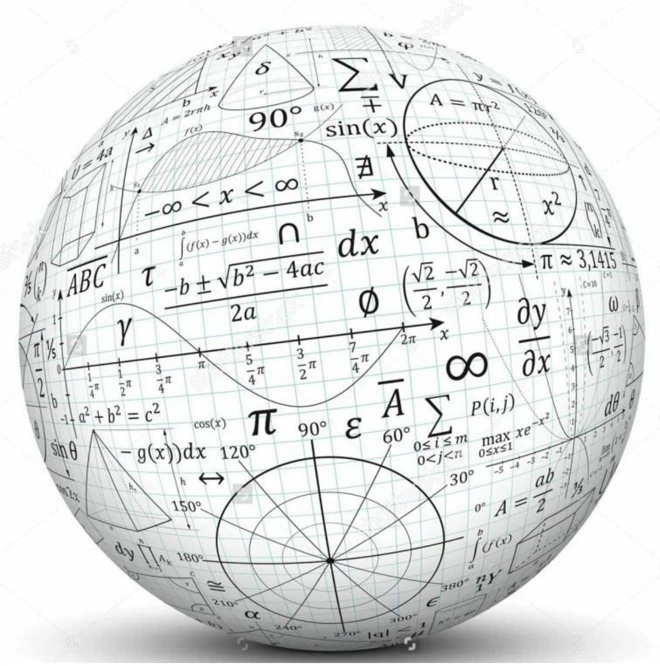


Математика

группа 201

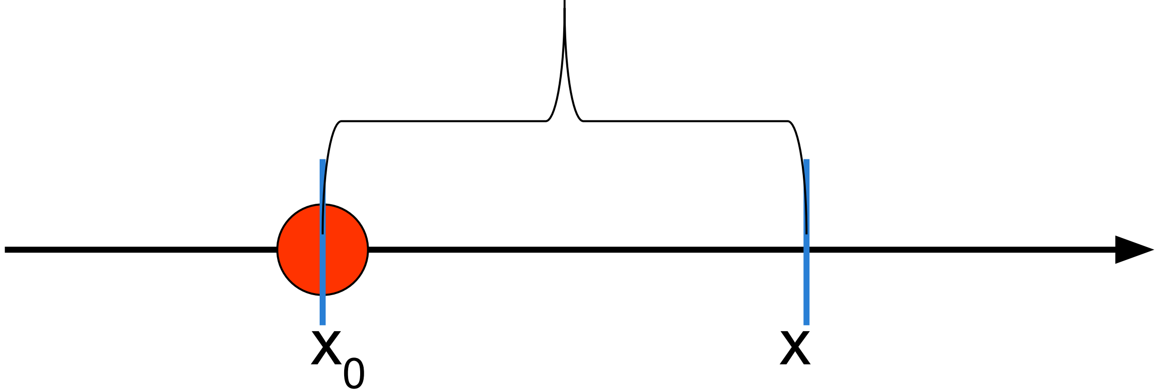
Производная функции

Преподаватель Морозова И.М.

Домашнее задание

1. Изучить презентацию.
2. Выписать в тетрадь примеры решения задач из данной презентации.
3. Выполнить тест в тетради в конце презентации. Фото теста прислать на почту idenm@ya.ru. Вариант – номер вопроса-номер ответа. В письме написать ФИО и номер группы.
4. Все вопросы по теме и выполнению данных заданий можно задавать в WhatsApp или Viber по номеру 8-912-61-85-301.

Как найти путь, который прошла точка?

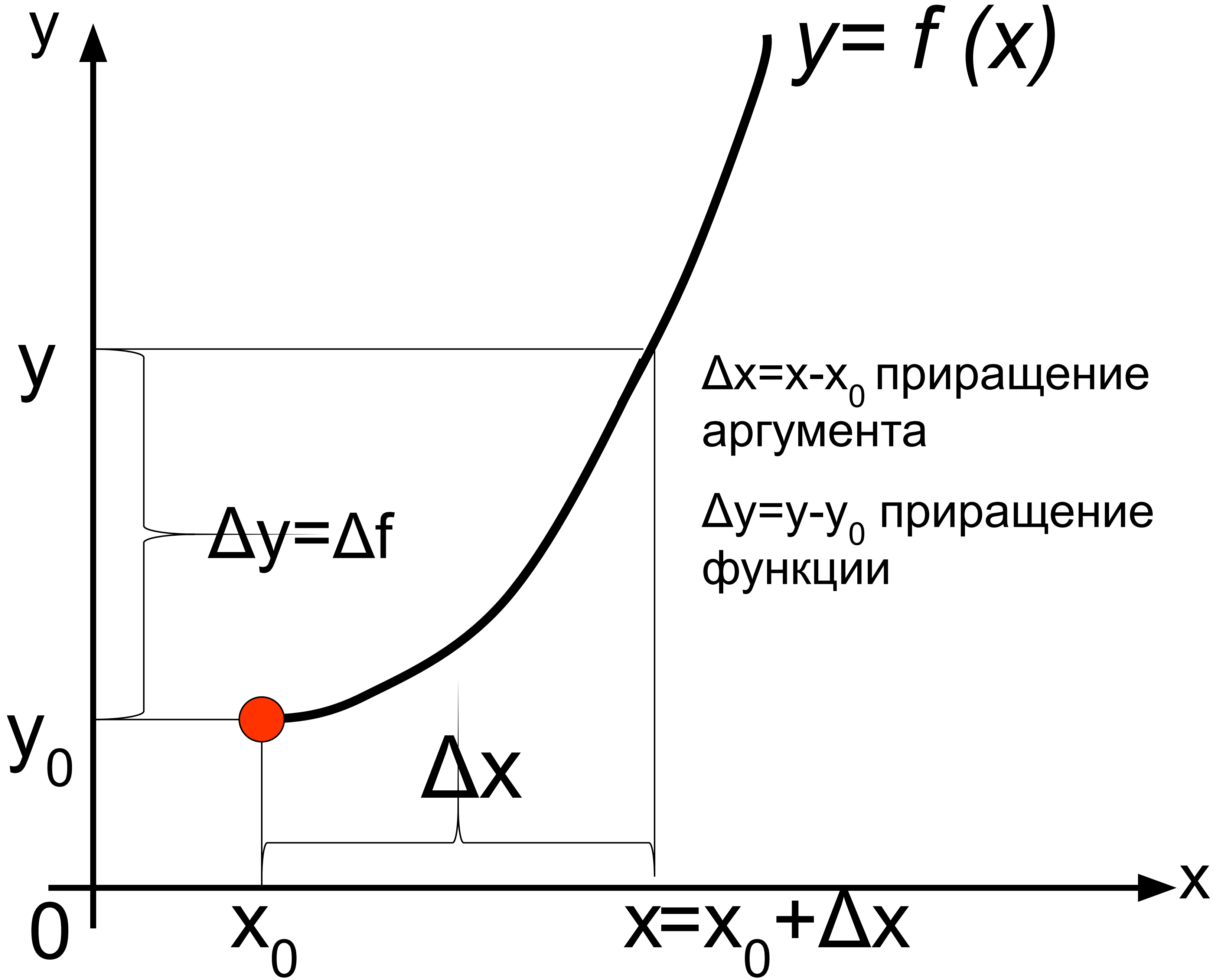


$$\boxed{x - x_0 = \Delta x}$$

путь

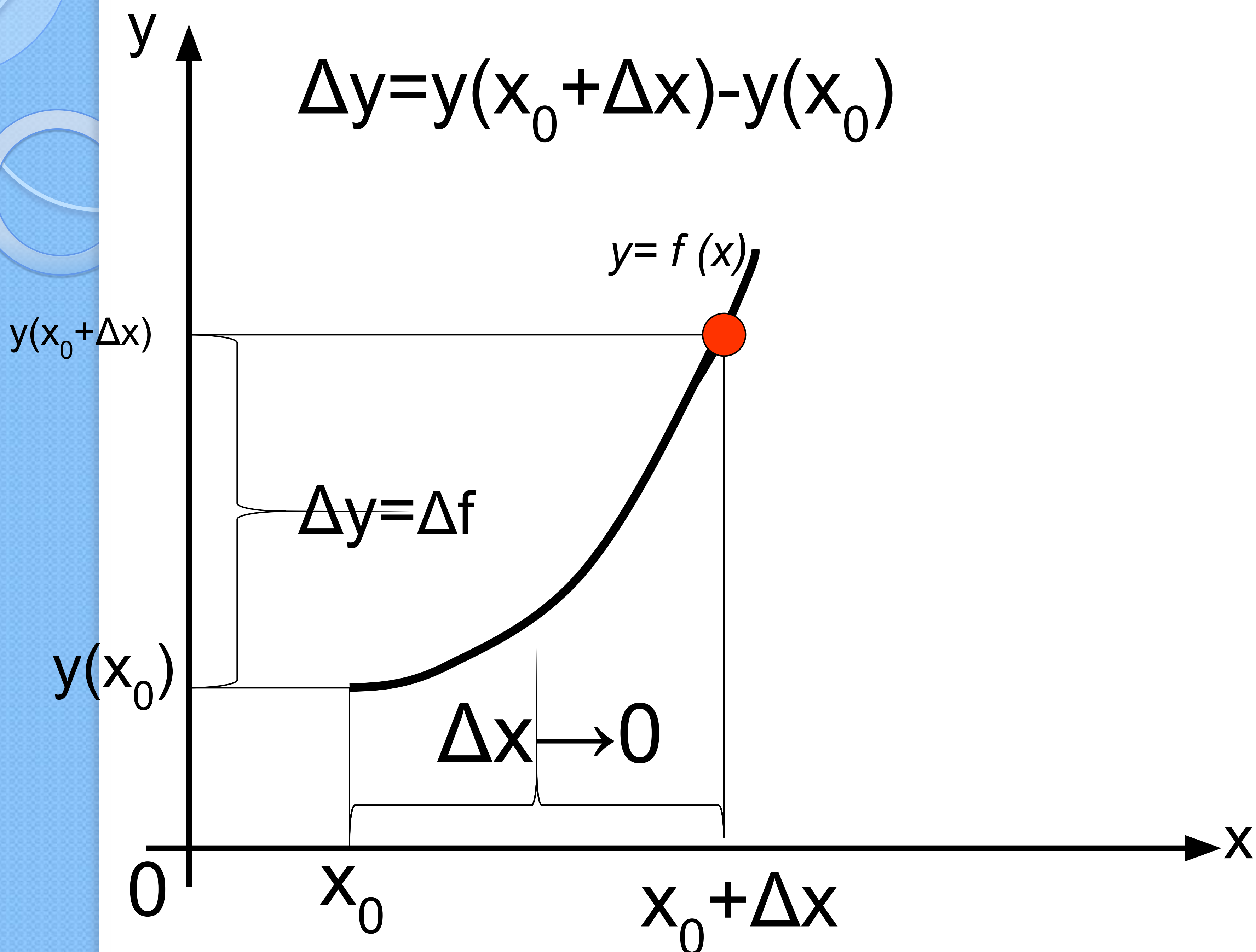
изменение координаты

приращение аргумента



$\Delta x = x - x_0$ приращение аргумента

$\Delta y = y - y_0$ приращение функции


y
$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$
$y = f(x)$
$y(x_0+\Delta x)$
$\Delta y = \Delta f$
$y(x_0)$
$\Delta x \to 0$
x
0
x_0
$x_0+\Delta x$

Определение

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначение y' или $f'(x)$

Схема вычисления производной функции

1. Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

2. Разделить приращение функции на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

3. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Пример: Вычислить производную функции y=x^2

Решение: Используем схему вычисления производной по действиям:

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left(x+\Delta x\right)^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x\cdot(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 2x + 0 = 2x$$

Задание: Найти производную функции:

1. $y = x^3$

Решение 1

2. $y = C, где\, C - число$

Решение 2

3. $y = kx + b, где\, k\, и\, b\, числа$

Решение 3

4. $y = ax^2, где\;\; a - число$

Решение 4

5. $y = \dfrac{1}{x}$

6. $y = \sqrt{x}$

Решение 5

Решение 6

$y\,(функция)$	$y'\,(производная\ функции)$
$y = x^3$	$3x^2$
$y = C, где\ C - число$	0
$y = kx + b, где\ k\ и\ b\ числа$	k
$y = ax^2, где\ a - число$	$2ax$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Решение 1: Вычислить производную функции $y = x^3$

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x \to 0} 3x \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^2 =$$
$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

Задания

Решение 2: Вычислить производную функции $y = C, где\, C - число$

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = C - C = 0$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Задания

Решение 3: Вычислить производную функции $y = kx + b$, где k и b числа

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = k\left(x+\Delta x\right) + b - \left(kx+b\right) =$$
$$= kx + k\Delta x + b - kx - b = k\Delta x$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$$

Задания

Решение 4: Вычислить производную функции $y = ax^2, где\ a - число$

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = a(x+\Delta x)^2 - ax^2 =$$
$$= a(x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2) - ax^2 =$$
$$= ax^2 + 2ax\cdot\Delta x + a\Delta x^2 - ax^2 = 2ax\cdot\Delta x + a\Delta x^2$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\cdot\Delta x + a\Delta x^2}{\Delta x} == \frac{\Delta x\cdot(2ax + a\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= 2ax + a\Delta x$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2ax + a\Delta x) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} 2ax + \lim_{\Delta x\to 0} a\Delta x = 2ax + 0 = 2ax$$

Задания

Решение 5: Вычислить производную функции $y = \dfrac{1}{x}$

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1\cdot x}{x(x+\Delta x)} - \frac{1\cdot(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2 + x\Delta x}\right) = \frac{-1}{x^2+0} = \frac{-1}{x^2}$$

Задания

Решение 6: Вычислить производную функции $y=\sqrt{x}$

1. $$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Задания

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Примеры:

1) $y = \left(3x^2 - 2x\right)^5.$ $\left[\begin{array}{l} y = f^5; \\ f = 3x^2 - 2x. \end{array}\right.$

2) $y = \sqrt{\sin x}.$ $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{f}; \\ f = \sin x. \end{array}\right.$

3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$ $\left[\begin{array}{l} y = \cos f; \\ f = 2x - \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right) \cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$ **(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)**

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n\left(x\right)$	$n\cdot f^{n-1}\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f\left(x\right)}$	$-\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f\left(x\right)}$	$\frac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f\left(x\right)$	$\cos f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g^{/}\left(f\left(x\right)\right) = g^{/}\left(f\right)\cdot f^{/}\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n\left(x\right)$	$n\cdot f^{n-1}\left(x\right)\cdot f^{/}\left(x\right)$

Пример: 1) $y = \left(2x-1\right)^4.$ $\left[\begin{array}{l} y = f^4; \\ f = 2x-1. \end{array}\right.$

$$y^{/} = \left[\left(2x-1\right)^4\right]^{/} = 4\left(2x-1\right)^3\cdot\left(2x-1\right)^{/} = 4\left(2x-1\right)^3\cdot 2 = 8\left(2x-1\right)^3.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{f\left(x\right)}$	$-\dfrac{1}{f^2\left(x\right)}\cdot f'\left(x\right) = -\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}$

Пример: 1) $y = \dfrac{1}{\sin x}$. $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{f}; \\ f = \sin x. \end{array}\right.$

$$y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\left(\sin x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f\left(x\right)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f\left(x\right)}}\cdot f'\left(x\right) = \dfrac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$

Пример: 1) $y = \sqrt{2x^3 - x}.$ $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{f}; \\ f = 2x^3 - x. \end{array}\right.$

$$y' = \sqrt{\left(2x^3 - x\right)^4}' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - x}}\cdot\left(2x^3 - 1\right)' = \frac{6x^2}{2x\sqrt{2x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 - 1}}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f\left(x\right)$	$\cos f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$

Пример: 1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$ $\left[\begin{array}{l} y = \sin f; \\ f = 2x - \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$

$$y' = \sin'\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x)\cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\cdot f'(x)$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgf(x)$	$\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

1)**y = x•cos x** **Найти y′**

y′=(x•cos x)′= x′•cos x + x•(cos x)′=1•cos x + x•(-sin x)= cos x - x•sin x

2)**y = x^5+sin x** **Найти y′**

y′=(x^5+sin x)′= (x^5)′+(sin x)′= $5x^4$+cosx

3) **y = x•sin x** **Найти y′**

y′=(x•sin x)′= x′•sin x + x•(sin x)′=1•sin + x•cos x= sin x + x•cos x

4) **y = 4√x +tg x** **Найти y′**

y′=(4√x +tg x)′= (4 √x)′+(tg x)′= $4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos^2 x}$

5) **y = sin x –2x** **Найти y′(0)**

y′=(sin x - 2x)′= (sin x)′-(2x)′= cosx - 2

y′(0) = cos 0 - 2 = 1-2 = -1

Производная сложной функции

Функция **h** есть **сложная функция**, составленная из функций **g** и **f**, если

$h(x)=g(f(x))$

$f(x)$ – «внутренняя функция»

$g(f)$ – «внешняя функция»

Определим внутреннюю(f) и внешнюю(g) элементарные функции, из которых составлена сложная функция $h(x)=g(f(x))$

1) $h(x) = \cos 3x$

$f(x) = 3x$

$g(f) = \cos f$

2) $h(x) = tg(2x-П/4)$

$f(x)= 2x-П/4$

$g(f) = tg f$

3) $h(x)=(3-5x)^5$

$f(x) = 3-5x$

$g(f) = f^5$

4) $h(x) = \sqrt{\sin x}$

$f(x) = \sin x$

$g(f) = \sqrt{f}$

Определите внутреннюю(f) и внешнюю(g) элементарные функции, из которых составлена сложная функция y=g(f(x))

1) $y = \sqrt{9-x^2}$	$f(x)= 9-x^2$,	$g(f)=\sqrt{f}$
2) $y = \sin \frac{x}{3}$	$f(x)= \frac{x}{3}$,	$g(f)=\sin f$
3) $y = 2(3x^3-6x)^7$	$f(x)= 3x^3-6x$,	$g(f)=2f^7$

Формула производной сложной функции

$$\boxed{h'(x) = g'(f) \cdot f'(x)}$$

$$\boxed{h'(x) = g'(f) \cdot f'(x)}$$

Алгоритм нахождения производной сложной функции

1) Определи внутреннюю и внешнюю элементарные функции $f(x)$ и $g(f)$

2) Найди производную внутренней функции $f'(x)$

3) Найди производную внешней функции $g'(f)$

4) Перемножь производные внутренней и внешней функции и получишь производную сложной функции

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(f)$$

Задание 1. Найдите производную функции

$$\mathbf{h(x) = (2x+3)^{100}}$$

1. Определим внутреннюю(f)и внешнюю(g) функции

   $f(x)=2x+3$ $\quad$ $g(f)=f^{100}$

2. Найдем производную внутренней функции

   $f'(x)=(2x+3)'=2$

3. Найдем производную внешней функции

   $g'(f)=(f^{100})'=100f^{99}$

4. Перемножим производные внутренней и внешней функций

$$\mathbf{h'(x) = 2 \cdot 100 f^{99} = 200 f^{99} = \underline{200(2x+3)^{99}}}$$

Задание 2. Найдите производную функции

$y(x) = 4\cos 3x$

1. Определим внутреннюю(f)и внешнюю(g) функции

   $f(x)=3x \qquad g(f)=4\cos f$

2. Найдем производную внутренней функции

   $f'(x)=(3x)'=3$

3. Найдем производную внешней функции

   $g'(f)=(4\cos f)'= -4\sin f$

4. Перемножим производные внутренней и внешней функций

$$\mathbf{y'(x) = 3 \cdot (-4\sin f) = -12\sin f = \underline{-12\sin 3x}}$$

Задание 3. Найдите производную функции

а) $y=\sqrt{9-x^2}$ б) $y=6\sin\frac{x}{3}$

а) $f(x)=9-x^2$, $g(f)=\sqrt{f}$

$f'(x)=(9-x^2)'=-2x$

$g'(f)=(\sqrt{f})'=\frac{1}{2\sqrt{f}}$

$y'=-2x\frac{1}{2\sqrt{f}}=-\frac{2x}{2\sqrt{f}}=$

$=-\frac{x}{\sqrt{f}}=\boxed{-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}}$

б) $f(x)=\frac{x}{3}$, $g(f)=6\sin f$

$f'(x)=\left(\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{3}$

$g'(f)=(6\sin f)'=6\cos f$

$y'=\frac{1}{3}.6\cos f=2\cos f=$

$=\boxed{2\cos\frac{x}{3}}$

Тест

1 вариант	A	B	C
1. $y=(x+1)^{12}$	$12(x+1)$	$12(x+1)^{11}$	$12(x+1)^{13}$
2. $y=(4x-3)^5$	$20(4x-3)^4$	$5(4x-3)^4$	$20x(4x-3)^4$
3 $y=(x^7-x^5-3)^5$	$5(x^7-x^5-3)^4$	$5(x^7-x^5-3)^4\cdot(7x^6-5x^4)$	$5(7x^6-5x^4)$
4 $y=3\cos(5x+6)$	$-3\sin(5x+6)$	$-15\sin(5x+6)$	$15\sin(5x+6)$
5 $y=\sqrt{x^2-2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x^2-2}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

2 вариант	A	B	C
1 $y=(x+4)^6$	$6(x+4)^5$	$6(x+4)$	$x+4$
2 $y=(3x-2)^3$	$3(3x-2)^4$	$3(3x-2)^2$	$9(3x-2)^2$
3 $y=(x^5+x^3+1)^6$	$6(x^5+x^3+1)^5\cdot(5x^4+3x^2)$	$6(x^5+x^3+1)^5$	$5x^4+3x^2$
4 $y=2\sin(3x-4)$	$2\cos(3x-4)$	$6\cos(3x-4)$	$\cos(3x-4)$
5 $y=\sqrt{x^2+8}$	$\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают ее наукой сухой. В сущности же эта наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего века говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе.

С. КОВАЛЕВСКАЯ

Благодарю за внимание!
Учитесь с удовольствием!