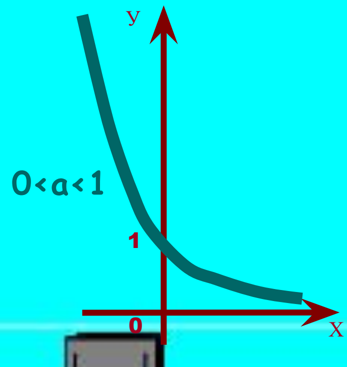
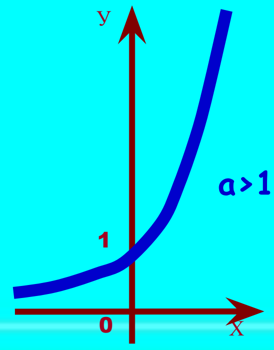
$y=a^x$ , $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$

# Показательные уравнения:

# типы и методы решения.

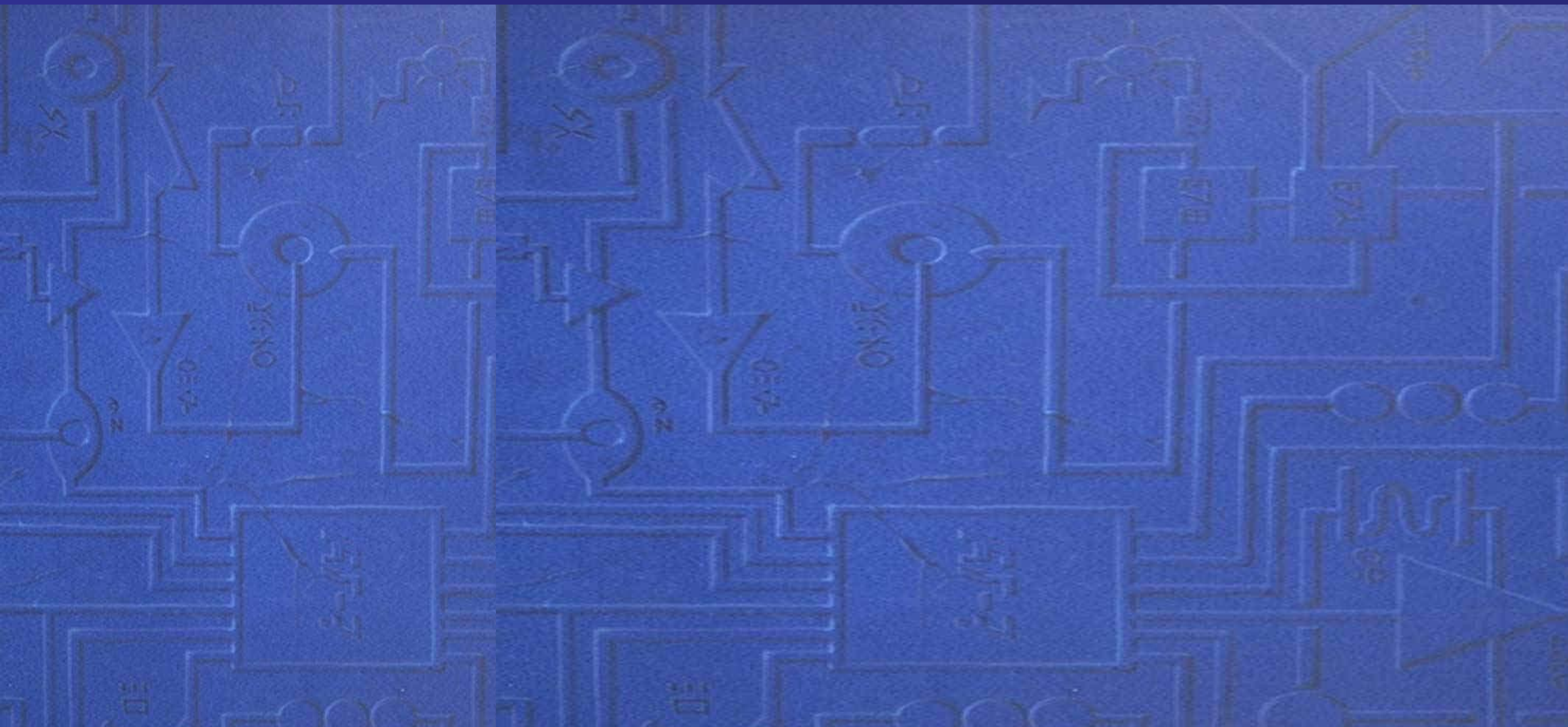



$y=a^x$



# Концентрация внимания

Выпишите в каждом ряду лишнее (по смыслу составления ряда) число



Концентрация внимания равна N.

N = (число верно указанных чисел) x 0,125 x 100%

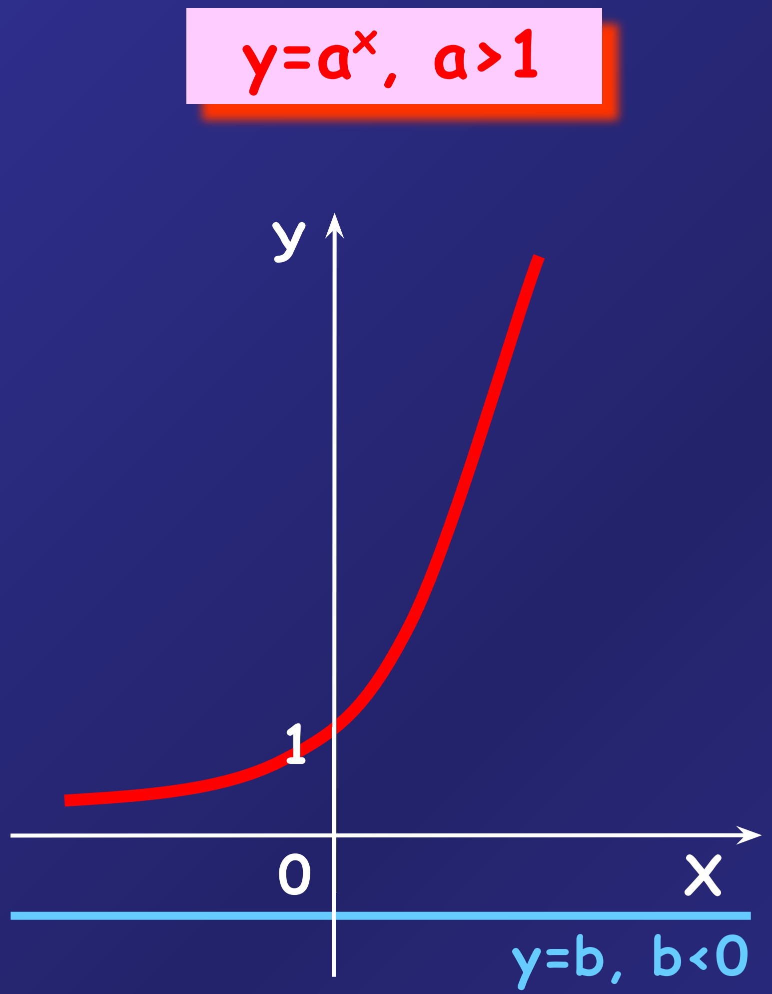
Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b \in R$

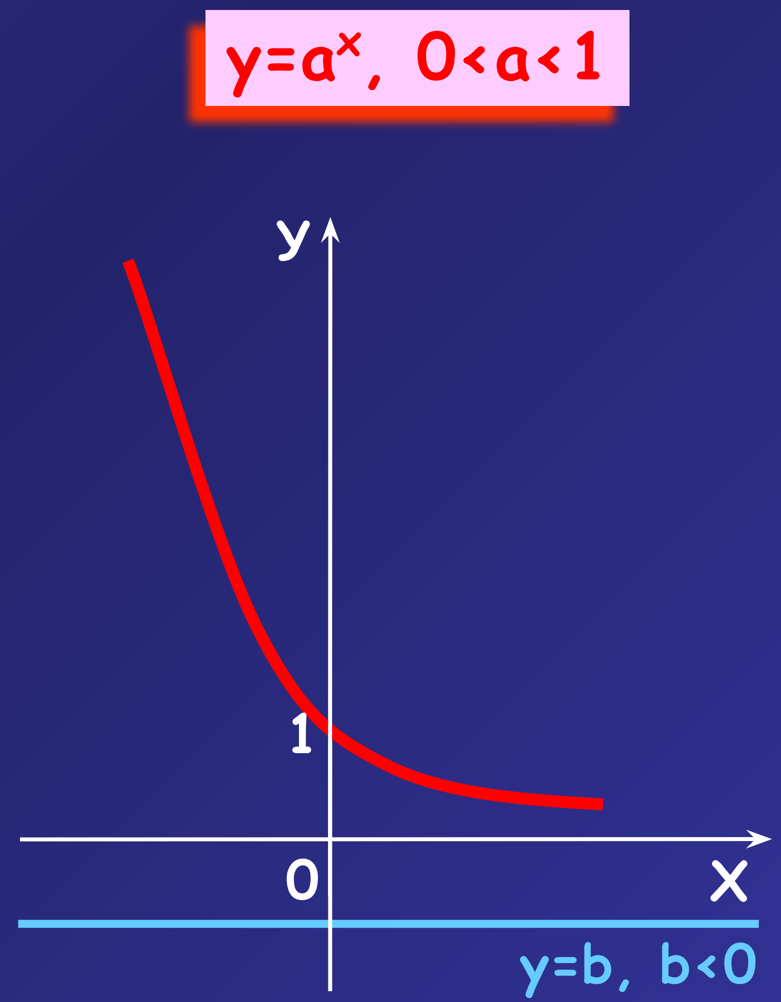
**$a^x=b$** – <u>простейшее показательное уравнение</u>

**Пример:**

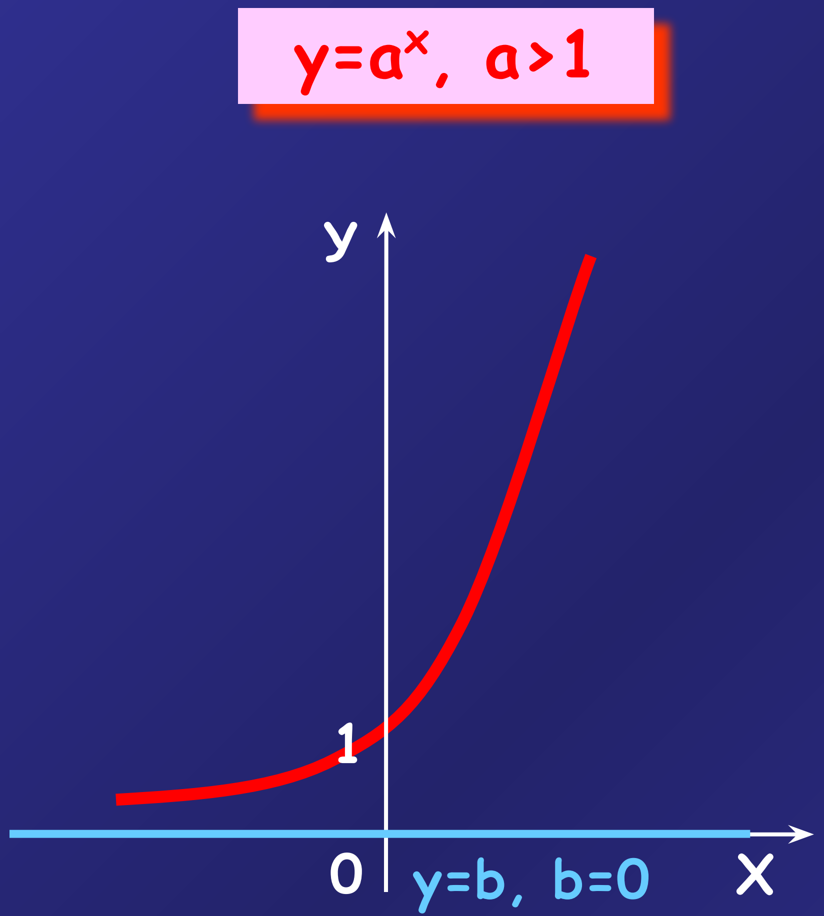
$$2^x=8,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x=81,\quad 5^x=\sqrt[3]{7},\quad 6^x=-10$$

# Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически



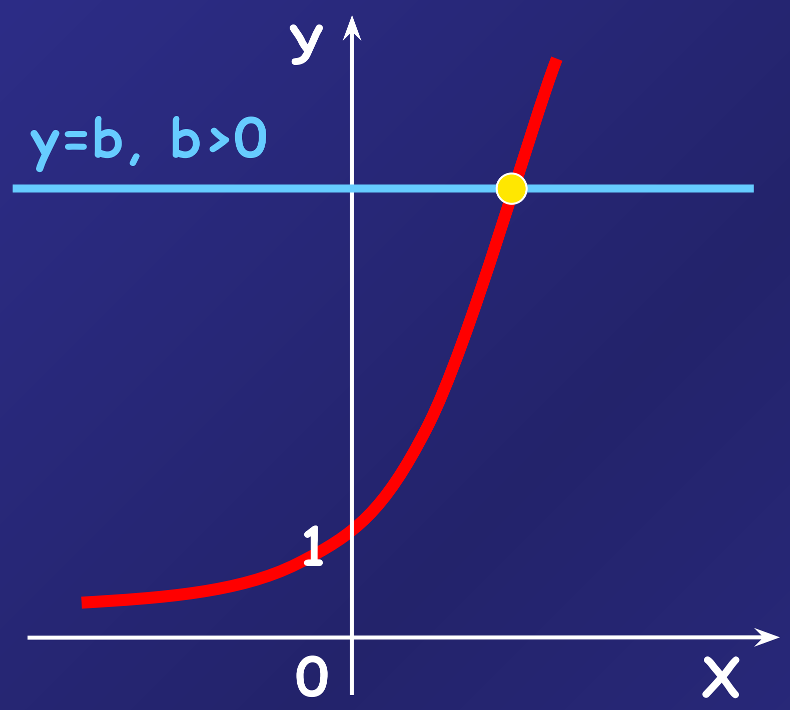



# Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

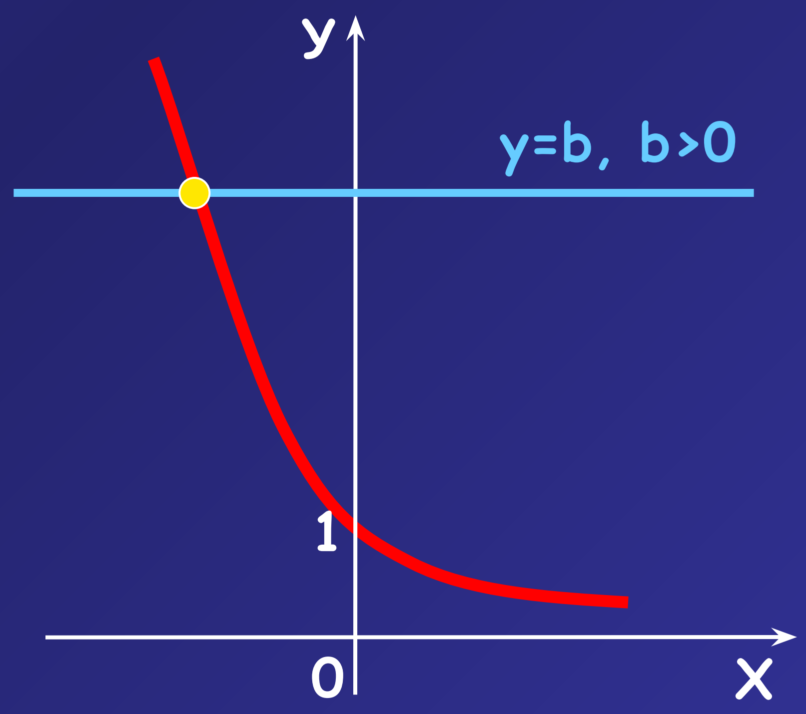



# Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$y=a^x$, $a>1$




$y=a^x$, $0<a<1$



# Вывод:

$b \leq 0$

Уравнение $a^x=b$ корней не имеет

$b > 0$

Уравнение $a^x=b$ имеет единственное решение $x=\log_a b$

# Пример:

1) $2^x = 8,$ $\quad 8 > 0,$ уравнение имеет единственное решение

$x = \log_2 8,$

$x = 3.$

2) $3^x = 5,$ $\quad 5 > 0,$ уравнение имеет единственное решение

$x = \log_3 5.$

3) $5^x = -25,$ $\quad -25 < 0,$ уравнение корней не имеет.

# Замечание:

**Во многих случаях решение показательных уравнений после надлежащих преобразований сводится к решению простейших показательных уравнений.**

**При решении показательных уравнений часто используется следующая теорема:**

**«Уравнение** $a^{f(x)} = a^{g(x)}, \ a > 0$ и $a \neq 1$ **равносильно уравнению** $f(x) = g(x)$ **».**

**В общем, виде справедлива теорема**

**«Уравнение** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ **равносильно совокупности**

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x)a > 0, \ a \neq 1, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

**».**

| | |
|---|---|
| ТИП | **Простейшие показательные уравнения.** |
| ПРИМЕР | $9^{x^2+4x-4,5}=3$ |
| Решение | $9^{x^2+4x-4,5}=3,$<br>$\left(3^2\right)^{x^2+4x-4,5}=3,$<br>$(3)^{2(x^2+4x-4,5)}=3,$<br>$2\left(x^2+4x-4,5\right)=1,$<br>$x^2+4x-4,5=0,5,$<br>$x^2+4x-5=0,$<br>$\left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1. \end{array}\right.$ |
| ОТВЕТ: | -5 ; 1. |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к уравнениям относительно функции одного аргумента.** |
| ПРИМЕР | $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$ |
| Решение | $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280,$<br>$2^{12x-1} - (2^2)^{6x-1} + (2^3)^{4x-1} - (2^4)^{3x-1} = 1280,$<br>$2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280,$<br>$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2 - 1) = 1280,$<br>$2^{12x-4} \cdot 5 = 1280,$<br>$2^{12x-4} = 256,$<br>$2^{12x-4} = 2^8,$<br>$12x - 4 = 8,$<br>$12x = 12,$<br>$x = 1.$ |
| ОТВЕТ: | 1. |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.** |
| ПРИМЕР | $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ |
| Решение | $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0,$<br>$3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{x^2-1-2} + 3 = 0,$<br>$3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$<br>$\left(3^{x^2-1}\right)^2 - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$<br>**Пусть** $t = 3^{x^2-1}, t > 0,$ **тогда**<br>$t^2 - 4t + 3 = 0,$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.** |
| ПРИМЕР | $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ |

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 3, \\ t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t = 1, \\ t > 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Вернемся
к переменной X

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 3, \\ 3^{x^2-1} = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 1, \\ x^2 - 1 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 = 2, \\ x^2 = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

ОТВЕТ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

| | |
|---|---|
| ТИП | **Однородные показательные уравнения первой и второй степени.** |
| ПРИМЕР 1 | $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$ |
| Решение | $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2},$<br>$2^{x^2-1}+2^{x^2+2}=3^{x^2-1}+3^{x^2},$<br>$2^{x^2-1}\left(1+2^3\right)=3^{x^2-1}(3+1),$<br>$2^{x^2-1}\cdot 9=3^{x^2-1}\cdot 4;\quad 3^{x^2-1}\cdot 9>0,$ **при** $x\in R$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Однородные показательные уравнения первой и второй степени.** |
| ПРИМЕР 1 | $$2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$$ |
| Решение | $$\frac{2^{x^2-1}\cdot 9}{3^{x^2-1}\cdot 9}=\frac{3^{x^2-1}\cdot 4}{3^{x^2-1}\cdot 9},$$ $$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\frac{4}{9},$$ $$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2},$$ $$x^2-1=2,$$ $$x^2=3,$$ $$x=\pm\sqrt{3}.$$ |

ОТВЕТ: $x=\pm\sqrt{3}$

| | |
|---|---|
| ТИП | **Однородные показательные уравнения первой и второй степени.** |
| ПРИМЕР 2 | $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$ |
| Решение | $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x},$<br>$3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}-5\cdot (2\cdot 3)^{x}=0,$<br>$\frac{3\cdot 2^{2x}}{3^{2x}}-\frac{5\cdot 2^{x}3^{x}}{3^{2x}}+\frac{2\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0;\ 3^{2x}>0,\ \text{при } x\in R$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Однородные показательные уравнения первой и второй степени.** |
| ПРИМЕР 2 | $$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$$ |
| Решение | $3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+2=0.$ **Пусть** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t, t>0,$ **тогда** |

$$3t^2-5t+2=0,$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3},\\ t=1,\end{array}\right.\\ t>0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=\frac{2}{3},\\ t>0,\end{cases}\\ \begin{cases}t=1,\\ t>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3},\\ t=1.\end{array}\right.$$

**Вернёмся к переменной х**

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=0.\end{array}\right.$$

ОТВЕТ: **0 ; 1**

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.** |
| ПРИМЕР 1 | $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$ |

Решение

$$5^x + 5^{1-x} - 6 = 0,$$

$$5^x + \frac{5}{5^x} - 6 = 0.$$

**Пусть** $5^x = t$, $t > 0$, **тогда**

$$t + \frac{5}{t} - 6 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0,$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 1, \\ t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t = 5, \\ t > 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5. \end{array}\right.$$

**Вернёмся к переменной x**

$$\left[\begin{array}{l} 5^x = 1, \\ 5^x = 5; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

ОТВЕТ: **0 ; 1.**

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.** |
| ПРИМЕР 2 | $2-\frac{1}{3^x-1}-\frac{5}{3^x+3}=0.$ |
| Решение | $2-\frac{1}{3^x-1}-\frac{5}{3^x+3}=0.$ **Пусть** $3^x=t, t>0,$ **тогда**<br>$2-\frac{1}{t-1}-\frac{5}{t+3}=0,$<br>$\frac{2(t-1)(t+3)-(t+3)-5(t-1)}{(t-1)(t+3)}=0,$<br>$\frac{t^2-t-2}{(t-1)(t+3)}=0,$<br>$\frac{(t+1)(t-2)}{(t-1)(t+3)}=0,$<br>$\begin{cases}(t+1)(t-2)=0,\\(t-1)(t+3)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-1,\\t=2,\end{array}\right.\\t\neq 1, t\neq -3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=-1,\\t=2.\end{array}\right.$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.** |
| ПРИМЕР **2** | $2-\frac{1}{3^x-1}-\frac{5}{3^x+3}=0.$ |
| Решение | Т.к. $t>0$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t=-1,\\ t=2,\end{array}\right. \\ t>0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=-1,\\ t>0,\end{cases}\\ \begin{cases}t=2,\\ t>0;\end{cases}\end{array}\right.$ $t=2.$<br>**Вернёмся к переменной x**<br>$3^x=2,$<br>$x=\log_3 2.$ |
| ОТВЕТ**:** | $\log_3 2$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР 1 | $$2^x + 5^x = 7^x$$ |
| Решение | $$2^x + 5^x = 7^x,$$ $$\frac{2^x}{7^x} + \frac{5^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x},\ 7^x > 0, \text{ при } x \in R$$ $$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$ |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР 1 | $2^x + 5^x = 7^x$ |
| Решение | **Введём функции** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **и** $g(x) = 1$. <br> **Функция** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **убывает на R, как сумма убывающих на R. Функция** $g(x) = 1$ **постоянна на R.** <br> **Горизонтальная прямая** $g(x) = 1$ **может пересечь график функции** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **не более чем в одной точке.** <br> **Следовательно, уравнение** $2^x + 5^x = 7^x$ **имеет не более одного корня. Корнем уравнения является x=1.** <br> **Проверим это.** $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1, \quad 1 = 1.$ |

ОТВЕТ: 1

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР **2** | $$3^{x-2}=\frac{9}{x}$$ |
| Решение | $$3^{x-2}=\frac{9}{x}.$$ **Легко определить и проверить, что х=3 - корень данного уравнения.** $$x=3,\quad 3^{3-2}=\frac{9}{3},\quad 3=3.$$ **Покажем, что других корней уравнение иметь не может.** |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР **2** | $$3^{x-2}=\frac{9}{x}$$ |
| Решение | **Справедливы следующие утверждения:** |

**1**

**Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве *I*, то уравнение $f(x)=b$ не может иметь на *I* более одного корня.**

**2**

**Если функция $f(x)$ возрастает на *I*, а функция $g(x)$ убывает на *I*, то уравнение $f(x)=g(x)$ не может иметь на *I* более одного корня.**

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР 2 | $3^{x-2} = \frac{9}{x}$ |
| Решение | **Введём функции** $f(x) = 3^{x-2}$ **и** $g(x) = \frac{9}{x}$. <br> **Показательная функция** $f(x) = 3^{x-2}$ ( $a = 3, 3 > 1, a > 1$ ) **возрастает на *R*.** <br> **Функция** $g(x) = \frac{9}{x}$ **(обратная пропорциональность) убывает на каждом из промежутков** $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$. <br> **Таким образом, на** $(-\infty;0)$ **и на** $(0;\infty)$ **уравнение имеет не более одного корня, т. е.** $x = 3$ **- единственный корень данного уравнения.** |
| ОТВЕТ: | 3 |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР **3** | $$\left(x-3\right)^{x^2+x}=\left(x-3\right)^{7x-5}$$ |

**Решение**

**Прежде всего, заметим, что функция $y=f(x)^{g(x)}$ не является показательной функцией.**

**Существуют две точки зрения, оценивающие область определения данной функции.**

**1**

$$f(x)>0$$

**2**

$$a)\ f(x)>0;$$

$$b)\left[\begin{array}{l} f(x)<0,\ \text{если}\ g(x)\in Z,\\ f(x)=0,\ \text{если}\ g(x)>0. \end{array}\right.$$

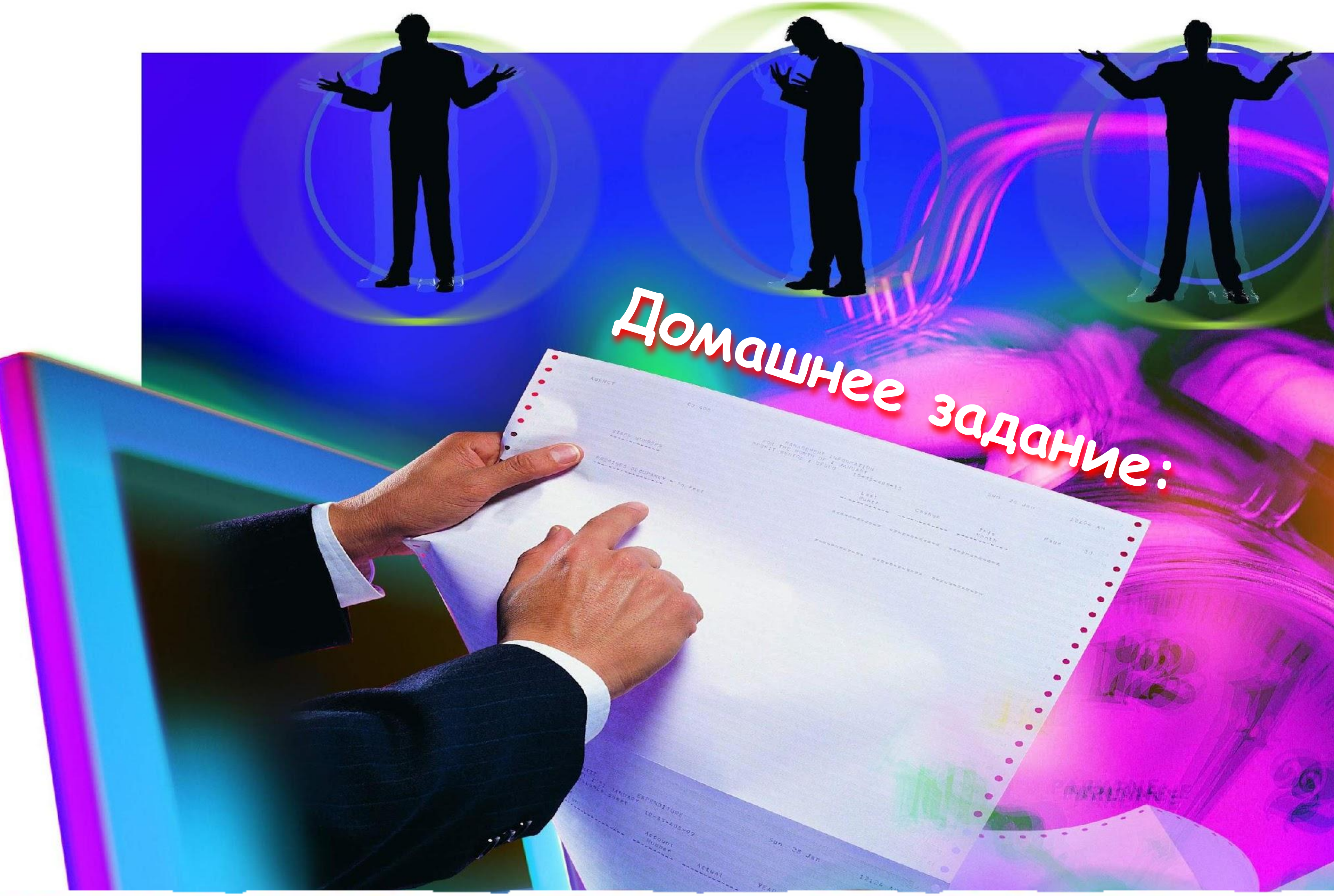
| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР 3 | $$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$$ |
| Решение | **Решим данное уравнение, придерживаясь второй точки зрения.**<br><br>**Вначале проверим, какие из решений совокупности**<br><br>$\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ x-3=-1, \\ x-3=1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=2, \\ x=4; \end{array}\right.$<br><br>**являются корнями данного уравнения.**<br><br>**Проверка.** $x=2$ $(2-3)^{4+2}=(2-3)^{14-5},$<br>$(-1)^6=(-1)^9,$<br>$1=-1.$<br><br>**Проверка показала, что x=2 не является корнем уравнения.** |

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР **3** | $$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$$ |
| Решение | $x=3$ $\quad (3-3)^{9+3}=(3-3)^{21-5},$<br>$0^{12}=0^{16},$<br>$0=0.$<br>**Проверка показала, что x=3 является корнем уравнения.**<br>$x=4$ $\quad (4-3)^{16+4}=(4-3)^{28-5},$<br>$1^{20}=1^{23},$<br>$1=1.$<br>**Проверка показала, что x=4 является корнем уравнения.** |

| | |
|---|---|
| ТИП | Показательные нестандартные уравнения. |
| ПРИМЕР 3 | $(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$ |
| Решение | Теперь установим, какие из корней уравнения $x^2+x=7x-5$ удовлетворяют исходному уравнению.<br>$x^2+x=7x-5,$<br>$x^2-6x+5=0,$<br>$\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=1. \end{array}\right.$<br>Проверка. $x=1$ $(1-3)^{1+1}=(1-3)^{7-5}$<br>$(-2)^2=(-2)^2.$ |

Проверка показала, что x=1 является корнем уравнения.

| | |
|---|---|
| ТИП | **Показательные нестандартные уравнения.** |
| ПРИМЕР **3** | $(x-3)^{x^2+x} = (x-3)^{7x-5}$ |
| Решение | $x = 5$<br>$(5-3)^{25+5} = (5-3)^{35-5},$<br>$2^{30} = 2^{30}.$<br>**Проверка показала, что x=5 является корнем уравнения.**<br>**Замечание:** **если придерживаться первой точки зрения, то корни x=1 и x=3 следует исключить.** |
| ОТВЕТ**:** | **5 ; 4 ; 3 ; 1** |




ВНИМАНИЕ! ЗАПИСАТЬ! ВЫПОЛНИТЬ!

Выполнил:

Бобров Р.С.

РУКОВОДИТЕЛИ:

КАЛУГИНА Е.Е.

НЕСТЕРЕНКО В.В.