Динамика вращательного движения

- 1. Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки
- 2. Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси
- 3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера
- 4. Кинетическая энергия вращающегося тела
- 5. Закон сохранения момента импульса
- 6. Законы сохранения и их связь с симметрией
- пространства и времени
- 7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

- Рассмотрим твердое тело, как некую систему (рисунок), состоящую из *n* точек (m_1 m_2 … m_n);
- $\vec{r}_i$ – радиус-вектор *i*-ой точки, проведенный из точки *O* – центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на *i*-ую точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны *k*-ой точки на *i*-ую.
- Запишем основное уравнение динамики для i-ой точки :

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i .$$

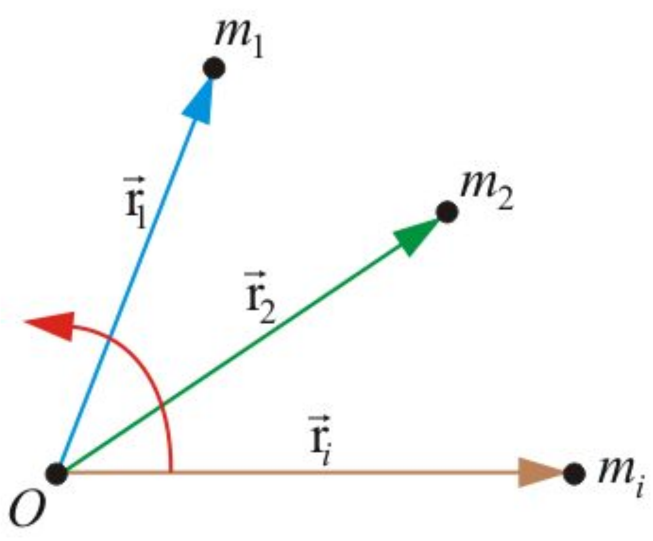
Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

- Умножим обе части векторно на $\vec{\mathbf{r}}_i$

$$\left[\vec{\mathbf{r}}_i, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{\upsilon}_\mathrm{i})\right] = \left[\vec{\mathbf{r}}_i, \sum_k \vec{\mathbf{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_i\right].$$

- Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{r}}_i, m_i\vec{\upsilon}_\mathrm{i}\right] = \sum_k \left[\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_i\right].$$

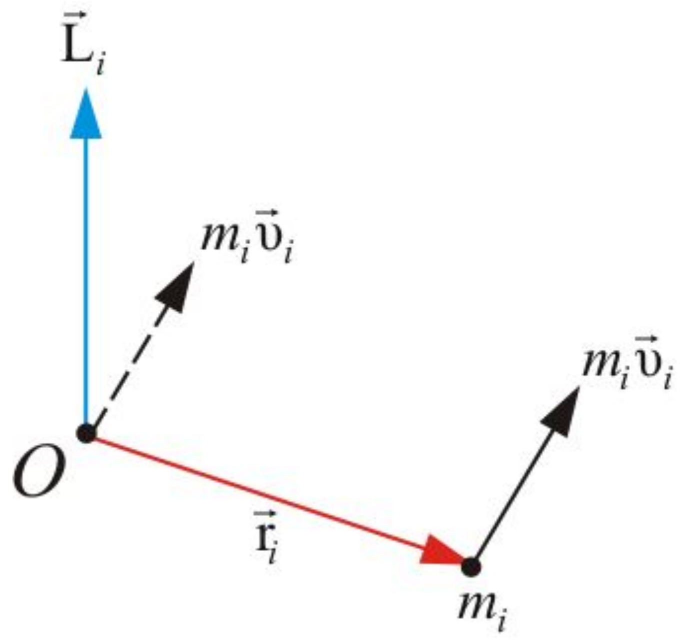


Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

- *Векторное произведение точки на её импульс называется* ***моментом импульса*** *этой точки относительно точки О.*

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i].$$

- Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика»



$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.}$$

В проекциях на оси:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} =$$

$$= [\, y(mv_z) - z(mv_y)]\bar{i} +$$

$$+ [\, z(mv_x) - x(mv_z)]\bar{j} +$$

$$+ [\, x(mv_y) - y(mv_x)]\bar{k}.$$

$$\Rightarrow$$

$$L_x = y(mv_z) - z(mv_y);$$

$$L_y = z(mv_x) - x(mv_z);$$

$$L_z = x(mv_y) - y(mv_x).$$

- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра** – геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_{1O} + \vec{L}_{2O} + \ldots + \vec{L}_{nO} = \sum \vec{L}_{iO} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i .}$$

В проекциях на оси:

$$\boxed{L_x = \sum L_{ix}; \quad L_y = \sum L_{iy}; \quad L_z = \sum L_{iy}.}$$

Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

- *Векторное произведение* $\vec{\mathbf{r}}_i$ *, проведенного в точку приложения сил, на эту силу называется* *моментом силы* $\vec{\mathbf{M}}_i$

$$\vec{\mathbf{M}}_i = [\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_i],$$

- *С учетом сделанных обозначение основное уравнение динамики вращательного движения для i-ой точки системы станет выглядеть :*

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathbf{M}}_{ik} + \vec{\mathbf{M}}_i$$

Динамика вращательного движения твердого тела
относительно точки

- Запишем систему *n* уравнений для всех точек системы и сложим, левые и правые части уравнений: $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i.$
- Отсюда получим *основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}$$

- **Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения)**:

1. Если в интервале времени [t_1, t_2] вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $M^e = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постоянен, L_O = const – закон сохранения момента количества движения системы).
2. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный момент внешних сил системы относительно оси x равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно оси x постоянен, L_x = const.

   Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

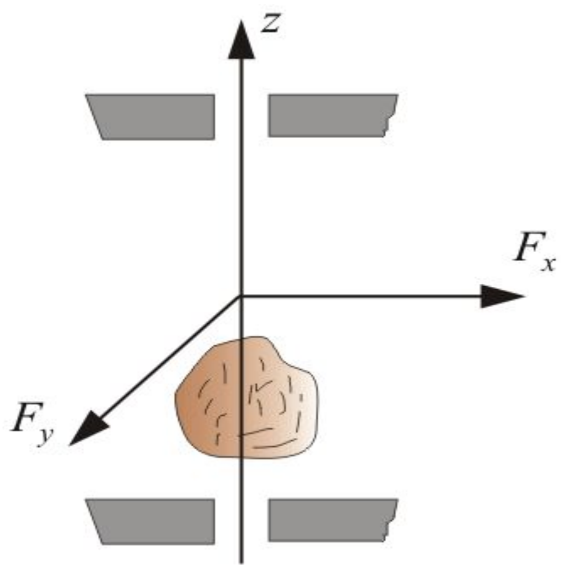
- Момент импульса системы является основной динамической характеристикой вращающегося тела.
- Сравнивая это уравнение с основным уравнением динамики поступательного движения, мы видим их внешнее сходство.

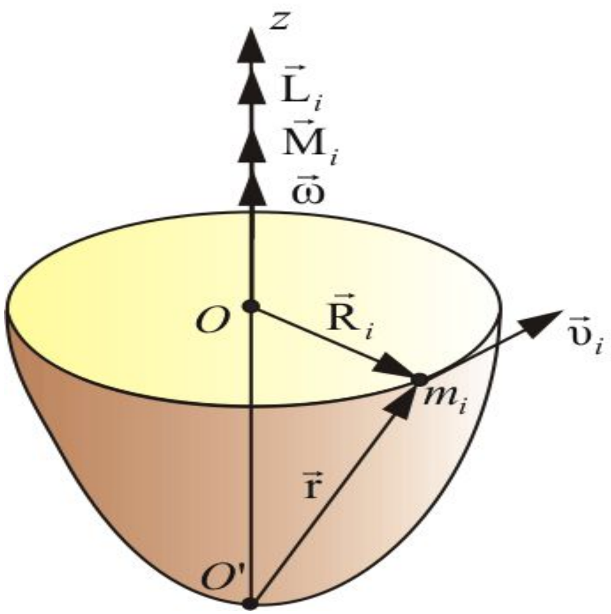
Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

- Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения.
- Однако вычислить вектор – момент импульса системы относительно произвольной точки не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).
- Значительно проще найти момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (z) .

Динамика вращательного движения твердого тела
относительно оси

- **Пусть некоторое тело вращается вокруг оси *z***





Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

- Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела находящегося на расстоянии R_i от оси вращения. При этом помним, что $\vec{L}_z$ и $\vec{M}_z$ направлены всегда вдоль оси вращения *z* *(см. рис),* поэтому в дальнейшем опустим значок *z*.
- $\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i$ или $\frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i\vec{\upsilon}] = \vec{M}_i$

Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

- Так как $\vec{\upsilon}_i$ у всех точек разная, введем, вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, причем $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$.
- Тогда $\dfrac{d}{dt}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i$
- Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда:

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i.$$

Динамика вращательного движения твердого тела
относительно оси

- Обозначим I_i– *момент инерции точки* находящейся на расстоянии *R* от оси вращения: $I_i = m_i R_i^2.$
- Так как тело состоит из огромного количества точек и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения, то момент инерции тела равен:

$$I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m,$$

Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

- где *R* – расстояние от оси *z* до d*m.*
- Как видно, момент инерции *I* – величина скалярная.
- Тогда, уравнение вращательного движения твердого тела относительно оси *Z* будет иметь вид:
- $I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$ или $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$

Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

- Так как $I d\vec{\omega} = \vec{M} dt$ $\quad I d\vec{\omega} = d\vec{L}$

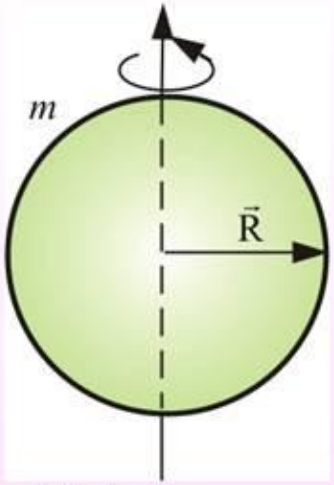
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

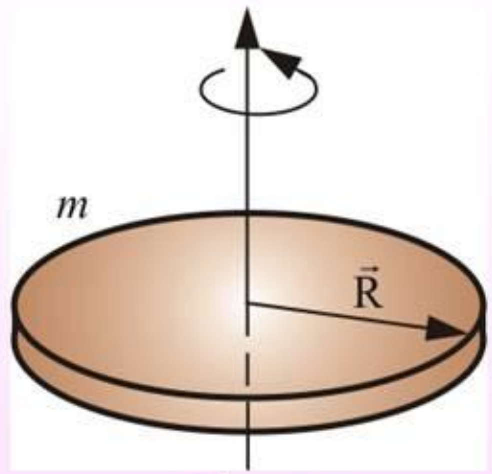
- где $\vec{L}$ – момент импульса тела вращающегося вокруг оси *z*.
- (Сравним: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – для поступательного движения).
- При этом помним, что $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$ а $\vec{M}$ – зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

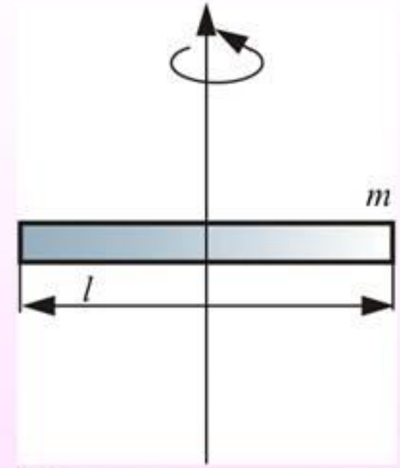
Расчет моментов инерции некоторых простых тел.
Теорема Штейнера

- По формуле $I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m$ можно рассчитать момент инерции тел некоторых простых форм вращающихся вокруг своей оси, проходящей через центр инерции тела.
- Момент инерции шара, диска, стержня приведены на рисунке

Моменты инерции **шара, сферы, диска, обруча и стержня** приведены







Шар

$$k = 2/5;$$

$$I_c = 2/5 \cdot m \cdot R^2;$$

Диск

$$k = 1/2;$$

$$I_c = 1/2 \cdot m \cdot R^2;$$

Стержень

$$k = \frac{1}{12}$$

Сфера

$$I_c = 2/3 \cdot m \cdot R^2;$$

Обруч

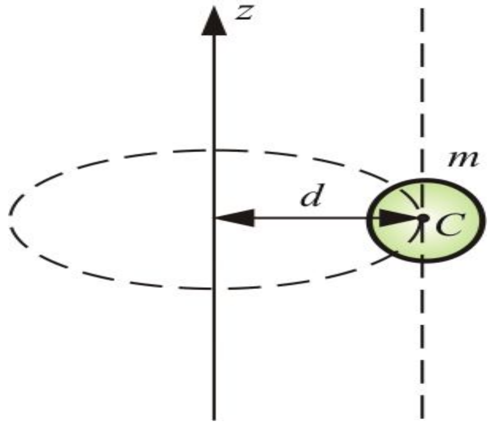
$$I_c = m \cdot R^2$$

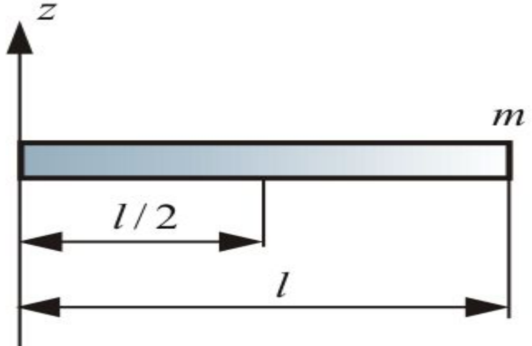
$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

Расчет моментов инерции некоторых простых тел.
Теорема Штейнера

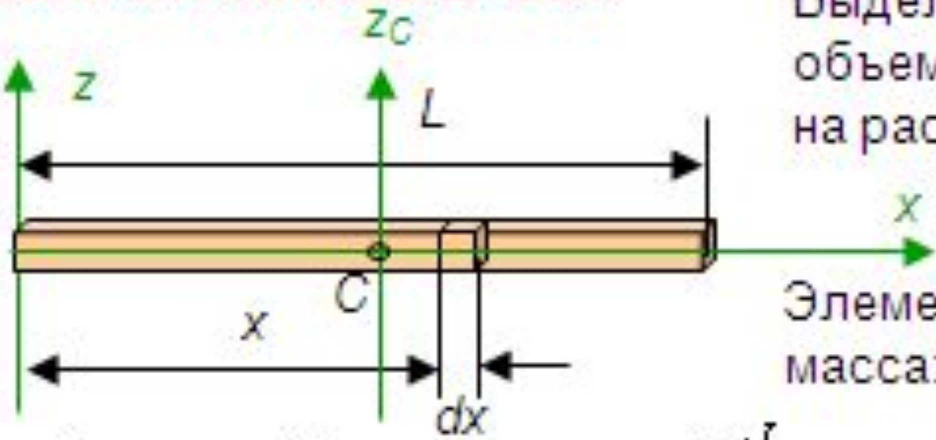
- **При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции , следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей или теоремой Штейнера***

$$I = I_c + md^2$$





Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:



Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстоянии x:

Элементарная масса: $dm = \rho A dx$

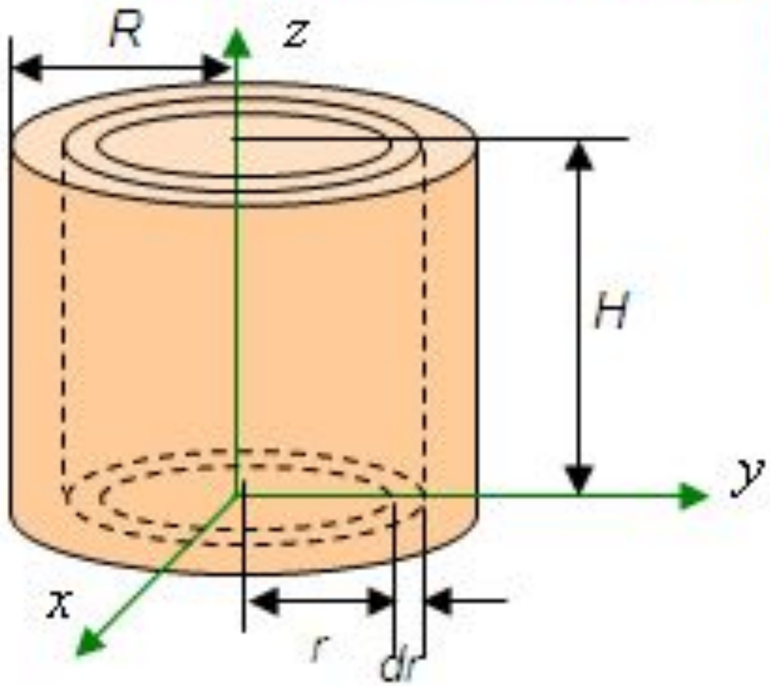
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{ML^2}{3}}$$

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования (-L/2, L/2). Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \Rightarrow \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \boxed{\frac{ML^2}{12}}.$$

Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:



Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r) :

Элементарная масса: $dm = \rho 2\pi r dr H$

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H =$$

$$= \rho 2\pi H \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

Здесь использована формула объема цилиндра $V=\pi R^2 H$.

Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \left. \frac{r^4}{4} \right|_{R1}^{R2} = \rho 2\pi H \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \boxed{\frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

- ***Кинетическая энергия*** **– величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех *n* материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить:**

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

- **Если тело вращается вокруг неподвижной оси *z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то линейная скорость *i*-ой точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i – расстояние до оси вращения.**
- **Следовательно,** $$K_{\text{âðàù.}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

- Сопоставив предыдущие формулы, можно увидеть, что момент инерции тела *I* – является мерой инертности при вращательном движении. Так же как масса *m* – мера инерции при поступательном движении.
- В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью и вращательного с угловой скоростью вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела:

$$K_{\text{полн.}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

Закон сохранения момента импульса

- Для замкнутой системы тел момент $\vec{M}$ внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.
- Поэтому $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0$, то есть $\vec{L} = \mathrm{const},$
- или $I\vec{\omega} = \mathrm{const}$

Закон сохранения момента импульса

- ***Закон сохранения момента импульса** – момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки **не изменяется** с течением времени.*
- Это один из фундаментальных законов природы.
- Аналогично для замкнутой системы вращающихся вокруг оси *z*:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0 \qquad \vec{L}_z = \mathrm{const} \qquad \vec{L}_z = \mathrm{const}$$

Закон сохранения момента импульса

- ***Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.***
- **Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.**
- **Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным гироскопом – быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы**

Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

- Во всей истории развития физики, законы сохранения оказались, чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

- ***В основе закона сохранения энергии*** **лежит** ***однородность времени***, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени). Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена моментом времени $t1$ на момент времени $t2$, без изменения значений координат и скорости частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены, координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени такие же значения, какие имели до замены, в момент времени .

Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

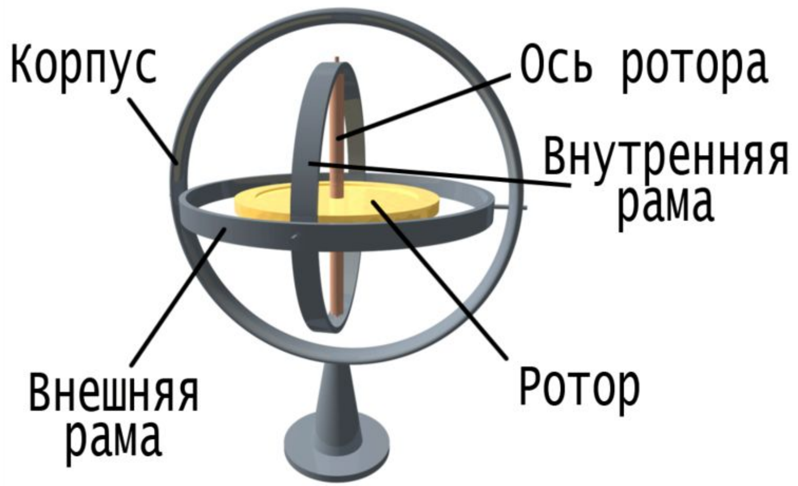
- **В основе *закона сохранения импульса* лежит *однородность пространства*, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.**

Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

- ***В основе закона сохранения момента импульса*** **лежит** ***изотропия пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

- ***Законы сохранения проявляются как принципы запрета:*** ***любое явление, при котором не выполняются хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.***
- ***Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных, и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления и в макромире.***



- **Элементарная теория гироскопа:**

Гироскоп – **твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.**

Свободный гироскоп – закреплен так, что его центр масс остается неподвижным, а ось вращения проходит через центр масс и может принимать любое положение в пространстве, т.е. ось вращения изменяет свое положение подобно оси собственного вращения тела при сферическом движении.

Основное допущение приближенной (элементарной) теории гироскопа – **вектор момента количества движения (кинетический момент) ротора считается направленным вдоль собственной оси вращения.** Таким образом, несмотря на то, что в общем случае ротор участвует в трех вращениях, принимается в расчет только угловая скорость собственного вращения $\omega = d\varphi/dt$. Основанием для этого является то, что в современной технике ротор гироскопа вращается с угловой скоростью порядка 5000-8000 рад/с (около 50000-80000 об/мин), в то время как две другие угловые скорости, связанные с прецессией и нутацией собственной оси вращения в десятки тысяч раз меньше этой скорости.

Основное свойство свободного гироскопа – ось ротора сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета (демонстрируется маятником Фуко, сохраняющим неизменной по отношению к звездам плоскость качания, 1852 г.).
Это вытекает из закона сохранения кинетического момента относительно центра масс ротора при условии пренебрежения трением в подшипниках осей подвески ротора, внешней и внутренней рамы