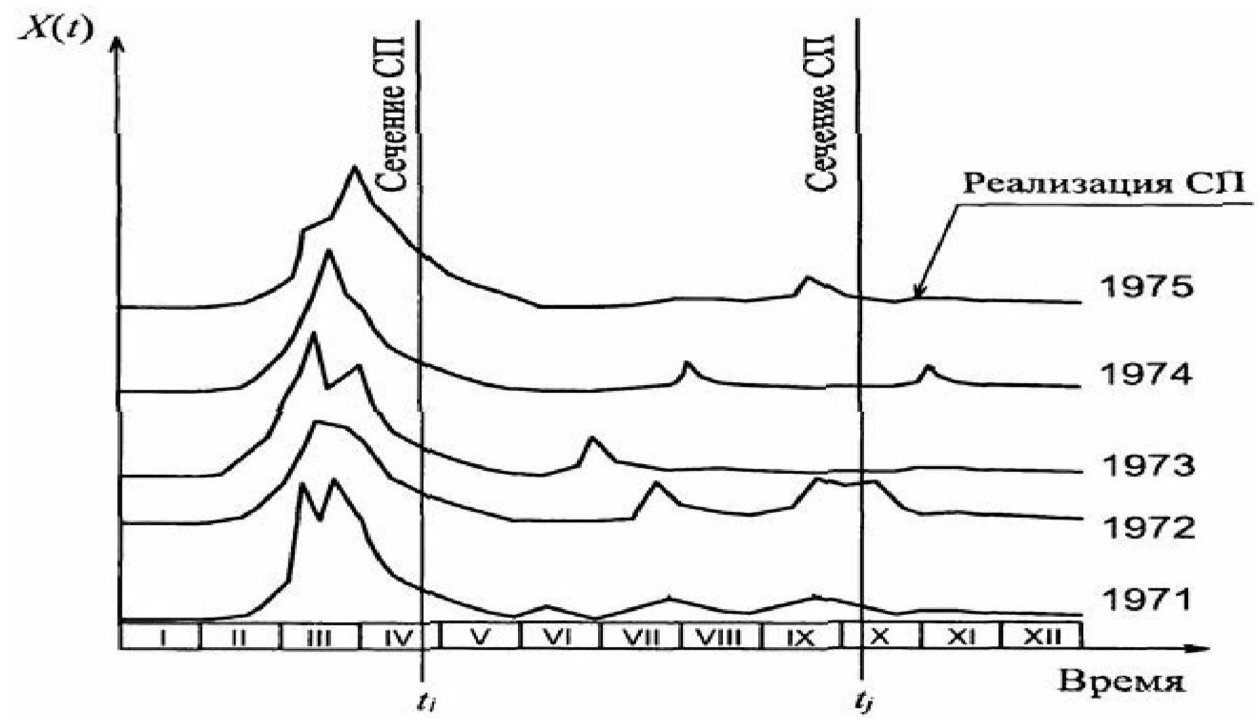
Лекция 13

Случайные процессы

Основные понятия. Закон распределения и основные характеристики случайных процессов. Стационарные, эргодические, элементарные случайные процессы

(Ахметов С.К.)

Определения



- ***Случайным процессом X(t)*** называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_i$ является СВ $X(t_i)$
- ***Реализацией случайного процесса X(t)*** называется неслучайная функция ***x (t)***, в которую превращается случайный процесс ***X(t)*** в результате опыта
- ***Сечение случайного процесса (случайной функции)*** – это случайная величина $X(t_i)$ при $t = t_i$.

Классификация случайных процессов

- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***дискретным временем***, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты t_1, t_2, t_3….. t_n, число которых конечно или счетно
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***непрерывным временем***, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени t наблюдаемого периода
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***непрерывным состоянием***, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную величину
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***дискретным состоянием***, если в любой момент времени t множество его состояний конечно или счетно, то есть, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной

Классификация случайных процессов

Таким образом, все ***СП*** можно разделить на 4 класса:

- Процессы с дискретным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

- ***Большинство гидрологических процессов*** являются процессами ***с непрерывным состоянием и непрерывным временем.*** Но при вводе шага дискретности по времени они превращаются из процесса с непрерывным временем в процесс с дискретным временем. При этом процесс остается непрерывным по состоянию

Основные характеристики случайных процессов

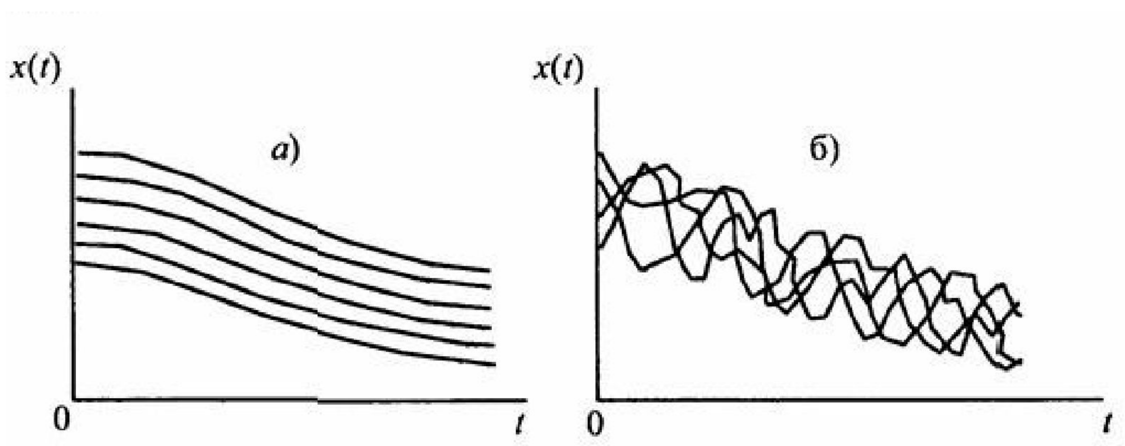
Сечение случайного процесса x(t) при любом фиксированном значении аргумента ***t*** представляет собой ***СВ***, которая имеет закон распределения

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}$$

Это одномерный закон распределения случайного процесса ***X(t)***

Но, он не является исчерпывающей характеристикой ***СП***, так как характеризует свойства любого, но отдельно взятого сечения и не дает представления о совместном распределении двух или более сечений.

Это видно на рисунке, где показаны два ***СП*** с разными вероятностными структурами, но примерное одинаковыми распределениями ***СВ*** в каждом сечении



Основные характеристики случайных процессов

Поэтому более полной характеристикой СП является двумерный закон распределения

$$F(t_1,t_2,x_1,x_2) = P\{X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2\}$$

В общем случае исчерпывающей характеристикой СП является ***n - мерный закон распределения***

На практике вместо многомерных законов распределения используют основные характеристики ***СП***, такие как ***МО, дисперсия, начальные и центральные моменты***, но только для ***СП*** эти характеристики будут ***не числами, а функциями***

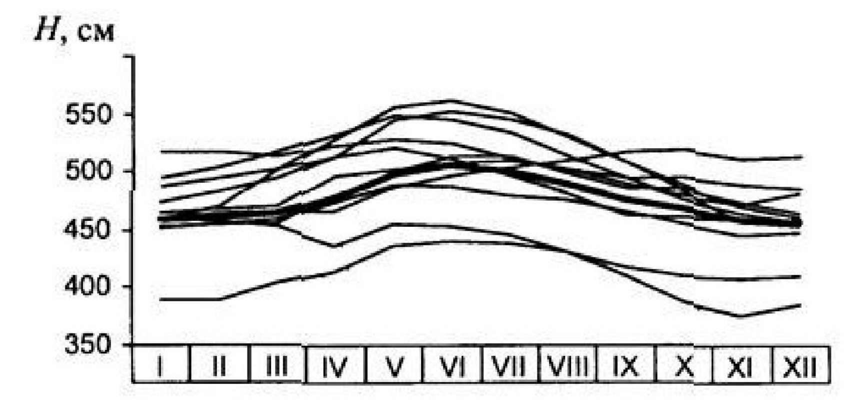
- ***Математическое ожидание СП X(t)*** - неслучайная функция $m_x(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения ***СП:***

$$m_x(t) = \mathbf{M}\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x,t)\,dx$$

где $f_1(x,t)$ – одномерная плотность распределения ***СП X(t)***

Основные характеристики случайных процессов

МО СП представляет собой некоторую «среднею» функцию, вокруг которой происходит разброс ***СП***



Если из ***СП X(t)*** вычесть его МО, то получим центрированный СП:

$$X_0(t) = X(t) - m_x(t)$$

- ***Дисперсией СП X(t)*** называется неслучайная функция ***СП X(t)***, которая при любом значении аргумента ***t*** равна дисперсии соот – го сечения ***СП X(t)***

$$СП\ X(t) = D[X(t)] = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}$$

- ***Среднеквадратическим отклонением СП X(t)*** называется неслучайная функция $\sigma_x(t)$, которая равна корню квадратному из дисперсии СП:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t] = \sqrt{D}_x(t)$$

Основные характеристики случайных процессов

Для полной характеристики СП необходимо учитывать взаимосвязь между различными сечениями. Поэтому, к комплексу перечисленных характеристик нужно добавить также корреляционную функцию СП:

Корреляционной (или ковариационной) функцией СП X(t) называется неслучайная функция $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна корреляции соответствующих сечений $X(t)$ и $X(t')$

$$K_x(t,t') = M\{[X(t) - m_x(t)] \times [X(t') - m_x(t')]\}$$

или

$$K_x(t,t') = M[X_0(t)\, X_0(t')] = M[X(t)\, X(t')] - m_x(t)\, m_x(t')$$

Свойства корреляционной функции:

- при равенстве $t = t'$ корреляционная функция равна дисперсии СП, т. е.

$$K_x(t,t') = D_x(t)$$

- корреляционная функция $K_x(t,t')$ симметрична относительно своих аргументов, то есть

$$K_x(t,t') = K_x(t',t)$$

Основные характеристики случайных процессов

Нормированной корреляционной функцией $r_x(t,t')$ ***СП*** $X(t)$ называется функция, полученная делением корреляционной функции на произведение среднеквадратических отклонений $\sigma_x(t)\ \sigma_x(t')$

$$r_x(t,t') = [K_x(t,t')]/(\sigma_x(t)\sigma_x(t')) = [K_x(t,t')]/(\sqrt{}(D_x(t)D_x(t'))$$

Свойства нормированной корреляционной функции:

- при равенстве аргументов t и t' нормированная корреляционная функция равна единице $r_x(t,t') = 1$

- нормированная корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, то есть $r_x(t,t') = r_x(t',t)$

- нормированная корреляционная функция по модулю не превышает единицу $r_x(t,t') \leq 1$

Основные характеристики случайных процессов

Скалярный СП – это когда речь идет об одном ***СП,*** как было до сих пор.

Векторный СП – это когда рассматриваются ***2*** и ***более СП.***

Допустим заданы расходы воды в нескольких створах во времени

В этом случае для характеристики СП ***нужно знать для каждого скалярного процесса:***

- МО
- корреляционную функцию
- взаимную корреляционную функцию

Взаимной корреляционной функцией $R_{i,j}(t,t')$ двух случайных процессов $X(t)$ и $X(t')$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений t и t' равна ковариации (линейной связи) двух сечений СП $X(t)$ и $X(t')$

$$R_{i,j}(t,t') = M[X_0(t)\, X_0(t')]$$

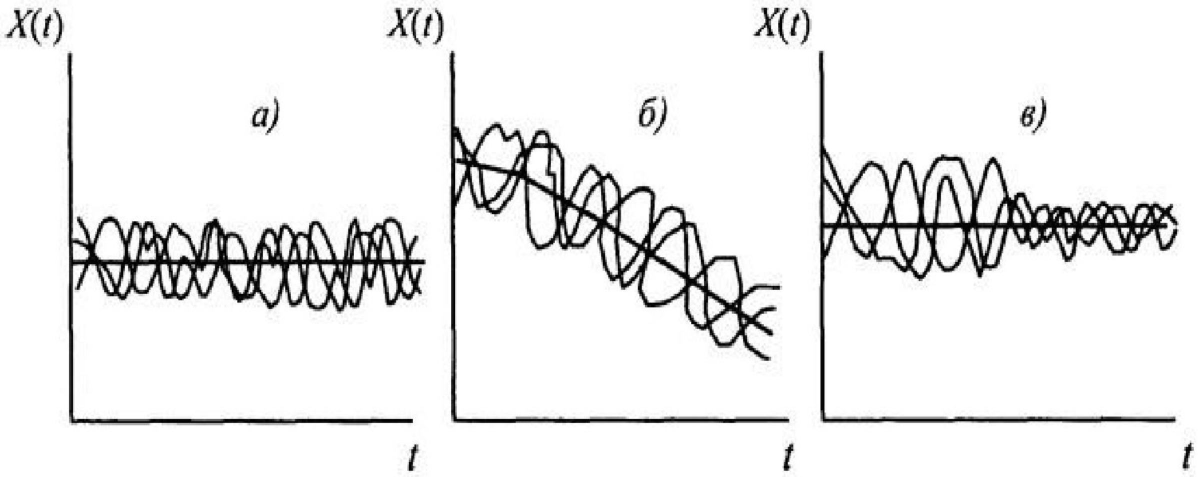
Стационарные случайные процессы

Стационарные СП – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = const$

- $D_x = const$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке



а) стационарный СП

б) нестационарный СП по МО

с) нестационарный СП по дисперсии

Свойства корреляционной функции стационарного СП

- ***Четность функции от своего аргумента,*** то есть $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$

  τ – сдвиг всех временных аргументов СП на одинаковую величину Θ

  k – корреляционная функция СП при $K_x(t_1,t_2) = k_x(\tau)$

- Значение корреляционной функции стационарного СП ***при нулевом сдвиге*** τ равно дисперсии СП

$$D_x = K_x(t_1,t_2) = k_x(t - t) = k_x(0)$$

- $|k_x(\tau)| \leq k_x(0)$

Помимо корреляционной функции используется нормированная корреляционная функция стационарного СП, которую называют ***автокорреляционной функцией***

$$r_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0)$$

Эргодические случайные процессы

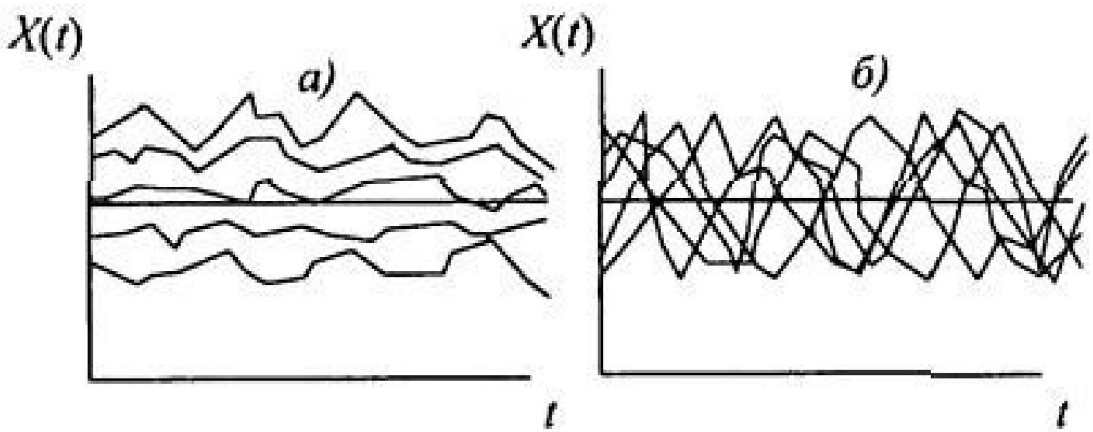
Эргодическое свойство СП – это когда по одной достаточно продолжительной реализации СП можно судить о СП в целом

Достаточным условием эргодичности СП является условие

$\lim k_x(\tau) = 0$

при $\tau \to \infty$, т.е. при увеличении сдвига между сечениями корреляционная функция затухает

На рисунке показаны а) неэргодический и б) эргодический СП



На практике (чаще всего) мы вынуждены принимать гипотезу о стационарности и эргодичности гидрологических процессов, чтобы по имеющемуся раду судить о всей генеральной совокупности

Элементарные случайные процессы

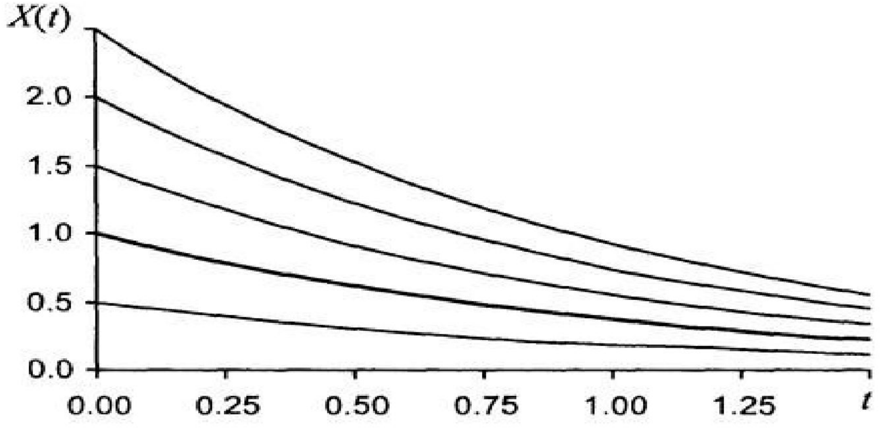
- ***Элементарный СП (э.с.п)*** – это такая функция аргумента t, для которой зависимость от t представлена ***обычной неслучайной функцией***, в которую в качестве аргумента входит одна или несколько обычных СВ
- То есть каждая ***СВ*** порождает свою реализацию ***СП***
- К примеру, если в каком – то створе ветвь спада половодья является устойчивой и описывается уравнением

$$Q(t) = Q_н e^{-at}$$

a - районный параметр $(a>0)$

$Q_н$ - расход воды в начальный момент времени $t = t_0$

то процесс спада половодья можно считать э.с.п., где a - неслучайная величина, $Q_н$ -случайная величина



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!