

Сетевое планирование и управление

Сетевой график

- В нашей стране разработаны системы планирования и управления "СПУ". В основе этих систем лежат сетевые графики.
- Сетевая модель была применена в США при создании баллистических ракет "Поларис", предназначенных для оснащения атомных подводных лодок американского военно-морского флота. В сложном комплексе работ при этом участвовало свыше 6000 фирм, работы выполнялись на территории 48 штатов Америки, а сетевой график включал в себя более 10000 событий.

Сетевой график

- Сетевые методы и модели широко применяются для решения задач коммерции. На их основе создаются системы сетевого планирования и управления (СПУ).
- Методы и модели СПУ применяются в коммерции для решения задач по заготовке, переработке и хранению плодово-овощной продукции; переводе магазина на самообслуживание; строительстве торговой базы; подготовке и проведению ярмарок, выставок-продаж товаров народного потребления; поставке товаров покупателям и др.

Сетевой график

- Всякий намеченный комплекс работ, необходимых для достижения некоторой цели, называют проектом. Проект (или комплекс работ) подразделяется на отдельные работы. Каждая отдельная работа, входящая в комплекс (проект), требует затрат времени. Некоторые работы могут выполняться только в определенном порядке. При выполнении комплекса работ всегда можно выделить ряд событий, то есть итогов какой-то деятельности, позволяющих приступить к выполнению следующих работ.

Сетевой график

- Если каждому событию поставить в соответствие вершину графа, а каждой работе — ориентированное ребро, то получится некоторый граф. Он будет отражать последовательность выполнения отдельных работ и наступление событий в едином комплексе. Если над ребрами проставить время, необходимое для завершения соответствующей работы, то получится сеть. Изображение такой сети называют сетевым графиком.

Сетевой график

- Сетевой график состоит из двух типов основных элементов: работ и событий.
- **Работа** представляет собой выполнение некоторого мероприятия (например, погрузка боезапаса или переход корабля в пункт базирования). Этот элемент сетевого графика связан с затратой времени и расходом ресурсов. Поэтому работа всегда имеет начало и конец. Кроме того, каждая работа должна иметь определение, раскрывающее ее содержание (например, уяснение боевой задачи, приготовление корабля к походу и т.д.).

Сетевой график

- На сетевом графике работа изображается стрелкой, над которой проставляется ее продолжительность или затрачиваемые ресурсы, или то и другое одновременно. Работа, отражающая только зависимость одного мероприятия от другого, называется фиктивной работой. Такая работа имеет нулевую продолжительность (или нулевой расход ресурсов) и обозначается пунктирной стрелкой.

Сетевой график

- Начальная и конечная точки работы, то есть начало и окончание некоторого мероприятия (например, окончание приготовления корабля к бою), называются **событиями**. Следовательно, событие, в отличие от работы, не является процессом и не сопровождается никакими затратами времени или ресурсов.
- Событие, следующее непосредственно за данной работой, называется **последующим** событием по отношению к рассматриваемой работе. Событие, непосредственно предшествующее рассматриваемой работе, называется **предшествующим**.

Сетевой график

- Наименования "предшествующий" и "последующий" относятся также и к работам. Каждая входящая в данное событие работа считается предшествующей каждой выходящей работе, и наоборот, каждая выходящая работа считается последующей для каждой входящей.
- Из определения отношения "предшествующий—последующий" вытекают свойства сетевого графика.

Сетевой график

- Во-первых, ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы.
- Во-вторых, ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие.
- И, наконец, ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей.

Сетевой график

- Событие обозначается кружком с цифрой внутри, определяющей его номер.
- Из всех событий, входящих в планируемый процесс, можно выделить два специфических — событие начала процесса, получившее название исходного события, которому присваивается нулевой номер, и событие конца процесса (завершающее событие), которому присваивается последний номер. Остальные события нумеруются так, чтобы номер предыдущего события был меньше номера последующего.

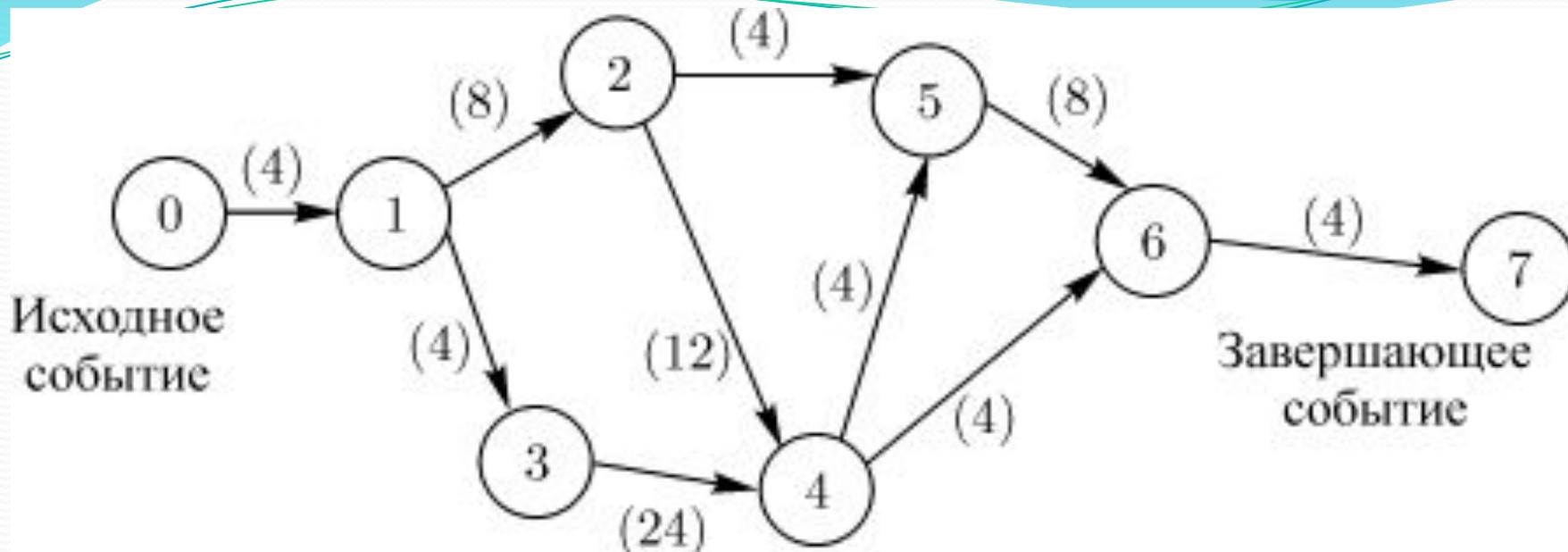


Рис. 14.1.

Для нумерации событий применяется следующий способ.

Вычеркиваются все работы, выходящие из события с номером "0", и просматриваются все события, в которых оканчиваются эти вычеркнутые работы. Среди просмотренных находятся события, которые не имеют входящих в них работ (за исключением уже вычеркнутых). Они называются событиями первого ранга и обозначаются (вообще, в произвольном порядке) числами натурального ряда, начиная с единицы (на [рис. 14.1](#) это событие 1).

Сетевой график

- Затем вычеркиваются все работы, выходящие из событий первого ранга, и среди них находятся события, не имеющие входящих работ (кроме вычеркнутых). Это — события второго ранга, которые нумеруются следующими числами натурального ряда (например, 2 и 3 на [рис. 14.1](#)).
- Прделав таким способом $(k - 1)$ шаг, определяют события $(k - 1)$ -го ранга, и просматривая события, в которых эти работы заканчиваются, выбирают события, не имеющие ни одной входящей в них работы (кроме вычеркнутых). Это события k го ранга, и нумеруются они последовательными числами натурального ряда, начиная с наименьшего, еще не использованного числа при предыдущей нумерации на $-$ м шаге.

Сетевой график

- Сетевой график содержит конечное число событий. Поскольку в процессе вычеркивания движение осуществляется в направлении стрелок (работ), никакое предшествующее событие не может получить номер, больший, чем любое последующее. Всегда найдется хотя бы одно событие соответствующего ранга, и все события получают номера за конечное число шагов.
- Работа обычно кодируется номерами событий, между которыми они заключены, то есть парой (i, j) где i — номер предшествующего события, j — номер последующего события.
- В одно и то же событие могут входить (выходить) одна или несколько работ. Поэтому свершение события зависит от завершения самой длительной из всех входящих в него работ.

Сетевой график

- Взаимосвязь между работами определяется тем, что начало последующей работы обусловлено окончанием предыдущей. Отсюда следует, что нет работ, не связанных началом и окончанием с другими работами через события.
- Последовательные работы и события формируют цепочки (пути), которые ведут от исходного события сетевого графика к завершающему. Например, путь $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ сетевого графика, показанного на ([рис.14.1](#)), включает в себя события $0, 1, 2, 5, 6, 7$ и работы $(0 - 1), (1 - 2), (2 - 5), (5 - 6), (6 - 7)$.

Сетевой график

- На основании изложенного можно сказать, что ранг события — это максимальное число отдельных работ, входящих в какой-либо из путей, ведущих из нулевого (исходного) события в данное. Так, события первого ранга не имеют путей, состоящих более чем из одной работы, ведущих в них из 0 (например, событие 1 на [рис.14.1](#)). События второго ранга связаны с 0 путями, которые состоят не более чем из двух работ, причем для каждого события второго ранга хоть один такой путь обязательно существует. Например, на ([рис.14.1](#)) событие 4 — событие третьего ранга, так как пути, ведущие в это событие из 0, включают только три работы — $(0 - 1)$, $(1 - 3)$ и $(3 - 4)$ или $(0 - 1)$, $(1 - 2)$ и $(2 - 4)$.

Сетевой график

- Построенный таким образом сетевой график в терминах теории графов представляет собой направленный граф.
- На рисунке изображен сетевой график. Граф, не содержащий циклов и имеющий только один исток и только один сток, называется направленным графом. Сетевой график есть ориентированный связный асимметрический граф с одним истоком, одним стоком и без циклов, то есть это направленный граф. При этом вершинами графа служат события сетевого графика, а дугами (ребрами) — работы сетевого графика.

Сетевой график

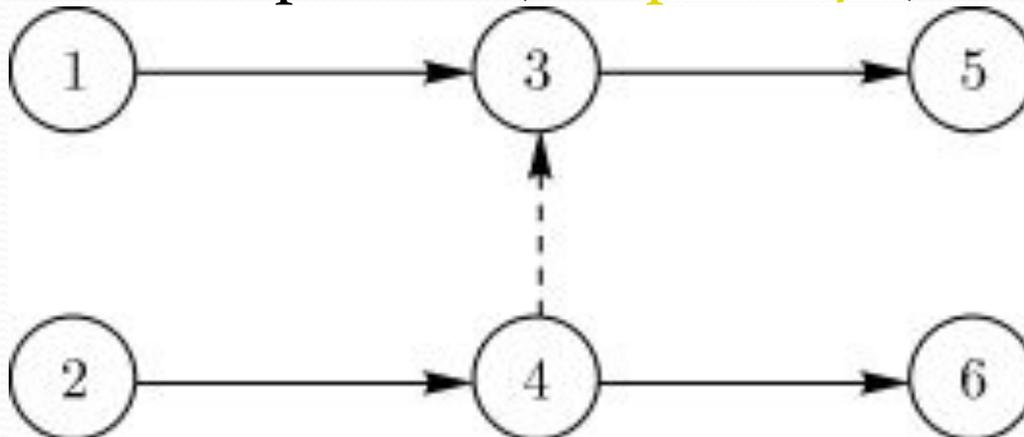
- Продолжительность работы представляет собой, в терминах теории графов, длину дуги. Следовательно, длина пути T — это сумма длин всех дуг, образующих данный путь, то есть $T = \sum t_{i,j}, t_{i,j} \in T$, где символом $t_{i,j}$ обозначается дуга, которая соединяет вершины i и j и направлена от вершины i к вершине j .

Правила построения сетевого графика

- Обычно сетевой график строится от исходного события к завершающему, слева направо, то есть каждое последующее событие изображается несколько правее предыдущего.
- В планируемых процессах часто встречаются сложные комплексные связи, когда две или более работ выполняются параллельно, но имеют общее конечное событие, или когда для выполнения одной из работ необходимо предварительно выполнить несколько работ, а для другой, выходящей из общего для них события, предварительным условием является выполнение только одной из предшествующих работ и т.д.
- Изображение в сетевой модели подобных параллельных или дифференцированно зависимых работ выполняется следующим образом.

Правила построения сетевого графика

- В случае, когда наступление события (например, 3 на [рис. 14.2](#)) возможно в результате завершения двух работ и , но в то же время существует событие 4 ([рис. 14.2](#)), зависящее от завершения только одной из этих работ (например,), вводится фиктивная работа (см. [рис. 14.2](#)).



● Рис. 14.2.

Правила построения сетевого графика

- Если одно событие (например, 1 на [рис. 14.3](#)) служит началом двух $(1 - 2)$ (например, и или нескольких $(1 - 3)$ работ, заканчивающихся в другом событии (3 на [рис. 14.3](#))), то для их различия также вводится фиктивная работа $(2 - 3)$ (см. [рис. 14.3](#)). С помощью фиктивной работы в сетевом графике могут быть отражены и

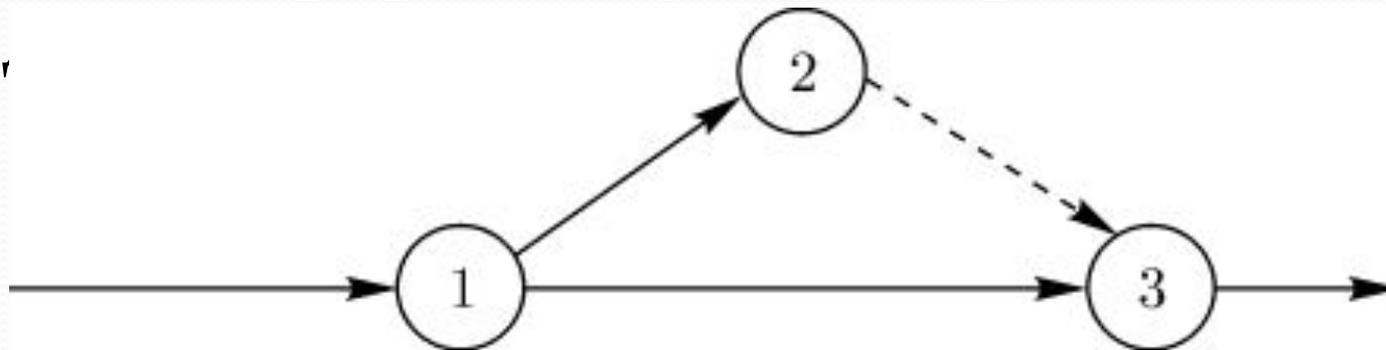


Рис. 14.3.

Правила построения сетевого графика

- Пусть, например, имеются три процесса A, B, C . При этом окончание процесса зависит от результатов процессов A и B . В этом случае возникают двусторонние зависимости, которые можно изобразить так, как показано на ([рис. 14.4](#)).

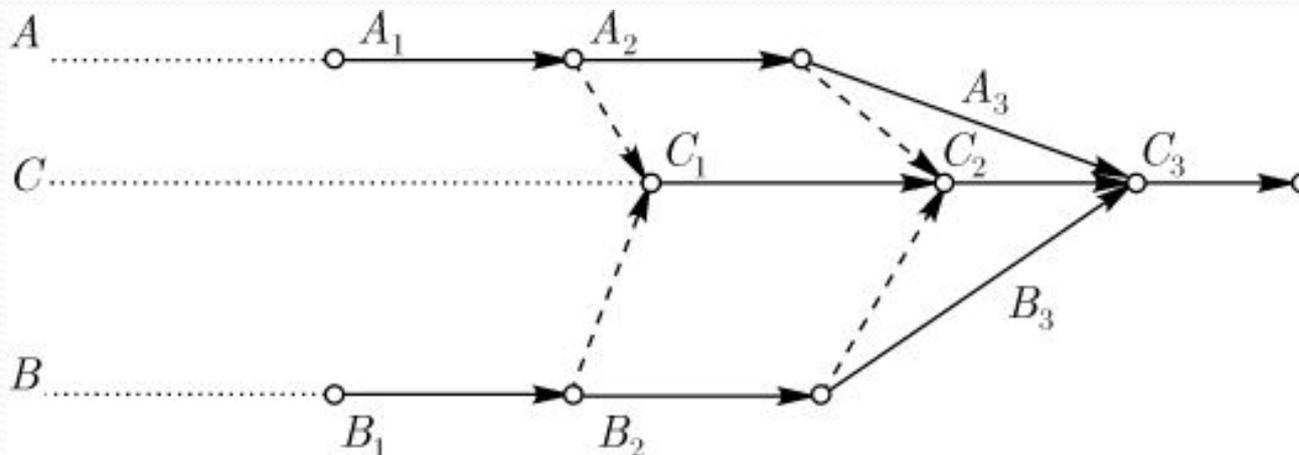


Рис. 14.4.

Анализ сетевой модели

- Параметры сетевой модели. Параметрами сетевой модели являются:
- наиболее раннее возможное время наступления j -го события, обозначаемое символом $T_p(j)$;
- самое позднее допустимое время наступления i -го события, обозначаемое символом $T_n(i)$;
- резерв времени данного события, обозначаемый символом R_i ;
- полный резерв времени работы (i, j) , обозначаемый символом $r_n(i, j)$;
- свободный резерв времени работы (i, j) , обозначаемый символом $r_c(i, j)$.

Анализ сетевой модели

- Наиболее раннее возможное время наступления j -го события определяется следующей рекуррентной формулой:

$$T_p(j) = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} \{T_p(i) + t_{ij}\}, \quad \bullet (14.1)$$

- где t_{ij} — продолжительность (i, j) -й работы;
 Γ_j^{-1} — множество событий, предшествующих j -му событию.
- Вычисления по формуле (14.1) выполняются шаг за шагом, двигаясь в порядке нумерации событий.

Анализ сетевой модели

- Вычисления по формуле (14.1) выполняются шаг за шагом, двигаясь в порядке нумерации событий.
- Самое позднее допустимое время наступления события определяется с помощью аналогичной рекуррентной формулы, но обращаясь не к предшествующим, а к последующим событиям.

$$T_n(i) = \min_{j \in \Gamma_i} \{T_n(j) - t_{ij}\},$$

- где Γ_i — множество событий, следующих за i -м событием.

Анализ сетевой модели

- Для определения по формуле (14.2) надо двигаться от конечного события к исходному событию 0, при этом .
- Резервом времени данного события называется разность между $T_n(i)$ и $T_p(i)$, которая вычисляется по формуле

$$R_i = T_n(i) - T_p(i). \quad \bullet (14.3)$$

- Полный резерв времени работы (i, j) вычисляется по формуле

$$r_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t_{ij}. \quad \bullet (14.4)$$

- Свободный резерв времени работы (i, j) вычисляется по формуле

$$r_c(i, j) = T_p(j) - T_n(i) - t_{ij}. \quad \bullet (14.5)$$

Определение критического пути

- Полный путь, суммарная продолжительность работ на котором является максимальной, называется **критическим**, то есть это самый длинный по времени путь в сетевом графике от исходного события до завершающего. Продолжительность критического пути определяет минимальное время, объективно необходимое для выполнения всего комплекса мероприятий, входящих в планируемый процесс. За время, меньше времени критического пути, весь комплекс мероприятий совершиться не может. Поэтому любая задержка на работах критического пути увеличивает время выполнения всего процесса.
- События, через которые проходит критический путь, называются критическими. Работы, входящие в состав критического пути, называются критическими.

Определение критического пути

- Задержка в выполнении работы на величину $\Delta t_{ij} > r_n(ij)$ приводит к задержке в наступлении завершающего события на величину $\Delta t_{ij} - r_n(ij)$.
- Задержка в выполнении работы на величину $\Delta t_{ij} \leq r_c(ij)$ вообще не повлияет ни на один другой срок, определенный данным сетевым графиком.

Определение критического пути

- Следовательно, у критических работ и полные, и свободные резервы времени равны нулю. Вообще говоря, равенство нулю полного резервного времени работы является необходимым и достаточным признаком того, что данная работа критическая. Напротив, свободный резерв времени может быть равным нулю и у некритических работ.
- Таким образом, критический путь находится посредством определения работ, полные резервы времени которых равны нулю.

Определение полного резерва времени ненапряженного пути

- События и работы, лежащие не на критических путях (такие пути называются *ненапряженными*), обладают резервами времени. Выявление этих резервов наравне с определением критического пути составляет основное содержание анализа сетевой модели.
- С работ и путей, имеющих резервы времени, можно снять ресурсы и направить их на выполнение работ, лежащих на критических путях. Этим самым можно добиться сокращения сроков проведения критических работ, а следовательно, и всей операции в целом, используя только внутренние резервы.

Определение полного резерва времени ненапряженного пути

- *Полным резервом времени* ненапряженного пути называется разница между его длиной и длиной критического пути. Полный резерв времени ненапряженного пути показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ этого пути без изменения срока выполнения всего процесса в целом. Однако при этом ненапряженный и критический пути не должны пересекаться. Если они пересекаются, то полный резерв времени определяется самым длительным участком напряженного пути, заключенным между соответствующими парами событий критического пути.

Формирование временных оценок работ

- Адекватность сетевой модели отображаемому реальному процессу и, соответственно, оперативность руководства процессом во многом зависят от правильности временных оценок выполняемых работ. Если, например, продолжительность работ будет занижена, то это вызовет поспешность в подготовке всей операции в целом, что, в свою очередь, может привести к срыву и цель не будет достигнута. А завышение сроков выполнения отдельных работ может привести к потере времени, что также, как правило, ведет к срыву.

Формирование временных оценок работ

- Для определения временных и других характеристик, необходимых для оценки длительности работ или расхода ресурсов, могут использоваться статистические данные, полученные опытным путем. Такие оценки однозначно определяются из нормативов. Если такие нормативы отсутствуют, то разработчиками сетевого графика даются три оценки времени:
 - оптимистическая (t_{\min});
 - пессимистическая (t_{\max});
 - наиболее вероятная ($t_{\text{нв}}$).

Формирование временных оценок работ

- **Оптимистическая оценка** — продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях.
- **Пессимистическая оценка** — продолжительность работы при самом неблагоприятном стечении обстоятельств.
- **Наиболее вероятная оценка** — продолжительность работы при условии, что не возникнет никаких неожиданных трудностей.

Формирование временных оценок работ

- На основании этих оценок вычисляются оценки и их дисперсии по следующим эмпирическим формулам:

$$t_{ij}^c = \frac{t_{\min} + 4t_{\text{нв}} + t_{\max}}{6}; \quad (14.6)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{t_{\max} - t_{\min}}{6} \right)^2. \quad (14.7)$$

В этом случае все расчеты проводятся так, как было рассмотрено выше. Затем рассчитываются вероятности того, что полученные параметры сетевой модели (ранние сроки, поздние сроки, резервы и т.д.) действительно будут находиться в тех или иных числовых границах.

Формирование временных оценок работ

- При этом вводится допущение, что продолжительности двух любых работ являются независимыми величинами, а величина определенная формулой (14.6), принимается равной математическому ожиданию продолжительности данной работы (). Тогда математическое ожидание любого параметра сетевой модели, являющегося суммой величин вида , есть сумма математических ожиданий слагаемых, то есть . Точнее, это оценка снизу, так как все параметры сетевой модели носят, так сказать, экстремальный характер. Соответственно, дисперсия параметра будет .

Формирование временных оценок работ

- Если считать, что время выполнения работ подчиняется нормальному закону, вероятность совершения j -го события в расчетный срок можно определить по следующей формуле:
$$P_i = \Phi \left(\frac{T_{зд} - T_p}{\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}} \right), \quad (14.8)$$
- Где Φ — функция Лапласа; $T_{зд}$ — директивный срок; $T_p(j)$ — время раннего свершения j -го события; $\sum \sigma_{ij}^2$ — сумма дисперсий работ, которые использовались при вычислении раннего срока наступления j -го события.