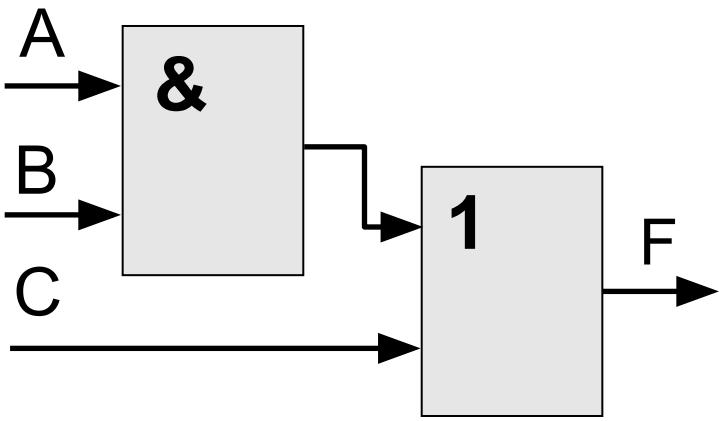
«И-НЕ»

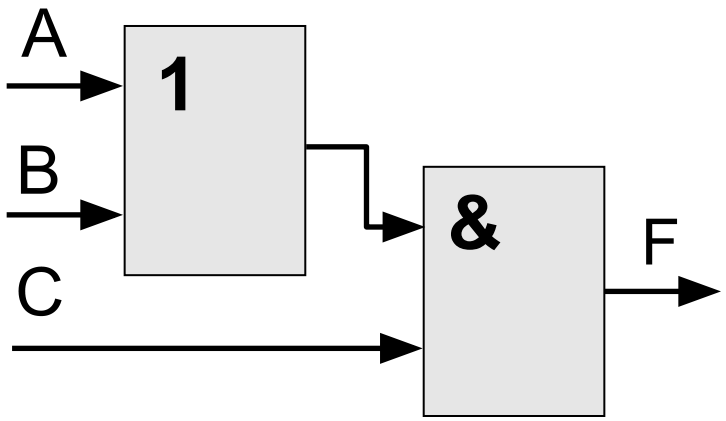


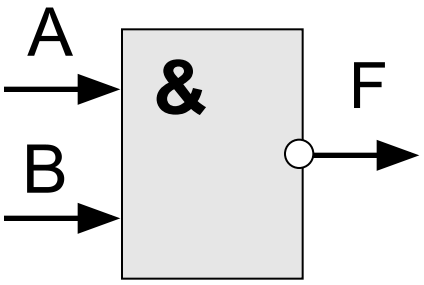
«ИЛИ-НЕ»

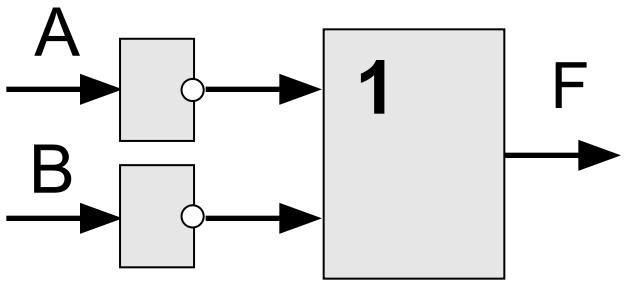


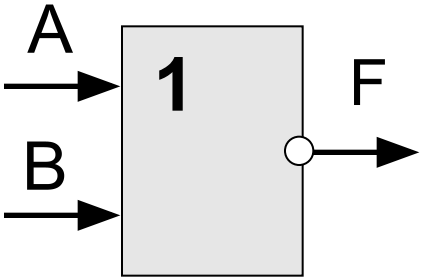
Составьте таблицы истинности

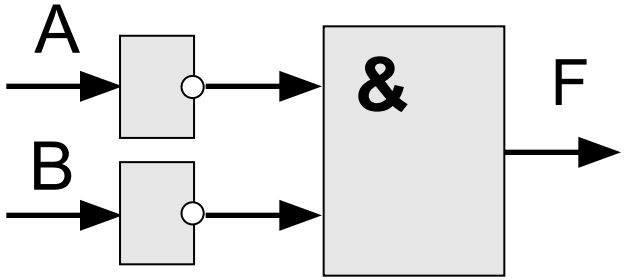












Математическая логика

§ 7. Другие логические операции

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Операции с двумя переменными

Сколько всего?

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

0 или 1

$2^4 = 16$

Импликация

A

X = *Если идёт дождь, то*

$X = A \rightarrow B$

Лена раскрывает зонтик.

B

Импликация A → B истинна, если ***не исключено***, что из A следует B.

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Идёт дождь, но Лена не раскрыла зонтик.

Постройте таблицы истинности

$X = B \to A$

$B \to A \neq A \to B$

$X = \overline{A} + B$

$A \to B = \overline{A} + B$

$X = \overline{B} \to \overline{A}$

$A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$

Эквиваленция

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Постройте таблицы истинности

$$X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$X = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

$$A \leftrightarrow B = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

$$X = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B)}$$

Исключающее «ИЛИ»

Высказывание «**A ⊕ B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, но ***не оба одновременно*** (**A ≠ B**).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

арифметическое сложение, 1+1=2

остаток

сложение по модулю 2: A ⊕ B = (A + B) **mod** 2

Постройте таблицы истинности

$$X = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$X = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

$$A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

Упрощение логических выражений

$A \oplus 0 = A$

$A \oplus 1 = \overline{A}$

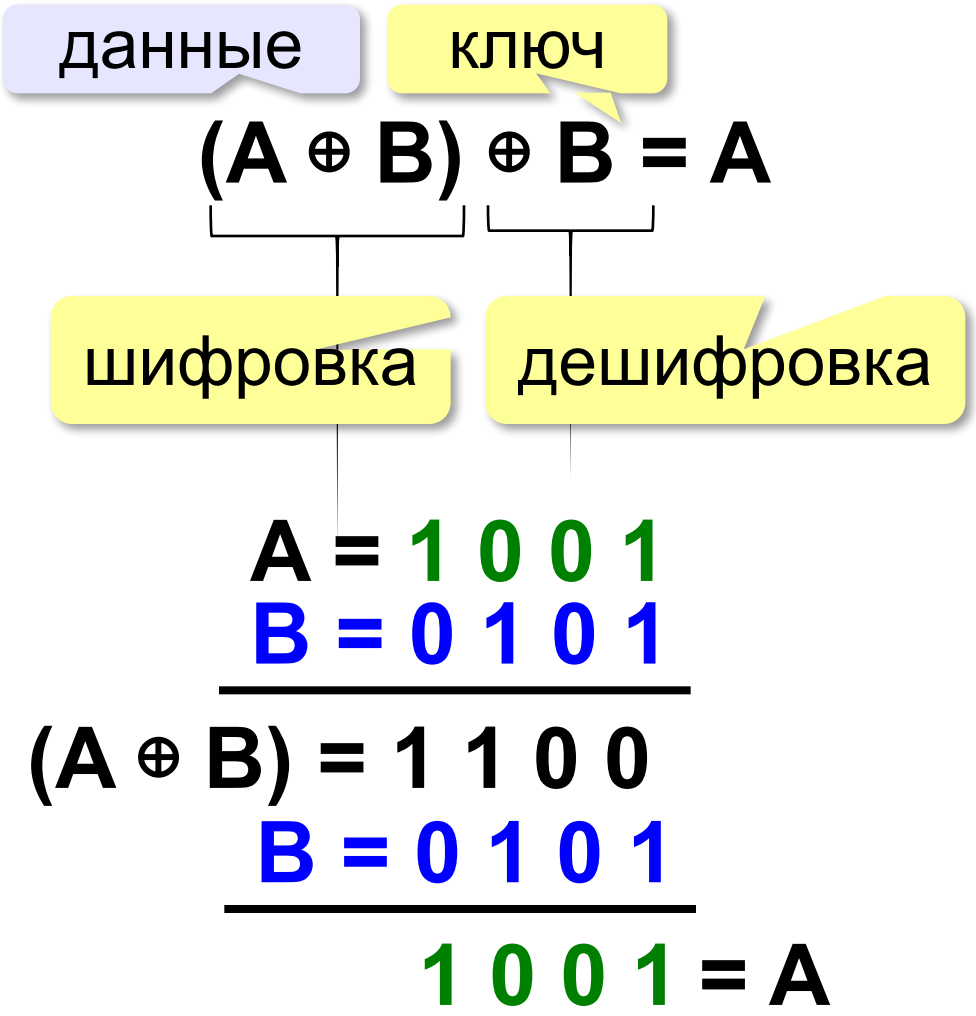
$A \oplus A = 0$

$(A \oplus B) \oplus B = A$

операция обратима

Повторное применение операции $\oplus$ с тем же **B** восстанавливает исходное **A**!

Шифрование


данные
ключ
(A ⊕ B) ⊕ B = A
шифровка
дешифровка
A = 1 0 0 1
B = 0 1 0 1
(A ⊕ B) = 1 1 0 0
B = 0 1 0 1
1 0 0 1 = A

Математическая логика

§ 8. Логические выражения

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Логические выражения

Логическое выражение — это выражение, результат вычисления которого — логическое значение (истина или ложь).

Авария = вышли из строя 2 из 3-х двигателей.

A – «Двигатель № 1 неисправен».

B – «Двигатель № 2 неисправен».

C – «Двигатель № 3 неисправен».

логическое выражение

Аварийный сигнал: $X = (A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C)$

X = «Неисправны два двигателя»

= **(A и B) или (A и C) или (B и C)**

Формализация – это переход к записи на формальном языке!

Порядок вычисления

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

5 6 1 3 4 2

$$X = A \cdot B + (\overline{A} \cdot B + \overline{B})$$

Таблицы истинности

$$X = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

	A	B	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	X
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0

Логические выражения могут быть:

- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)
- **тождественно истинными** (всегда 1, **тавтология**)
- **тождественно ложными** (всегда 0, **противоречие**)

Таблицы истинности

$$X = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

	A	B	$A+B$	$\overline{A}+\overline{B}$	X
0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0

равносильны

$A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
0
1
1
0

Если два выражения принимают одинаковые значения при всех значениях переменных, они называются **равносильными** (определяют одну и ту же логическую функцию).

Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

а) $F = A + \overline{B} + \overline{C}$

б) $F = A \cdot \overline{C} + B$

в) $F = A \cdot B + C$

г) $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

? Сколько строк в полной таблице? $2^3 = 8$

? Сколько подходящих функций? $2^5 = 32$

один ноль в таблице

по 1-й строке

по 2-й строке

Сколько нулей и единиц?

в таблице истинности функции от 3-х переменных:

	нулей	единиц
$A+B+\overline{C}$	1	7
$A \cdot B \cdot \overline{C}$	7	1
$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	7	1
$\overline{A}+\overline{B}+C$	1	7
$\overline{A} \cdot (\overline{B}+C)$	5	3

Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0		1	0
1	0		1
		1	1

один ноль,
две единицы

а) ~~$F = \overline{A} + B + \overline{C}$~~

по 1-й строке $1 + B + 0 \neq 0$

б) ~~$F = \overline{A} \cdot B \cdot C$~~

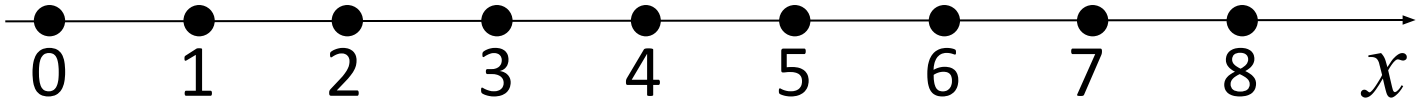
по 2-й строке $0 \cdot 0 \cdot C \neq 1$

в) $F = A + \overline{B} + \overline{C}$

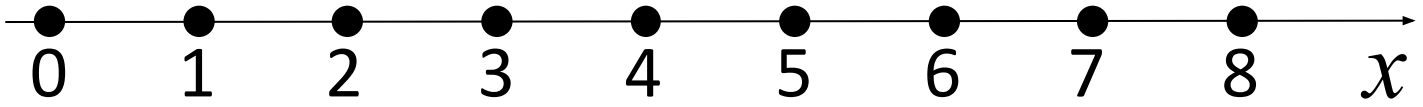
г) ~~$F = A \cdot \overline{B} \cdot C$~~

только 1 единица,
все строки разные!

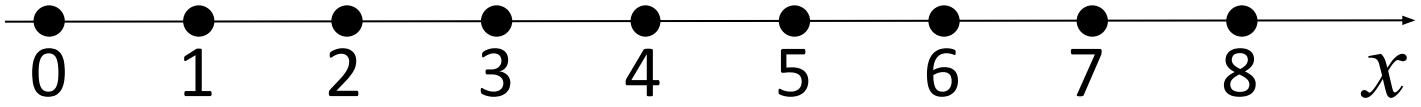
Составление условий



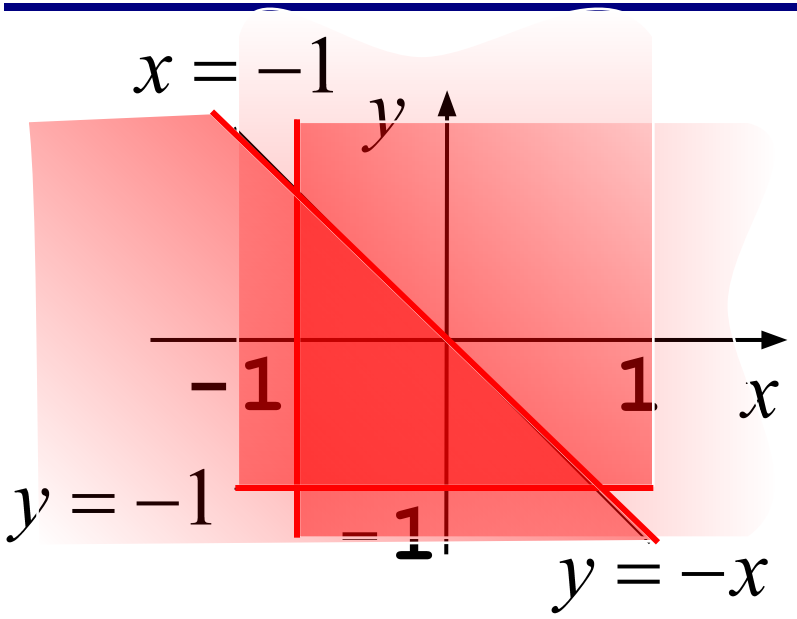
$(x \geq 3)$ и $(x \leq 6)$ $(3 \leq x)$ и $(x \leq 6)$



$(1 \leq x)$ и $(x \leq 3)$ или $(5 \leq x)$ и $(x \leq 8)$



Составление условий



левая граница: $x \geq -1$

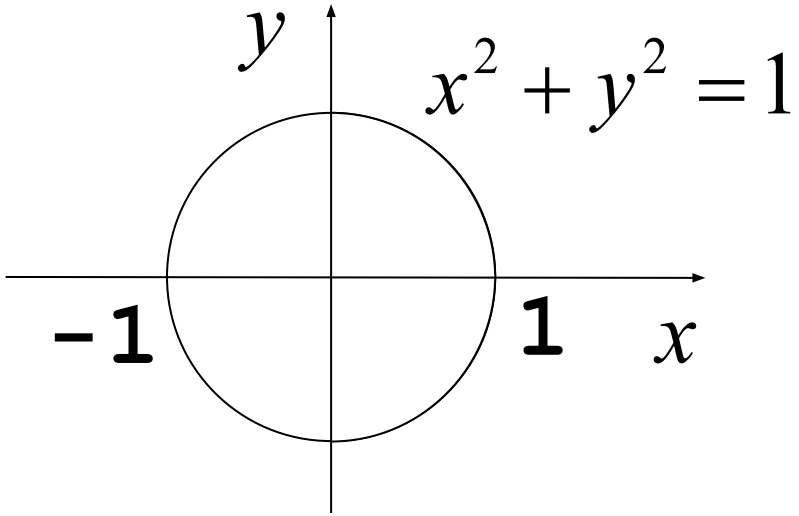
нижняя граница: $y \geq -1$

верхняя граница: $y \leq -x$

! Всё одновременно!

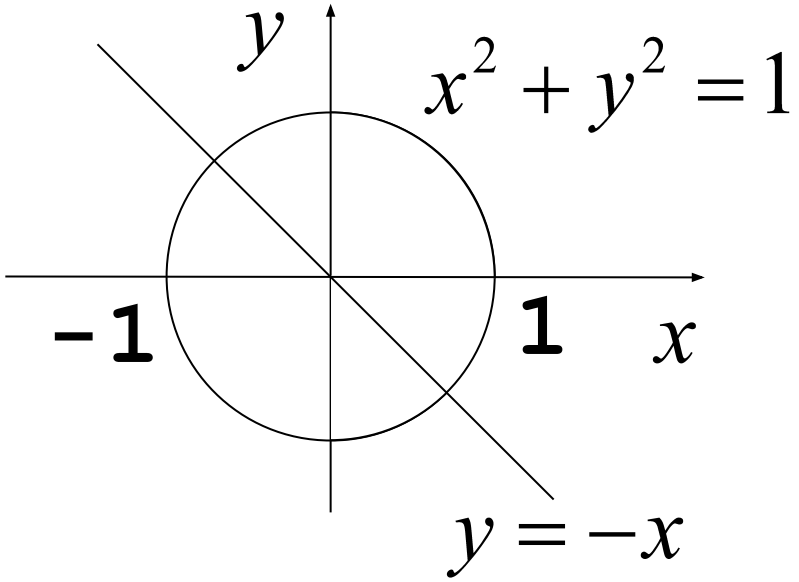
$(x \geq -1)$ **и** $(y \geq -1)$ **и** $(y \leq -x)$

Составление условий



левая правая

$(x^2+y^2 \le 1)$ **и** $(x \le 0)$

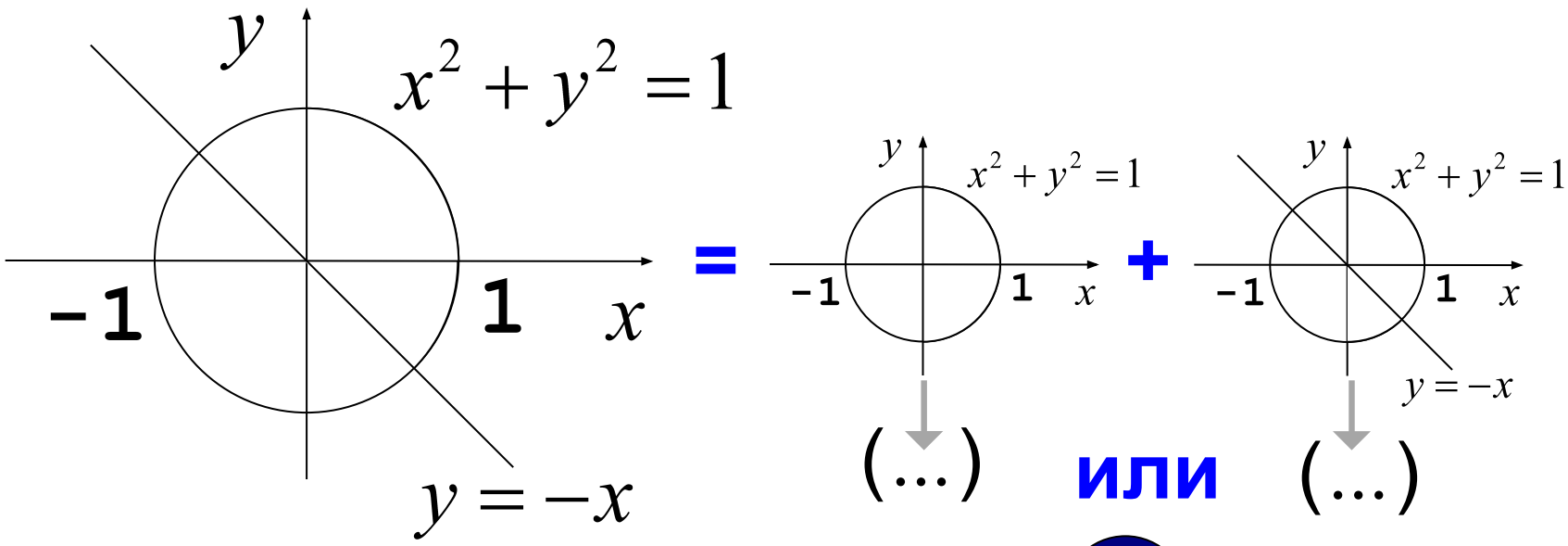


левая нижняя

$(x \ge 0)$ **и** $(x^2+y^2 \le 1)$
и $(y \le -x)$

верхняя

Составление условий



$((x^2+y^2 \le 1)$ **и** $(x \le 0))$ **или**

$((x^2+y^2 \le 1)$ **и** $(x \ge 0)$ **и** $(y \le -x))$

? Как упростить?

? А ещё?

$(x^2+y^2 \le 1)$ **и** $((x \le 0)$ **или** $((x \ge 0)$ **и** $(y \le -x)))$

$(x^2+y^2 \le 1)$ **и** $((x \le 0)$ **или** $(y \le -x))$

Определение истинности выражений

Для каких из указанных значений числа X ***истинно*** *высказывание:*

(X < 5) И НЕ (X < 1) ?

X = 2: **(1) И НЕ (0)**

(1 И 1) = 1

X = 4: **(1) И НЕ (0)**

(1 И 1) = 1

X = 8: **(0) И НЕ (0)**

(0 И 1) = 0

можно не вычислять!

Табличный метод

Для каких из указанных значений числа X ***истинно*** *высказывание:*

R = (X < 5) И НЕ (X < 1) ?

X	X < 5	X < 1	НЕ(X < 1)	R
2				
4				
8				

И

Задачи

Для каких из указанных значений числа X ***ЛОЖНО*** *высказывание:*

(НЕ (X ≥ 3) И НЕ (X = 8)) ИЛИ (X ≤ 5) ?

? + 1

X = 4: **(НЕ (1) И НЕ (0)) ИЛИ (1) = 1**

X = 1: **(НЕ (0) И НЕ (0)) ИЛИ (1) = 1**

X = 8: **(НЕ (1) И НЕ (1)) ИЛИ (0)**

(0 И 0) ИЛИ (0) = 0

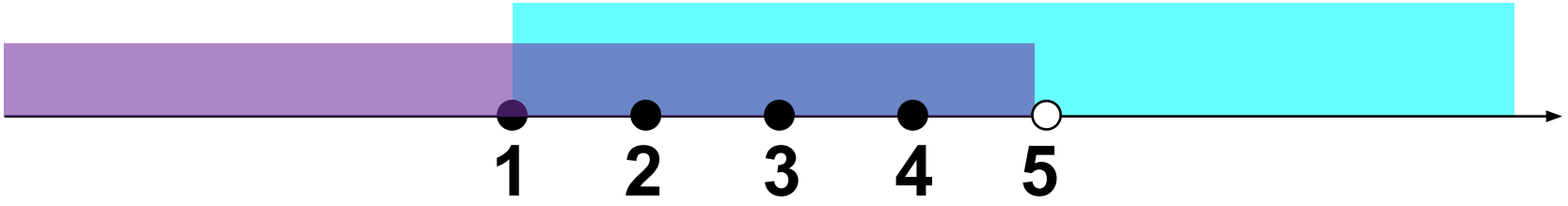
Задачи

Для каких значений числа X ***истинно*** *высказывание:*

(X < 5) И НЕ (X < 1) ?

↓

(X < 5) И (X >= 1)



1, 2, 3, 4

Задачи

Для каких из приведённых имён ***ЛОЖНО*** *высказывание:*

(Первая буква согласная)

НЕ(Первая буква гласная) ИЛИ (Последняя буква гласная) ?

	ПервСогл	ПослГлас	R
Никита			
Антон			
Даниил			
Инна			
Кирилл			

Задачи

Для каких из приведённых имён ***ЛОЖНО*** *высказывание:*

НЕ(Первая буква гласная) ИЛИ (Последняя буква гласная) ?

↓

(Первая буква согласная) ИЛИ (Последняя буква гласная)

Никита	**Кирилл**
Антон	**Егор**
Даниил	**Мефодий**
Инна	**Игнат**

ЛОЖНО

$A + B = 0$

↓

$\overline{A} \cdot \overline{B} = 1$

ИЛИ → И, обратные условия

Задачи

Для каких из приведённых имён ***ЛОЖНО*** *высказывание:*

НЕ(Первая буква гласная) И (Последняя буква гласная) ?

↓

(Первая буква согласная) И (Последняя буква гласная)

ЛОЖНО

$A \cdot B = 0$

↓

$\overline{A} + \overline{B} = 1$

И → ИЛИ, обратные условия

Никита
Антон
Даниил
Инна

Кирилл
Егор
Мефодий
Игнат

Задачи

Для каких значений числа X ***ЛОЖНО*** *высказывание:*

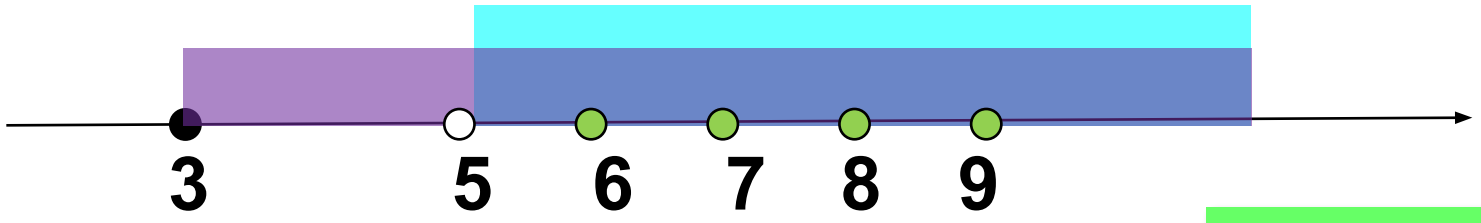
(НЕ (X ≥ 3) И НЕ (X = 8)) ИЛИ (X ≤ 5) ?

↓

ЛОЖНО **((X < 3) И (X <> 8)) ИЛИ (X ≤ 5)**

↓ **И ↔ ИЛИ, обратные условия**

ИСТИННО **((X ≥ 3) ИЛИ (X = 8)) И (X > 5)**

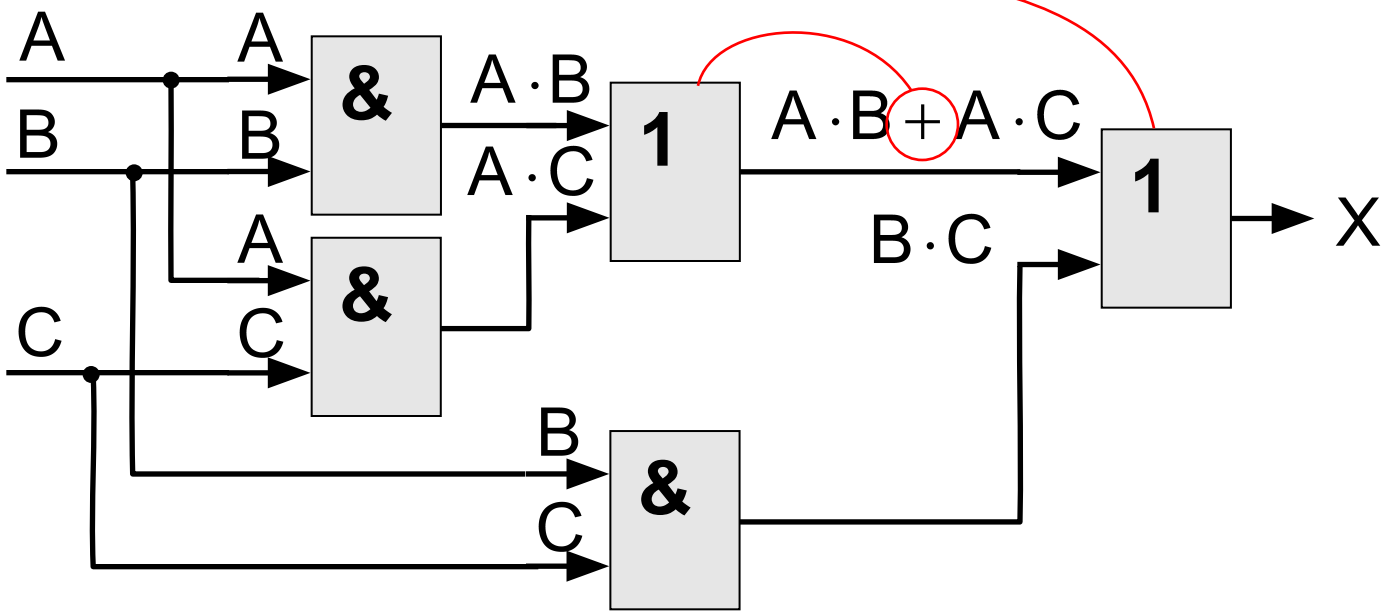


6, 7, 8, …

Логические схемы

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Какая последняя операция?



Математическая логика

§ 12. Множества и логика

Что такое множество?

Множество – некоторый набор элементов, каждый из которых отличается от остальных.

пустое множество: $\varnothing$

конечное число элементов: буквы русского алфавита

бесконечное число элементов: натуральные числа

Как задать множество?

- перечислением элементов

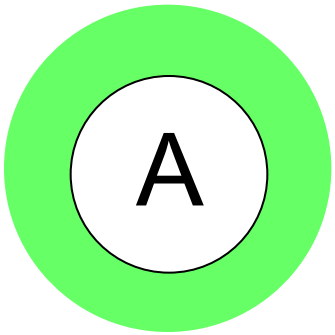
{Вася, Петя, Коля}

- логическим выражением:

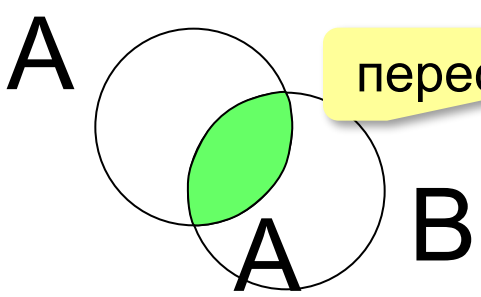
$$\{x: x > 0\}$$

Изображение множеств

Диаграммы Эйлера-Венна

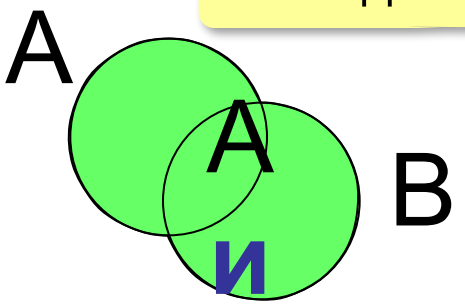


$\overline{A}$



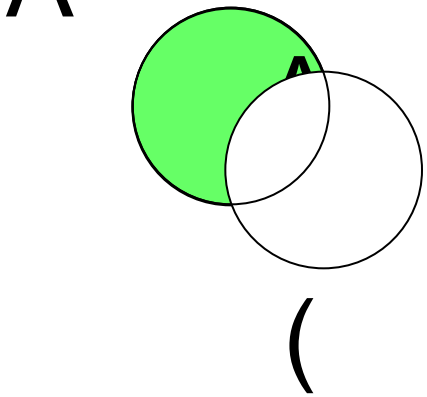
пересечение

И

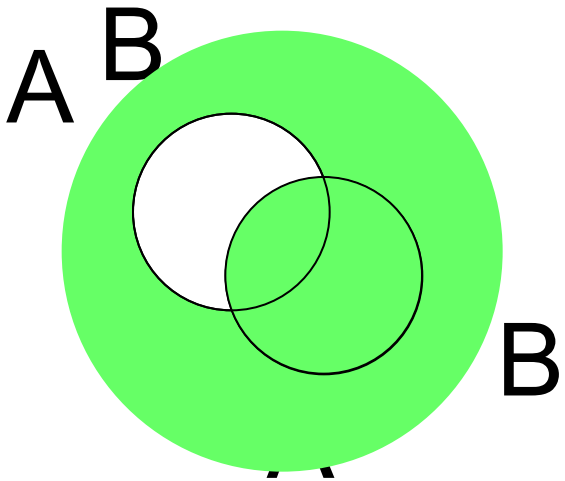


объединение

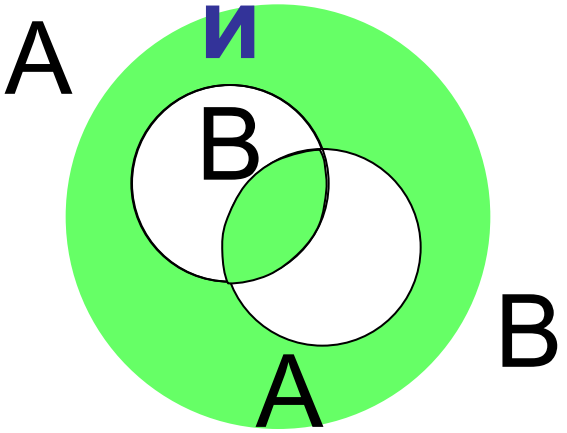
ИЛИ



(НЕ



И



≡

B

Количество элементов множеств

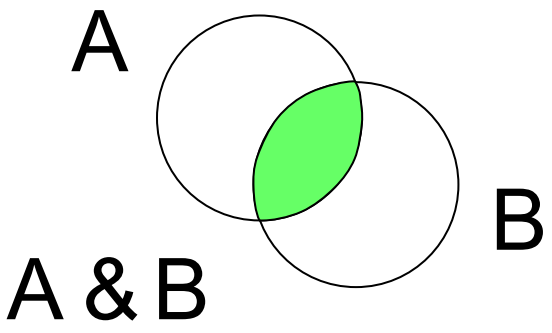
Поисковые запросы в Интернете:

& = **и** (and) | = **или** (or)

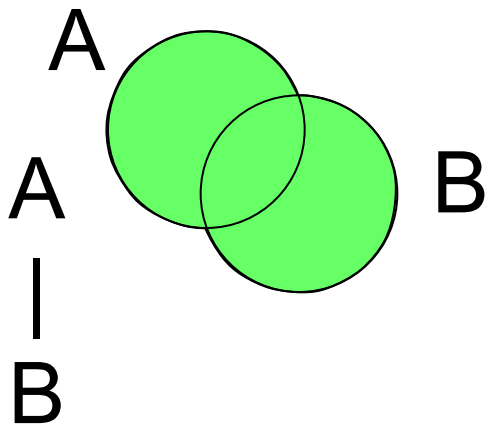
N_A – количество элементов множества A

? Что больше?

$N_A \overset{?}{\geq} N_{A\,\&\,B}$



$N_A \overset{?}{\leq} N_{A\,|\,B}$



! **&** всегда сужает область, **|** - расширяет!

Задачи

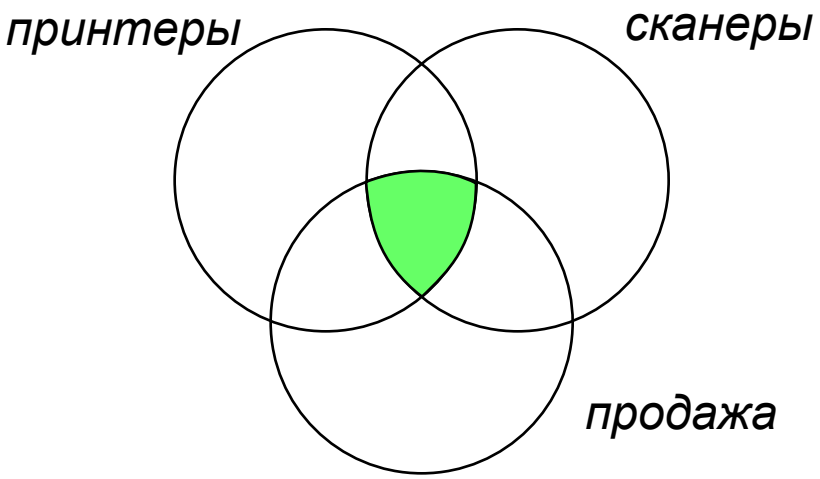
В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**
Б: **принтеры | продажа**
В: **принтеры & продажа**
Г: **принтеры | сканеры | продажа**

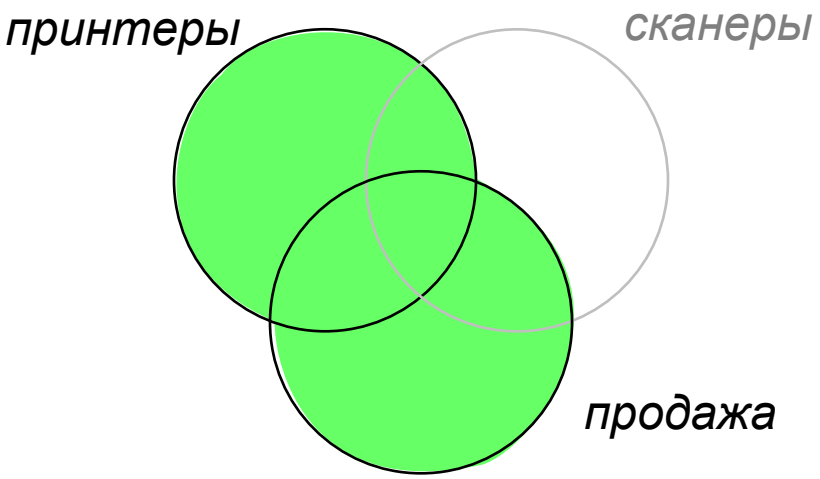
АВБГ

Использование диаграмм

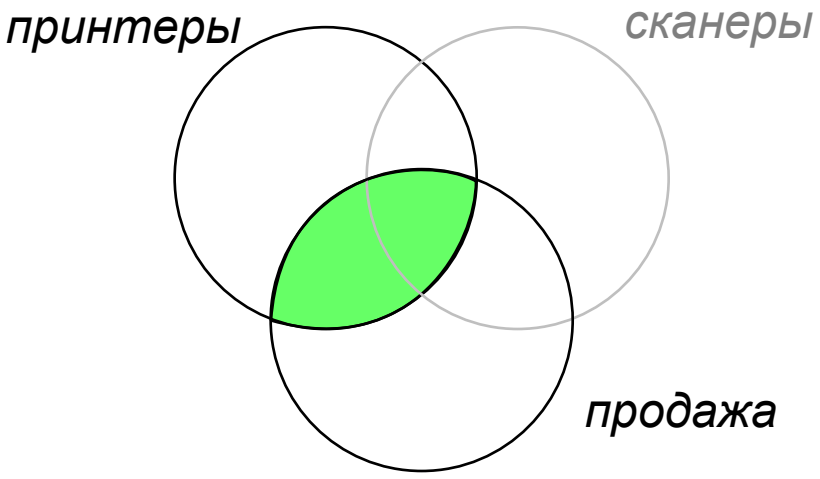
принтеры & сканеры & продажа



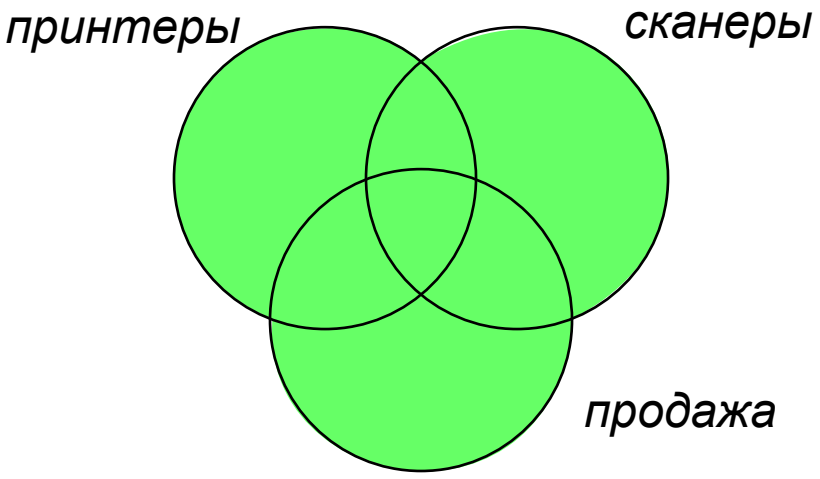
принтеры | продажа



принтеры & продажа



принтеры | сканеры | продажа



Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**
Б: **(принтеры & сканеры) | продажа**
В: **(принтеры | сканеры) & продажа**
Г: **принтеры | сканеры | продажа**

ГБВА

Количество элементов множеств

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	*Количество сай*
`огурцы`	100
`помидоры`	200
`огурцы & помидоры`	50

N_A

N_B

$N_{A\&B}$

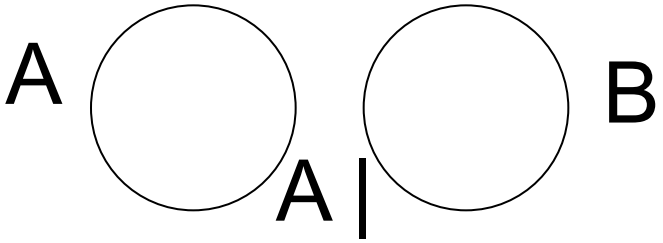
Сколько сайтов будет найдено по запросу

`огурцы | помидоры`

$N_{A|B}$

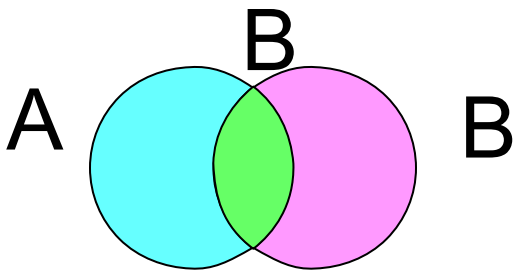
Количество элементов множеств

В общем виде:



$N_{A\&B} = 0$

$N_{A\,|\,B} = N_A + N_B$



$N_{A\&B} =$

$N_{A\,|\,B} =$ + +

$N_A + N_B =$ + $= N_{A\,|\,B}$ +

$$N_{A\,|\,B} = N_A + N_B - N_{A\,\&\,B}$$

Формула включений и исключений

Задачи с тремя областями

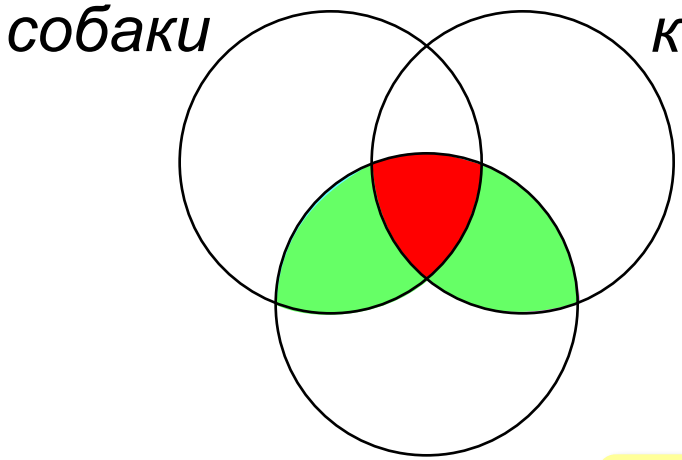
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

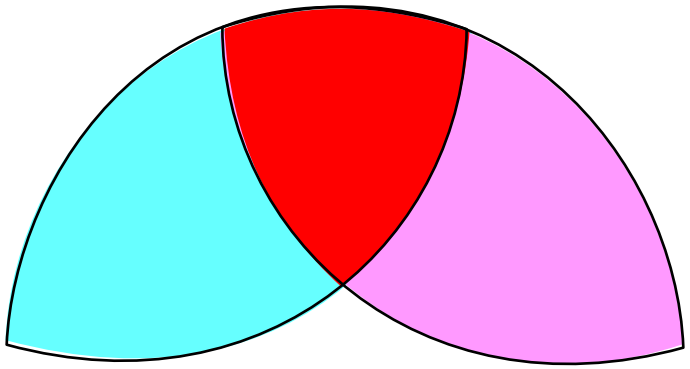
Запрос	*Количество сайтов*
`собаки & лемуры`	320
`кошки & лемуры`	280
`(кошки | собаки) & лемуры`	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу

`собаки & кошки & лемуры`

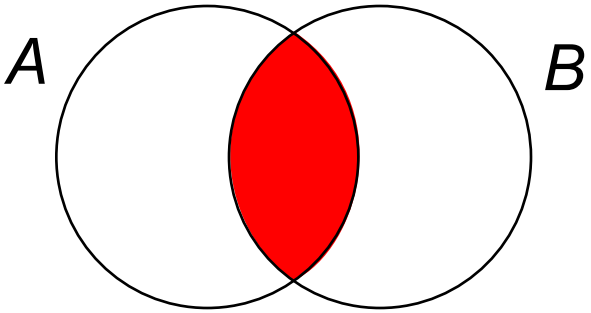
Задача с тремя областями





A = собаки & лемуры

B = кошки & лемуры



$$N_{A\&B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	*Количество сайтов*
собаки & лемуры	320
кошки & лемуры	280
(кошки | собаки) & лемуры	430

A

B

A | B

Сколько сайтов будет найдено по запр A & B

собаки & кошки & лемуры

Общее условие с & можно отбросить !

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B} = 320 + 280 - 430 = 170$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	*Количество сайтов*
`сканер`	200
`принтер`	250
`монитор`	450
`принтер	сканер`	450
`принтер & монитор`	40
`сканер & монитор`	50

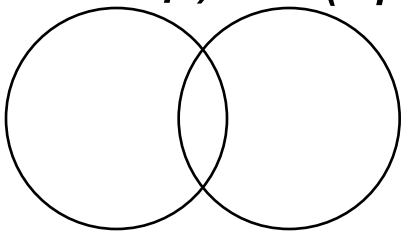
Сколько сайтов будет найдено по запросу

`(принтер | сканер) & монитор`

Обычно две области не пересекаются!

Задачи с тремя областями

A (сканер) B (принтер) **450**



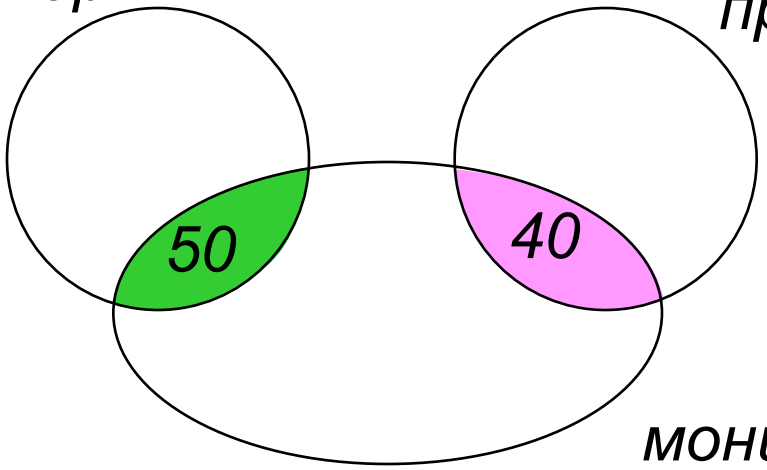
принтер | сканер

0

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

сканер **200** **принтер** **250**

сканер *принтер*



монитор

принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

(принтер | сканер) & монитор **40 + 50 = 90**

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. иллюстрации художников издательства «Бином»
2. авторские материалы