НАУЧНАЯ РАБОТА

Алгебра- часть математики посвещенная изучению алгебраических операции

Санивская Вероника 10-А

Исторический очерк

- А. предшествовала арифметика, операциями которой были сложение, вычитание, умножение и деление чисел, сначала только целых, а затем и дробных. Вначале от личие А. от арифметики заключалось в том, что в А. вводилась неизвестная вели чина, действия над которой, диктуемые условиями задачи, приводили к уравнению, из которого находилась эта неизвестная величина. Элемент такой трактовки ариф метич. задач содержится в др.-егип. папирусе Ахмеса (см. в ст. Папирусы математи ческие), где искомая величина обозначается соответствующим иероглифом. Древ ние египтяне решали и достаточно сложные задачи (связанные, напр., с арифме тич. и геометрич. прогрессиями). Как формулировка задач, так и решения давались в словесной форме и только в виде конкретных численных примеров.
- В нач. 20 в. были расшифрованы клинописные математические тексты и другой древнейшей культуры – вавилонской. Вавилоняне уже за 4000 лет до наших дней с помощью спец. таблиц умели решать разнообразные задачи; некоторые из них равносильны решению квадратных уравнений и даже одного вида уравнений 3-й степени.

- Логич. доказательства в математику впервые ввели др.-греч. геометры. В рамках
геометрич. метода мн. математич. вопросы переводились на язык геометрии: вели
чины трактовались как длины, произведение двух величин – как площадь прямо
угольника и т. д. В совр. математич. языке сохранилось, напр., назв. «квадрат» для
произведения величины на самоё себя. К другой, негеометрич. линии развития др.-
греч. математики относится трактат [Диофанта]() «Арифметика», в котором он доволь
но свободно оперирует с уравнениями 1-й, 2-й и более высоких степеней. В этом
трактате можно найти попытки употребления буквенной символики и отрицатель
ных чисел. На конкретных примерах предвосхищаются методы решения в рацио
нальных числах уравнений 3-й степени с двумя неизвестными.

- Достижения др.-греч. науки развивались учёными ср.-век. Востока, в т. ч. аль-Хо
резми и Бируни. Учёные Востока передали Европе известную им математику в сво
ей оригинальной переработке, причём особенно много они занимались именно А.
Термин «А.» происходит от названия сочинения аль-Хорезми «Аль-джебр аль-му
каба-ла», означающего один из приёмов преобразования уравнений. Со времени
аль-Хорезми А. можно рассматривать как отд. раздел математики.

- Математики ср.-век. Востока все действия излагали словами. Дальнейший прогресс А. стал возможным только после появления удобных символов для обозначения действий (см. Математические знаки). Этот процесс шёл очень медленно, и только в конце 15 в. появились принятые теперь знаки + и –. Затем были введены и получили всеобщее признание знаки, обозначающие степень, корень, а также скобки. К сер. 17 в. полностью сложился аппарат символов совр. А. – употребление букв для обозначения не только искомого неизвестного, но и всех вообще входящих в задачу величин. До этого в А. и арифметике как бы не было общих правил и доказательств; рассматривались исключительно численные примеры, почти невозможно было высказать к.-л. общие суждения. Даже элементарные учебники того времени давали десятки частных правил вместо одного общего. Ф. Виет (1591) первым начал писать задачи в общем виде, обозначая неизвестные величины гласными A,E,I,…,A,E,I,…, а известные – согласными B,C,D,….B,C,D,…. Эти буквы он соединял имевшимися в то время знаками математич. операций, т. о. впервые возникли буквенные формулы, характерные для совр. А. Начиная с Р. Декарта для неизвестных употребляют, как правило, последние буквы лат. алфавита x,y,zx,y,z.

- Введение символич. обозначений и операций над буквами, заменяющими конкретные числа, имело исключительно важное значение. Без этого языка формул было бы немыслимо бурное развитие математики начиная с 17 в., создание математич. анализа, математич. выражения законов механики и физики и пр.

- Исторически первой задачей А. было решение алгебраич. уравнений, т. е. нахождение их корней. Важную роль в решении уравнений сыграло появление отрицательных чисел. Они были введены инд. математиками в 10 в., но учё- ные ср.-век. Востока их не использовали. С отрицательными числами свыкались постепенно; этому способствовали коммерч. вычисления, в которых отрицательные числа имеют наглядный смысл, напр. убытка, недостатка, долга. Окончательно отрицательные числа вошли в употребление только в 17 в., после того как Р. Декарт предложил их наглядное геометрич. представление.

- При решении алгебраических уравнений возникла потребность расширения числовой области. Так, при решении уравнений 2-й степени появляются иррациональные числа (см. также Алгебраическое число). С извлечением корней сталкивались ещё др.-греч. и ср.-азиат. математики, которые предложили остроумные способы их приближённого вычисления. Взгляд на иррациональность как на число установился значительно позже. Введение комплексных чисел относится к 18 в.

- Любое уравнение nn-й степени имеет nn корней, вообще говоря комплексных, причём это верно и для уравнений с комплексными коэффициентами. Эта важная теорема, носящая название основной теоремы А., была впервые сформулирована в 17 в., её доказательство было дано в кон. 18 в. К. Гауссом. Все известные доказательства должны были в той или иной форме использовать непрерывность; т. о., доказательство основной теоремы А. выходило за пределы А., демонстрируя неразрывность математики в целом.

- Многие теоретич. и практич. вопросы приводят не к одному уравнению, а к системам уравнений с неск. неизвестными. Особенно важен случай систем линейных уравнений. К этим простейшим системам сводятся системы уравнений, встречающихся на практике. Решение систем линейных уравнений составляет существенную часть при численном решении разнообразных прикладных задач. Г. Лейбниц (1693) обратил внимание на то, что при изучении систем линейных уравнений важную роль играет матрица, составленная из их коэффициентов. Впоследствии матрицы стали предметом самостоят. изучения в А., т. к. их роль не исчерпывается приложениями к теории систем линейных уравнений.

- Появление аналитической геометрии тесно связано с А. Если у древних греков чисто алгебраич. задачи облекались в геометрич. форму, то теперь алгебраич. средства выражения оказались настолько удобными и наглядными, что геометрич. задачи переводились на язык алгебраич. формул.

- В кон. 17 – нач. 18 вв. был создан и быстро распространился анализ бесконечно малых, сыгравший важнейшую роль в развитии математики и её приложений, что во многом было подготовлено развитием А. В частности, буквенные выражения и действия над ними способствовали зарождению ещё в 16–17 вв. взгляда на математич. величины как на переменные, что характерно для анализа бесконечно малых, где непрерывному изменению одной величины обычно соответствует непрерывное изменение другой (функции от этой переменной).

- А. и математич. анализ развивались в 17–18 вв. в тесной связи. В А. проникали понятия и методы анализа, в этом направлении её обогатил И. Ньютон. С др. стороны, А. дала анализу развитый набор формул и преобразований, сыгравших большую роль в начальный период развития интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Крупным событием в А. этого периода было появление учебника Л. Эйлера. Отличие А. от анализа в 18–19 вв. характеризуется тем, что А. имеет своим осн. предметом дискретное, конечное. Осн. операции, напр. сложение, производятся в А. конечное число раз. Эту особенность А. подчеркнул в 1-й пол. 19 в. Н. И. Лобачевский, назвав одну из своих книг «Алгебра, или Вычисление конечных» (1834).

- К 18 в. А. сложилась примерно в том объёме, который до наших дней преподаётся в средней школе. Эта А. охватывает действия сложения, умножения с обратными им действиями вычитания и деления, а также возведение в степень и обратное ему извлечение корня. Эти действия проводятся над числами или буквами, которые могут обозначать положительные или отрицательные, рациональные или иррациональные числа. На рус. языке изложение элементарной А. в виде, сложившемся к нач. 18 в., было впервые дано в «Арифметике...» Л. Ф. Магницкого.

- А. 18–19 вв. есть прежде всего А. многочленов. Предмет А., таким образом, оказывается значительно уже, чем предмет анализа. Вместе с тем А. и математич. анализ продолжают иметь много точек соприкосновения, и разграничение между ними не является жёстким. Во многих случаях изучение многочленов как довольно простых функций помогало развитию общей теории функций. Через всю историю математики проходит тенденция сведения изучения более сложных функций к изучению многочленов или рядов. С др. стороны, А. начинает всё больше пользоваться идеями непрерывности и бесконечности, характерными для математич. анализа.

Современное состояние алгебры

- Для совр. А. характерно то, что в центре внимания оказываются свойства операций, а не объектов, над которыми производятся эти операции. Простой пример даёт возможность проследить, как это происходит. Известна формула $(a+b)2=a2+2ab+b2(a+b)2=a2+2ab+b2$. Её выводом является цепочка равенств:
- $(a+b)2=(a+b)(a+b)==(a+b)a+(a+b)b=(a2+ba)+(ab+b2)==a2+(ba+ab)+b2=a2+2ab+b2.$
- $(a+b)2=(a+b)(a+b)==(a+b)a+(a+b)b=(a2+ba)+(ab+b2)==a2+(ba+ab)+b2=a2+2ab+b2.$
- Здесь дважды использован закон дистрибутивности, закон ассоциативности при сложении позволяет перегруппировать слагаемые, наконец, используется закон коммутативности $ba=abba=ab$. Что представляют собой объекты, обозначенные буквами aa и bb, не имеет значения; важно, чтобы они принадлежали множеству, в котором определены две операции, сложение и умножение, удовлетворяющие перечисленным требованиям, касающимся свойств операций, а не объектов. Формула останется верной, если aa и bb означают векторы, в этом случае сложение в левой части – это сложение векторов, а в правой части формулы – сложение чисел; под умножением понимается скалярное умножение векторов. В этой формуле вместо aa и bb можно подставить также коммутирующие матрицы (т. е. такие, что $ab=baab=ba$, что для матриц может не выполняться), операторы дифференцирования по двум независимым переменным и др.

Предмет алгебры

- Предметом изучения современной алгебры являются множества с заданными на них алгебраическими операциями. При этом если между такими множествами можно установить изоморфизм (взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее операции), то множества считаются одинаковыми, и поэтому природа множеств безразлична. Следовательно, объектом изучения алгебры являются сами алгебраические операции.
- Примером изучаемого в рамках алгебры множества с операцией является группа: множество с одной ассоциативной бинарной операцией, содержащее единицу и для каждого элемента — обратный элемент. Понятие группы появилось в теории Галуа в 19 веке, в которой группы сопоставлялись уравнениям, а условием разрешимости уравнения в радикалах оказалась разрешимость соответствующей группы. В дальнейшем были изучены такие обобщения групп, как полугруппы, квазигруппы и лупы.
- В рамках алгебры изучаются такие алгебраические множества с двумя бинарными операциями как кольца и поля. В этих структурах одна из операций называется сложением (она коммутативна и каждый элемент имеет обратный), а другая операция — умножением (обычно, она предполагается ассоциативной, хотя могут изучаться и неассоциативные кольца).
- В рамках линейной алгебры изучается линейное пространство с операцией сложения, а также с умножением на элементы основного поля (скаляры). Модуль — обобщение линейного пространства, в нем вместо поля скаляров элементы модуля умножаются на элементы кольца, которое берется вместо основного поля.

Основные разделы алгебры :
а) Алгебраическое выражение

Алгебраические выражения

Алгебраическое выражение – выражение , состоящее из чисел и букв, соединенных знаками действий.

Целые алгебраические выражения: $m - 5n$; $8x$ y; $6ab + 2$;

Дробные алгебраические выражения:

$$\frac{a^2 + a\text{в}}{a\text{в} + \text{в}^2} \qquad \frac{a^2 - 6a\text{в} + 9\text{в}^2}{a^2 - 9\text{в}^2}$$

составленное из букв и цифр, соединённых знаками действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня (показатели степени и корня должны быть постоянными числами). А. в. называется рациональным относительно некоторых букв, в него входящих, если оно не содержит их под знаком извлечения корня, например

рационально относительно a, b и c. А. в. называется целым относительно некоторых букв, если оно не содержит деления на выражения, содержащие эти буквы, например $3a/c + bc2 - 3ac/4$ является целым относительно a и b. Если некоторые из букв (или все) считать переменными, то А. в. есть Алгебраическая функция.

Алгебраическое выражение пример :

Целое уравнение – это уравнение левая и правая часть, которого является целым выражением

Приведем примеры целых уравнений:

$$2\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)=6x-\left(x+7\right)$$

$$\frac{x^4-1}{4}-\frac{x^2+1}{2}=3x^2$$

Алгебраическое выражение пример:

Алгебраические дроби

Алгебраическая дробь - дробь , числитель и знаменатель которой алгебраические выражения.

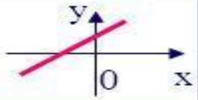
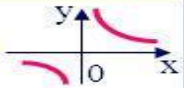
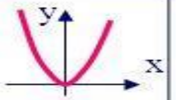
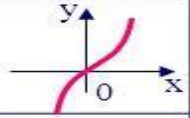
Примеры:

$$\frac{a+в}{a-в};\ \frac{2aв}{a^2};\ \frac{(a+в)^2}{a^2+в^2};\ \frac{a^2-в^2}{(a+в)^2}$$

$$\frac{x^2-4y^2}{xy}\cdot\frac{3y}{x^2-2xy}$$

б) Функции и их графики

Функции и их графики

Вид функции	Название функции	Название графика	Свойства
$y = kx + в$	*линейная*	*прямая* 	+
$y = \frac{k}{x}$	*Обратная пропорциональность*	*гипербола* 	+
$y = a\,x^2 + вx + c$	*квадратичная*	*парабола* 	+
$y = x^3$	*кубическая*	*кубическая парабола* 	+
$y = \sqrt{x}$	————	*ветвь параболы* 	+

Понятие функции

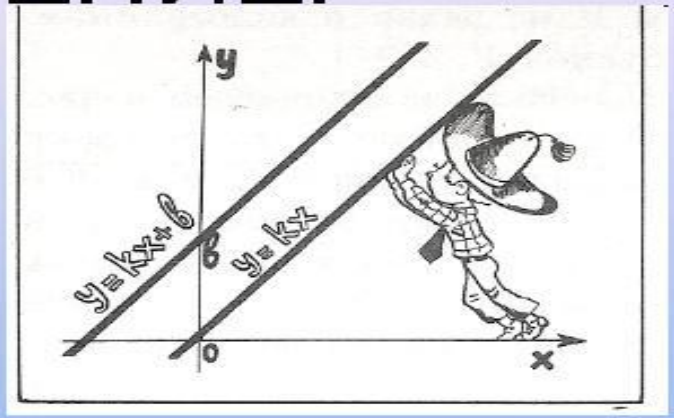
- Зависимость одной переменной y от другой x, при которой каждому значению переменной x из определенного множества D соответствует единственное значение переменной y, называется функцией.
- Общий вид функции: $y = f(x)$,
- где x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная (функция).
- Область определения функции $D(f)$- множество, на котором задаётся функция. Другими словами: множество значений, которые может принимать аргумент.
- Область значений функции $E(f)$- множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция.
- График функции – множество точек на координатной плоскости, координатами которых являются пары чисел $(x; y)$, где x – значение аргумента, y – соответствующее ему значение функции.
- Нули функции – значения аргумента, при которых функция равна 0

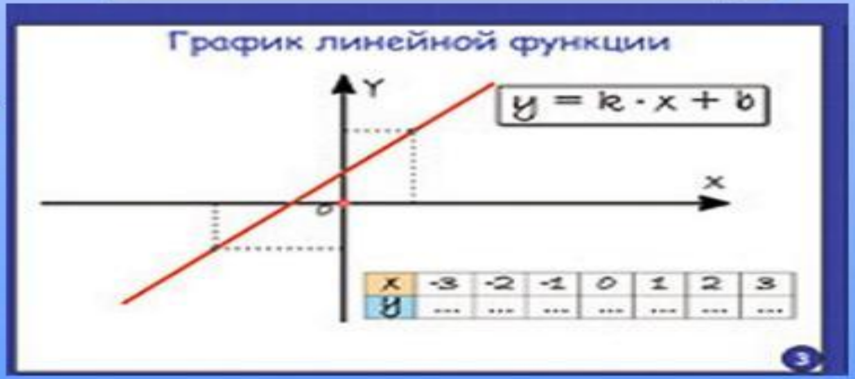
Виды функций и их графики линейная функция и её графики

Линейная функция её график.

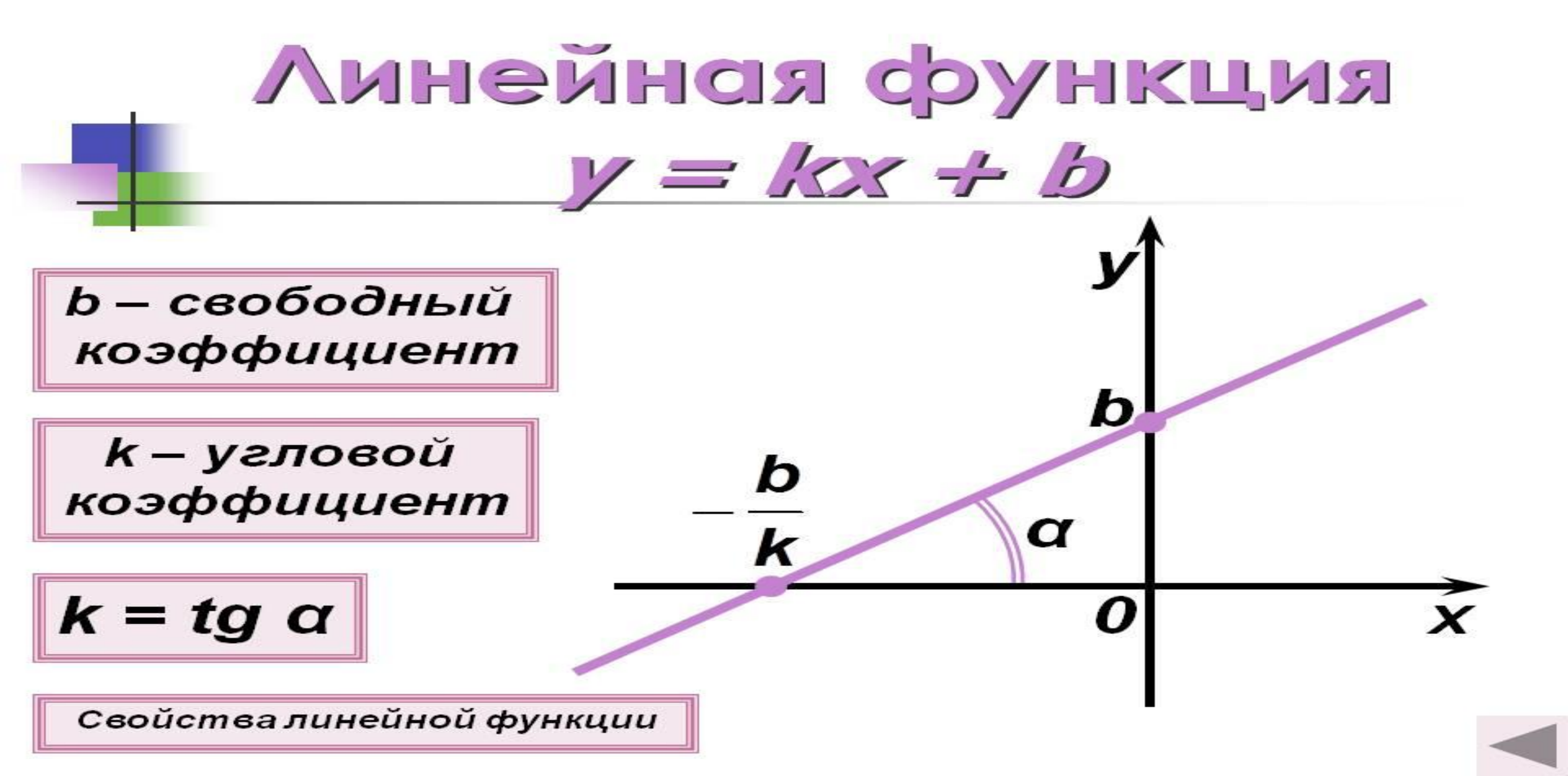
ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

- Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида y= kx+b, где x-независимая переменная, k и b-некоторые числа.
- Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. При b=0 формула y=kx+b принимает вид y= kx .K называют угловым коэффициентом прямой.

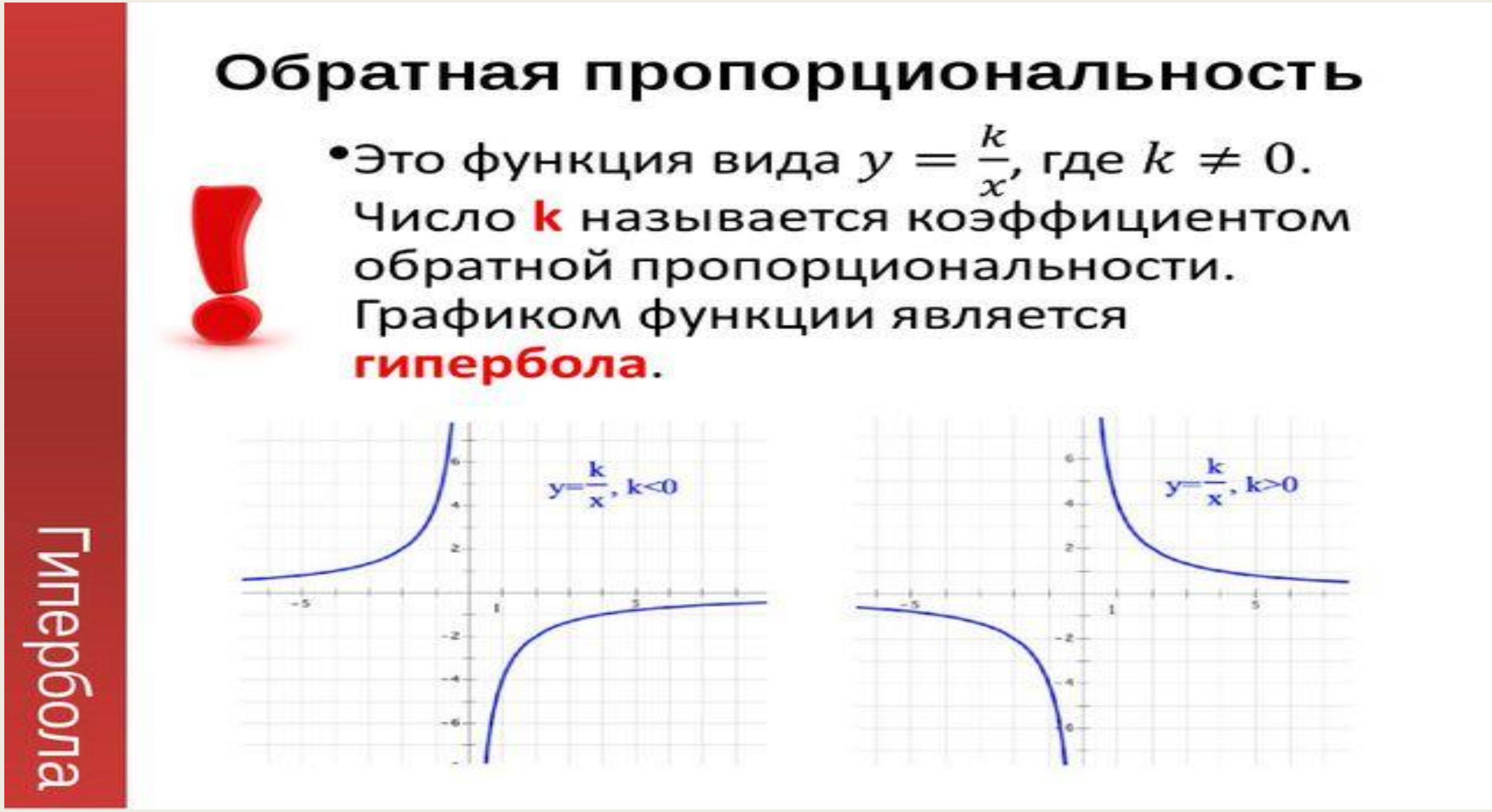




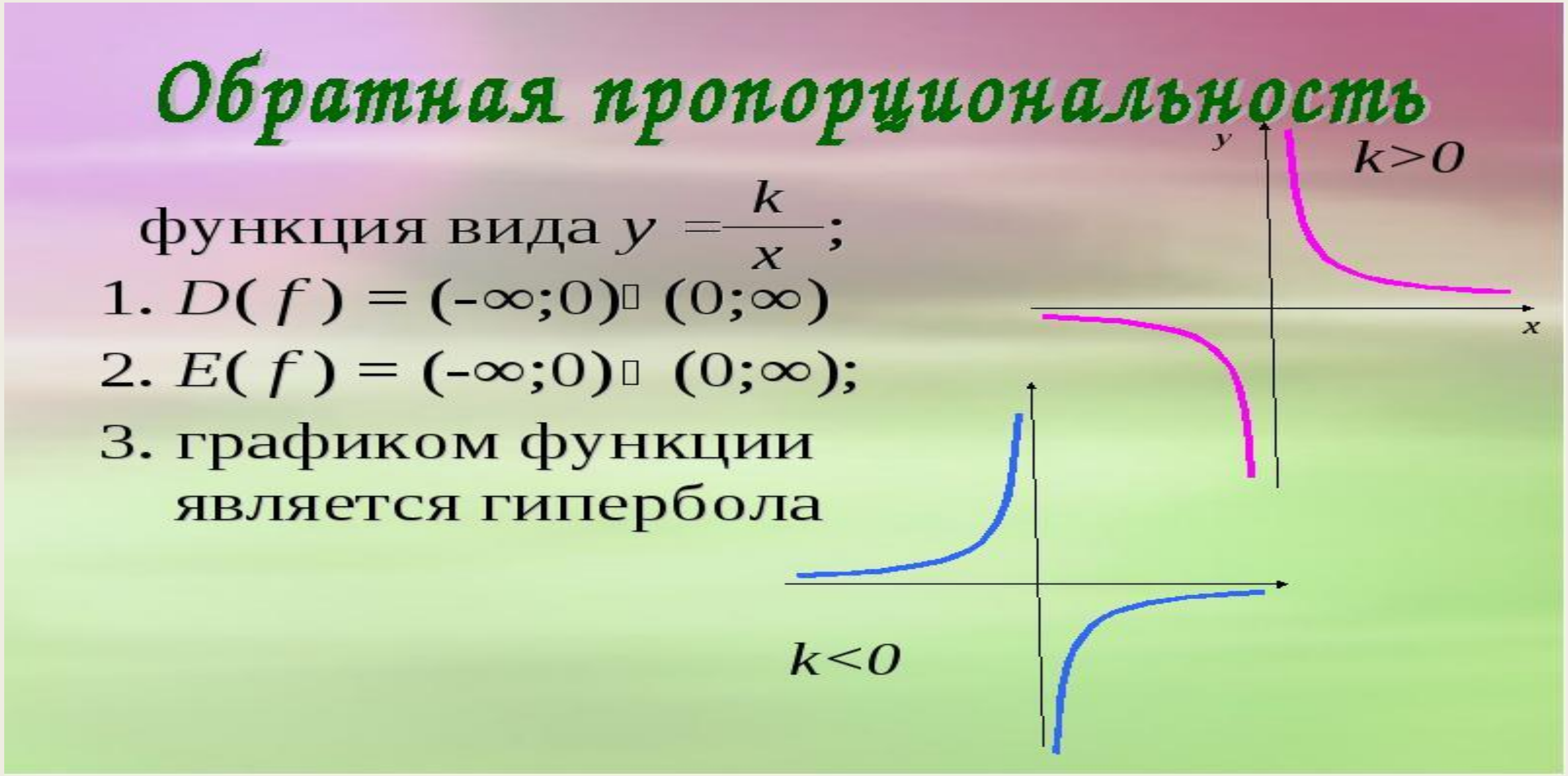
Виды функций и их графики линейная функция и её графики



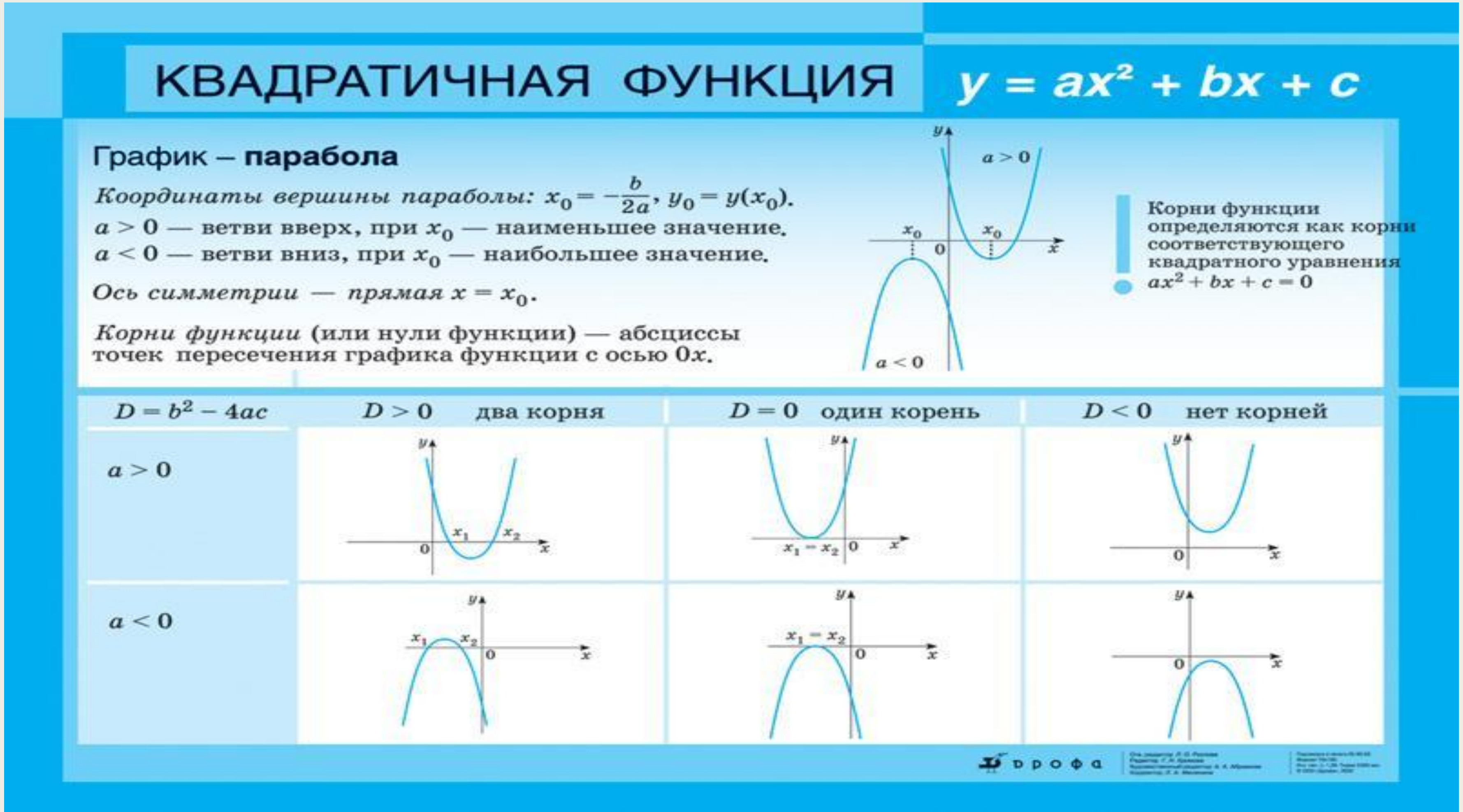
Виды функций и их графики обратная пропорциональность



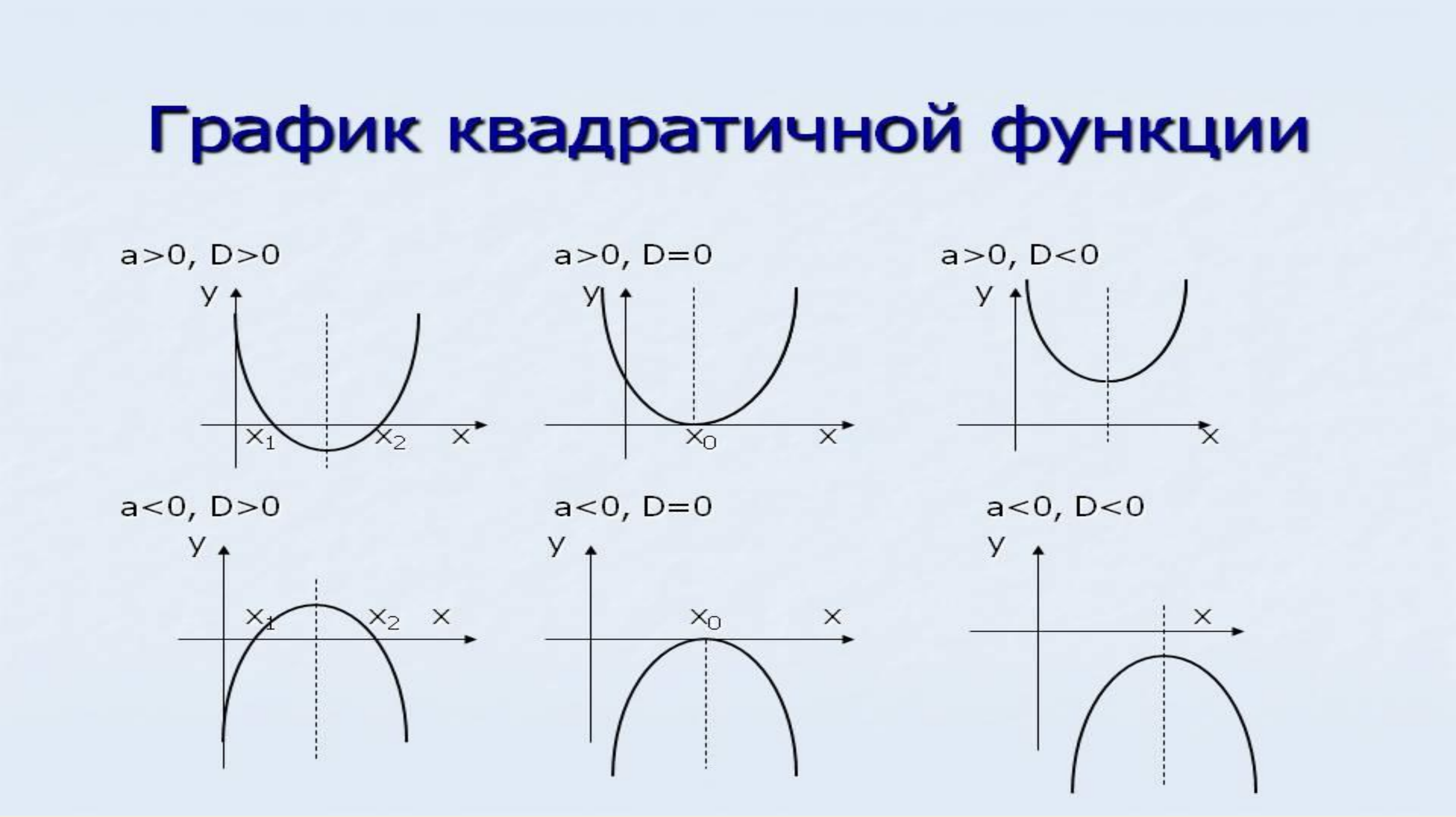
Виды функций и их графики обратная пропорциональность



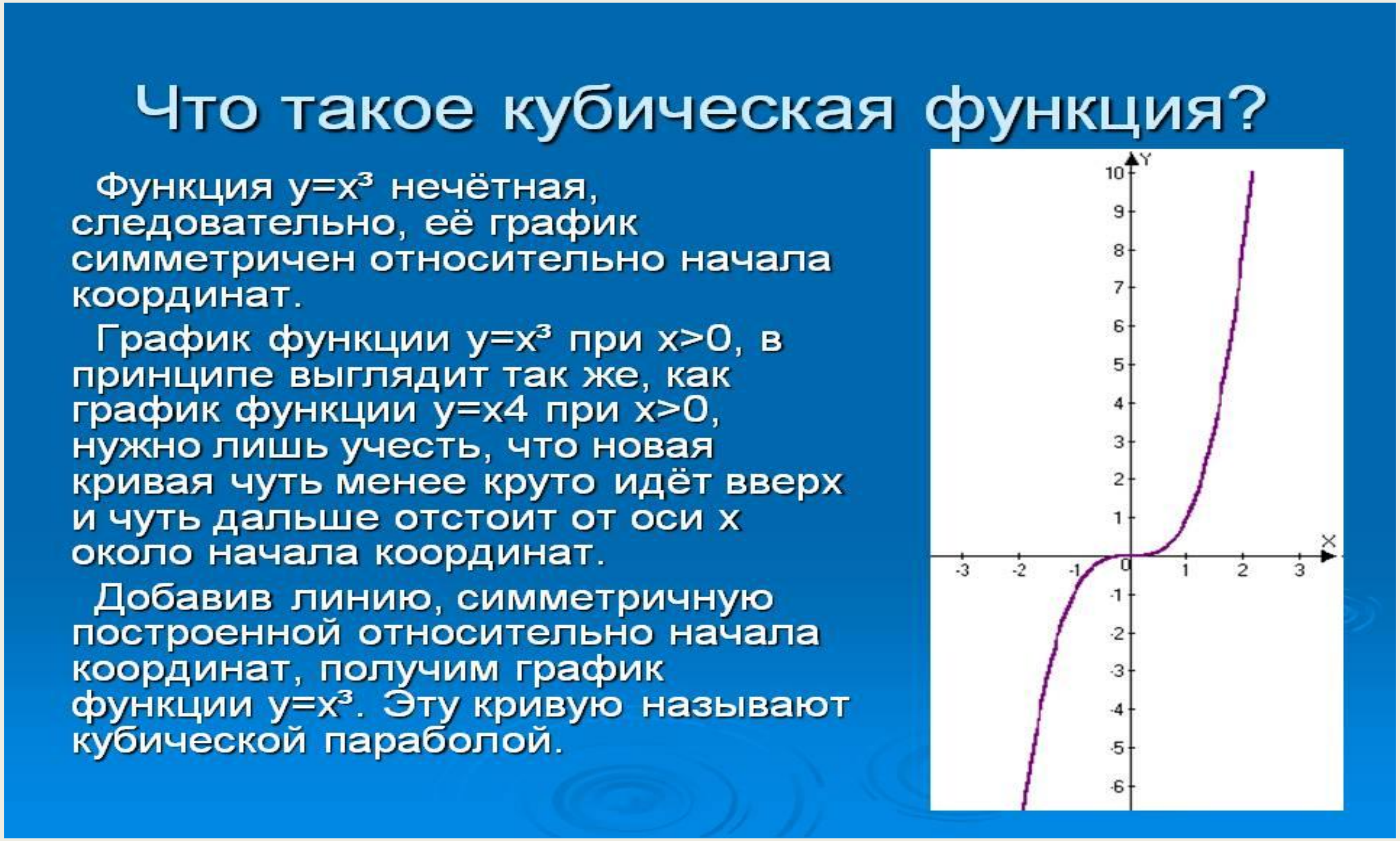
Виды функций и их графики квадратичная



Виды функций и их графики квадратичная



Виды функций и их графики кубическая



Виды функций и их графики кубическая

в) уравнение и системы уравнения

Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax=b$,
где x - переменная, a и b – числа.

Решение линейного уравнения

- Если $a \neq 0$, то $x = b/a$ –единственный корень. $-6x=3,6$ $x=3,6:(-6)$ $x=-0,6$
- Если $a=0$, то корней нет. $0x=12$
- Если $a=0$ и $b=0$, то корнем является любое число. $0x=0$

Уравнение и системы уравнения линейное уравнение

Примеры решения линейных уравнений

$3(x+2)+x=6+4x$	$4(x+7)=3-x$	$2x+5=2(x+6)$
$3x+6+x=6+4x$	$4x+28=3-x$	$2x+5=2x+12$
$3x+x-4x=6-6$	$4x+x=3-28$	$2x-2x=12-5$
$0x=0$	$5x=-25$	$0x=7$
<u>x = любое число</u>	<u>$x=-5$</u>	<u>нет решения</u>

$18x+9x=0+3x$ $x=0$

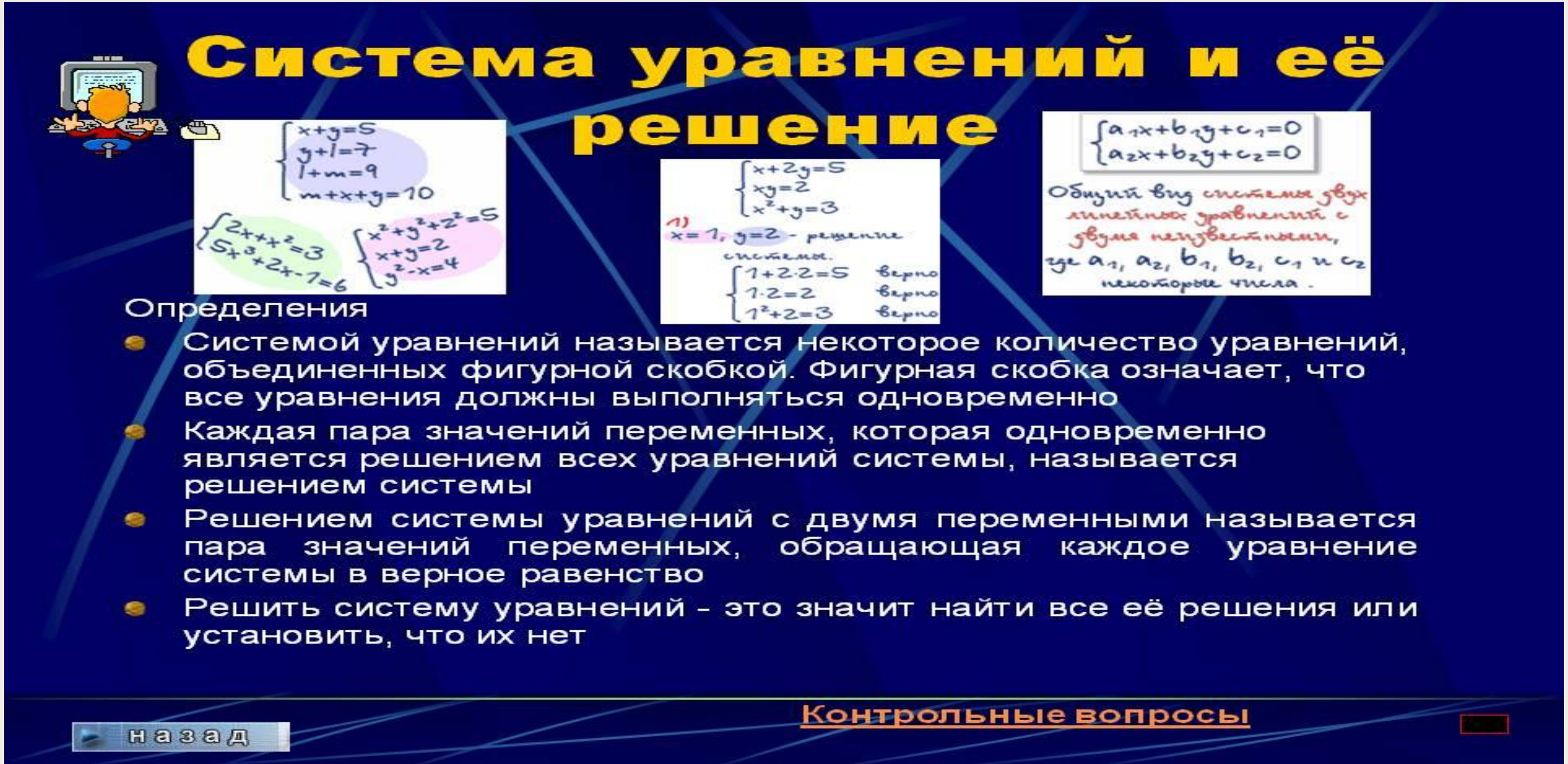
$18x+9x-3x=0$

$24x=0$

$x=0:24$

<u>$x=0$</u>

Уравнение и системы уравнения
линейное уравнение



г)квадратное уравнение

1 2 3 4

Квадратные уравнения

Формула корней квадратного уравнения

Дискриминант

$$D = b^2 - 4ac$$

1) D > 0 : два различных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

2) D = 0 : два равных корня

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

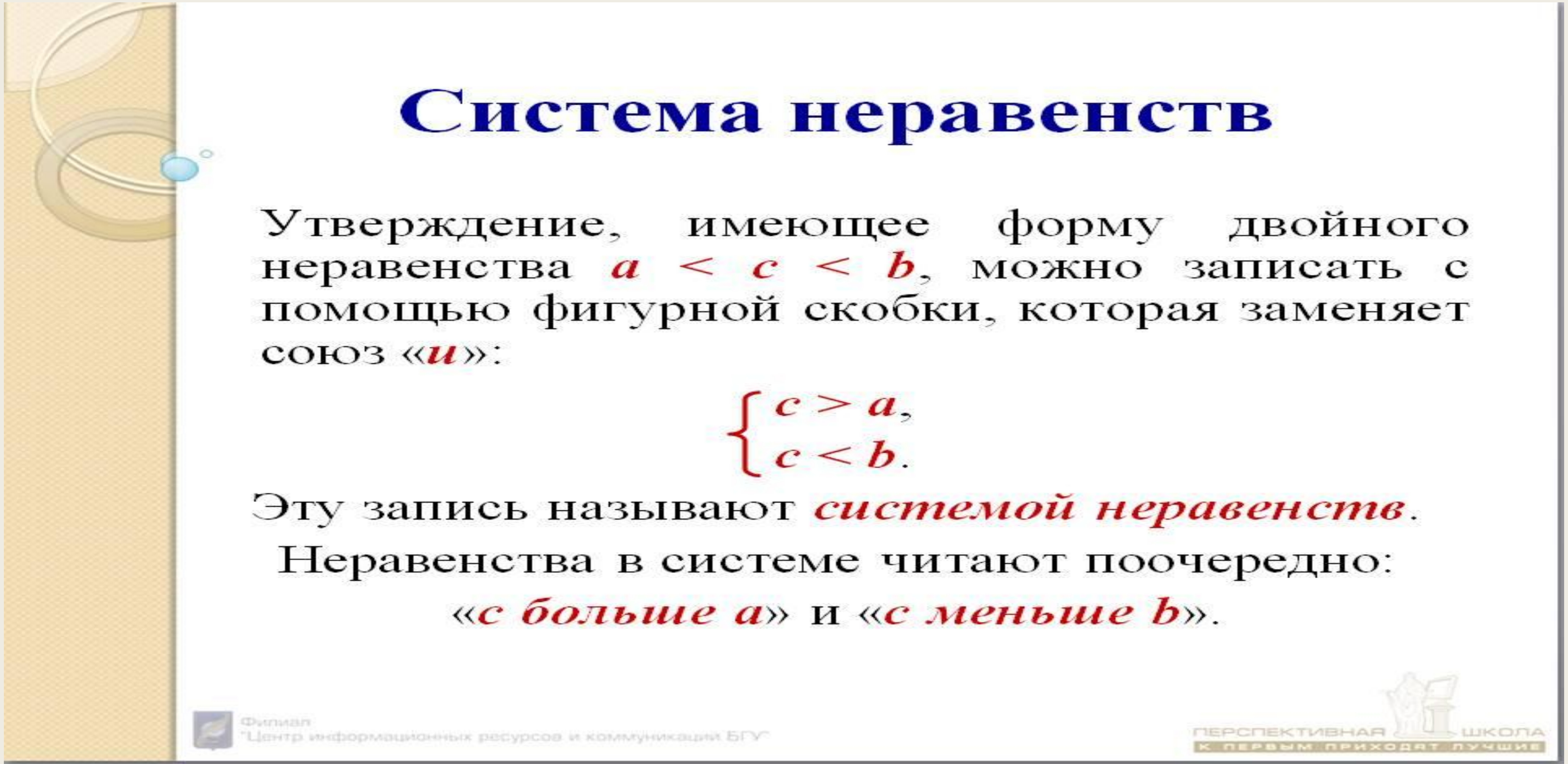
3) D < 0 : корней нет

квадратное уравнение

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

Неполное		Полное
$c=0,\ b\neq 0$	$b=0,\ c\neq 0$	$b\neq 0,\ c\neq 0$
$ax^2+bx=0$ *выносим x за скобку*	$ax^2+c=0$ если $c<0 \Rightarrow$ два противоположных корня если $c>0 \Rightarrow$ корней нет	$ax^2+bx+c=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=\sqrt{b^2-4ac}$
Пример $x^2-3x=0$ $x(x-3)=0$ $x_1=0,\ x_2=3$ *один из корней всегда ноль*	*Пример* 1. $x^2-6=0$ $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$ $x_{1,2}=\pm\sqrt{6}$ 2. $x^2+6=0$ $x^2=-6$ *корней нет*	*Пример* 1. $x^2-5x+6=0$ $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}$ $x_1=3,\ x_2=2$ *два корня* 2. $x^2-5x+7=0$ $D=5^2-7\cdot 4=-3<0$ $\Rightarrow$ *корней нет* 3. $x^2-10x+25=0$ $D=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{0}}{2}$ $x=5$ - *один корень*

д) неравенство и системы неравенства



Неравенство и системы неравенства

Решаем систему неравенств.

Решить систему неравенств – найти значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

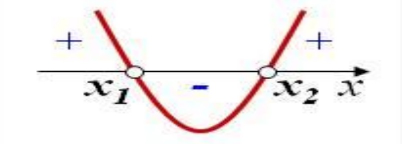
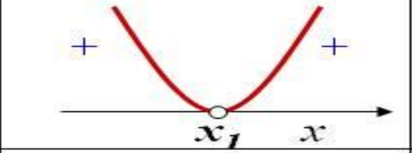
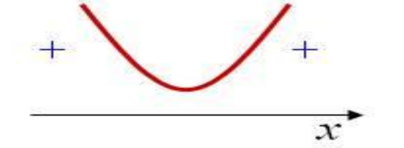
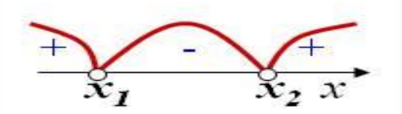
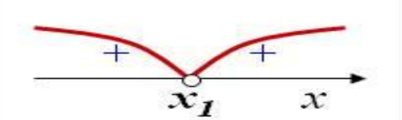
$$\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6 \end{cases}$$

Ответ: $3{,}5 < x < 6$

е) решение строгих квадратных неравенств

Решение строгих квадратных неравенств вида

$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c < 0$

	$D > 0,\ a > 0$	$D = 0,\ a > 0$	$D < 0,\ a > 0$
Графический способ решения			
Решение способом интервалов			
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	x – любое число
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Нет решений	Нет решений

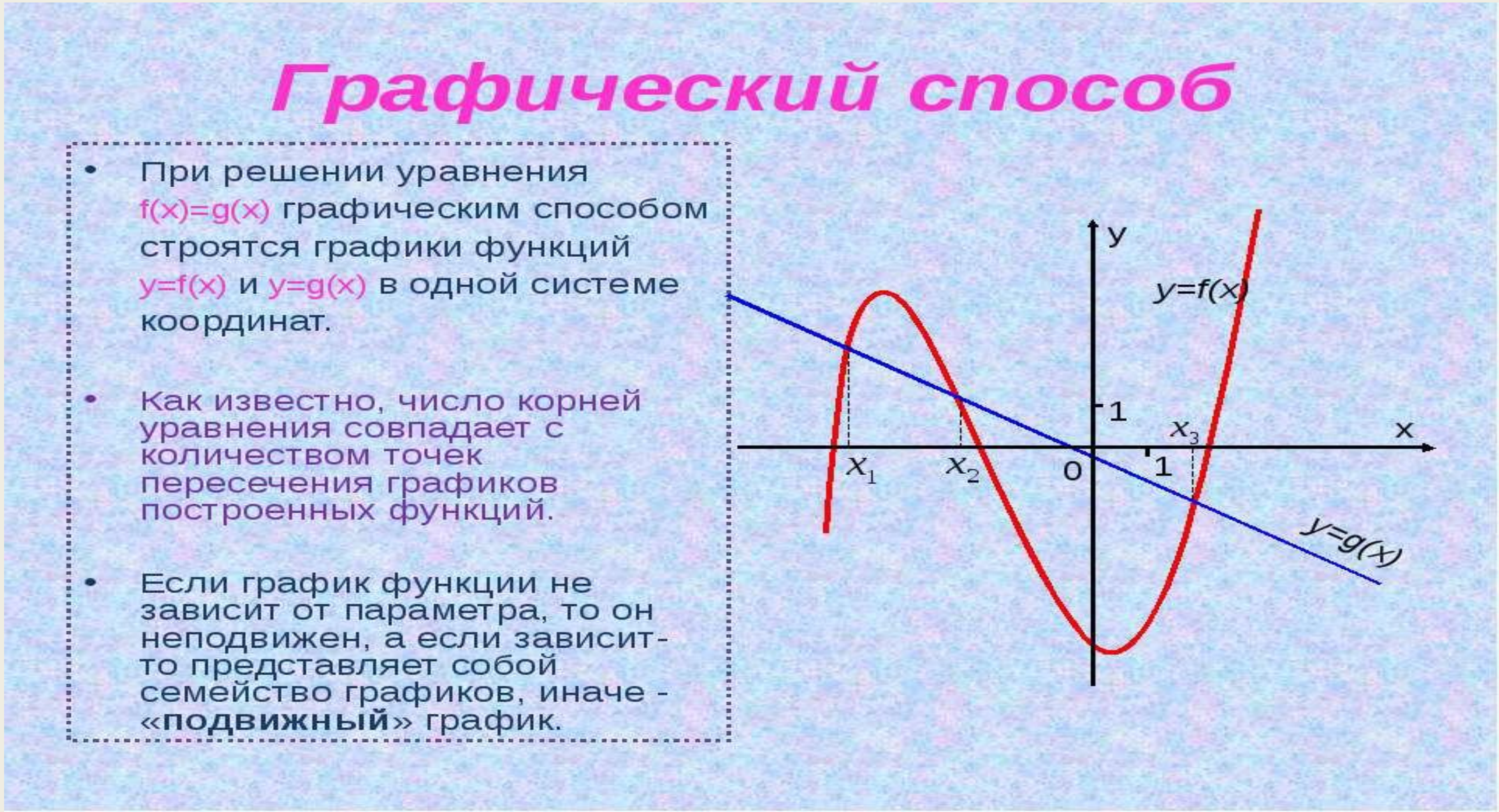
Решение строгих квадратных неравенств

Строгие неравенства

- **а > 0** означает, что **а**– положительное число
- **а < 0** означает, что **а** – отрицательное число
- **а > в** означает, что **(а-в)**- положительное число, т.е. **(а-в)>0**
- **а < в** означает, что **(а-в)**- отрицательное число, т.е. **(а-в)<0**

математика

Решение строгих квадратных неравенств



Решение строгих квадратных неравенств

Метод интервалов

1) Рассмотрим функцию $f(x) = (x+2)(x-3)(x-5)$.

Область определения $\mathbf{D(f)} = \boldsymbol{R}$ (то есть множество всех действительных чисел).

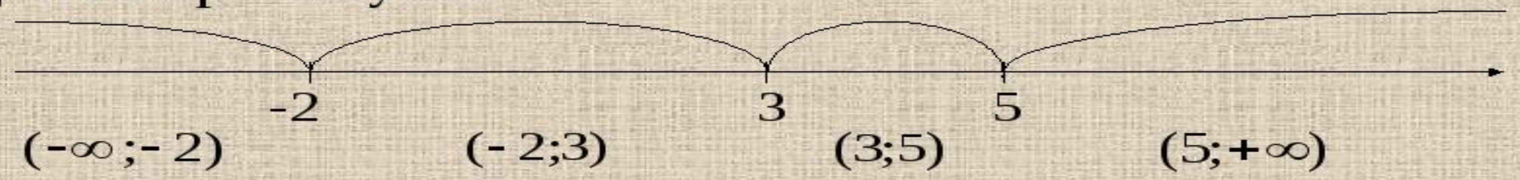
2) Найдем нули функции, т.е.решим уравнений $f(x)=0.$

$$(x+2)(x-3)(x-5)=0$$

$x+2=0$ *или* $x-3=0$ *или* $x-5=0$

$x = -2$ *или* $x = 3$ *или* $x=5$

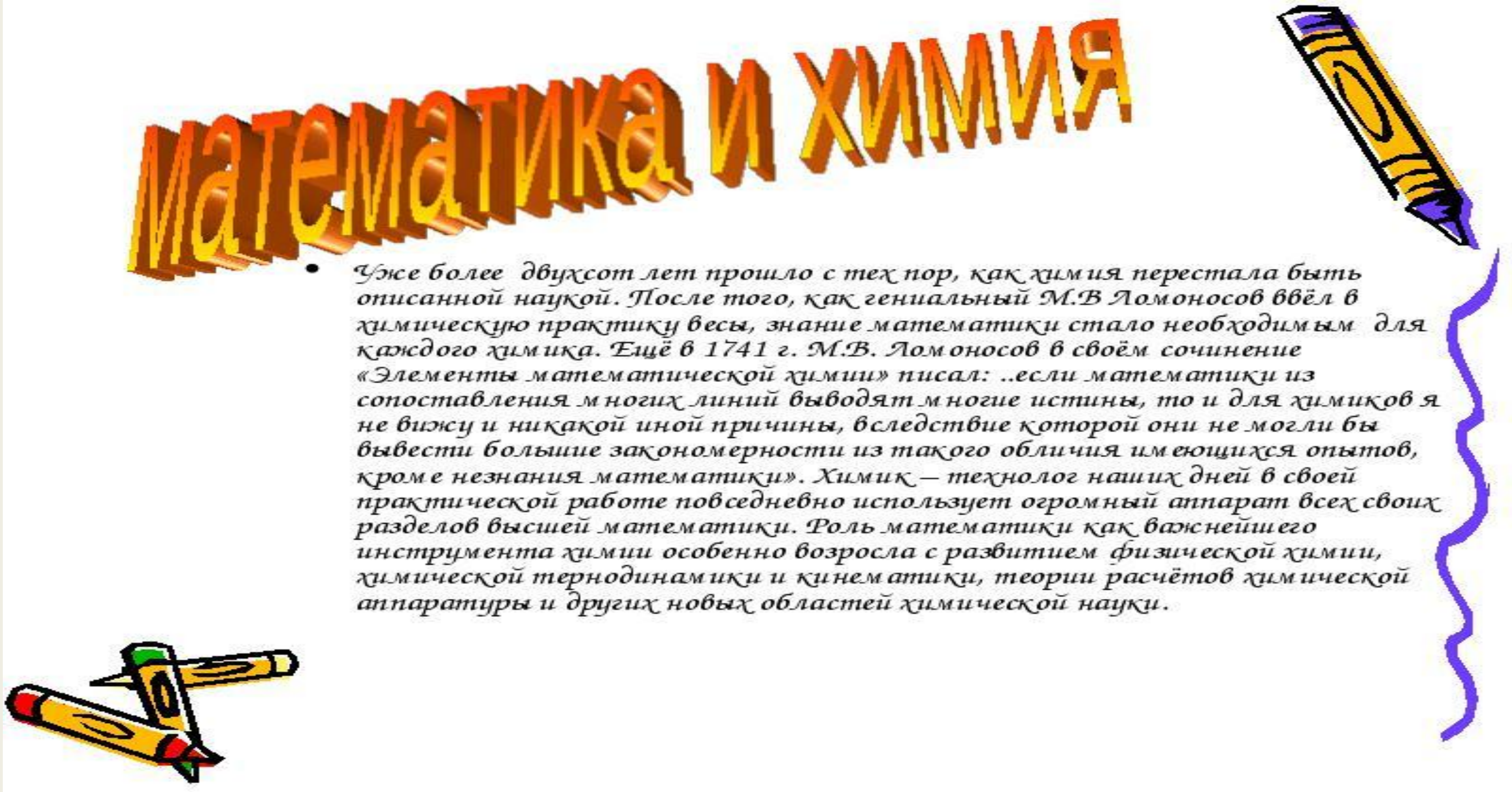
Числа **-2, 3, 5** – нули функции, они разбивают область определения функции на промежутки



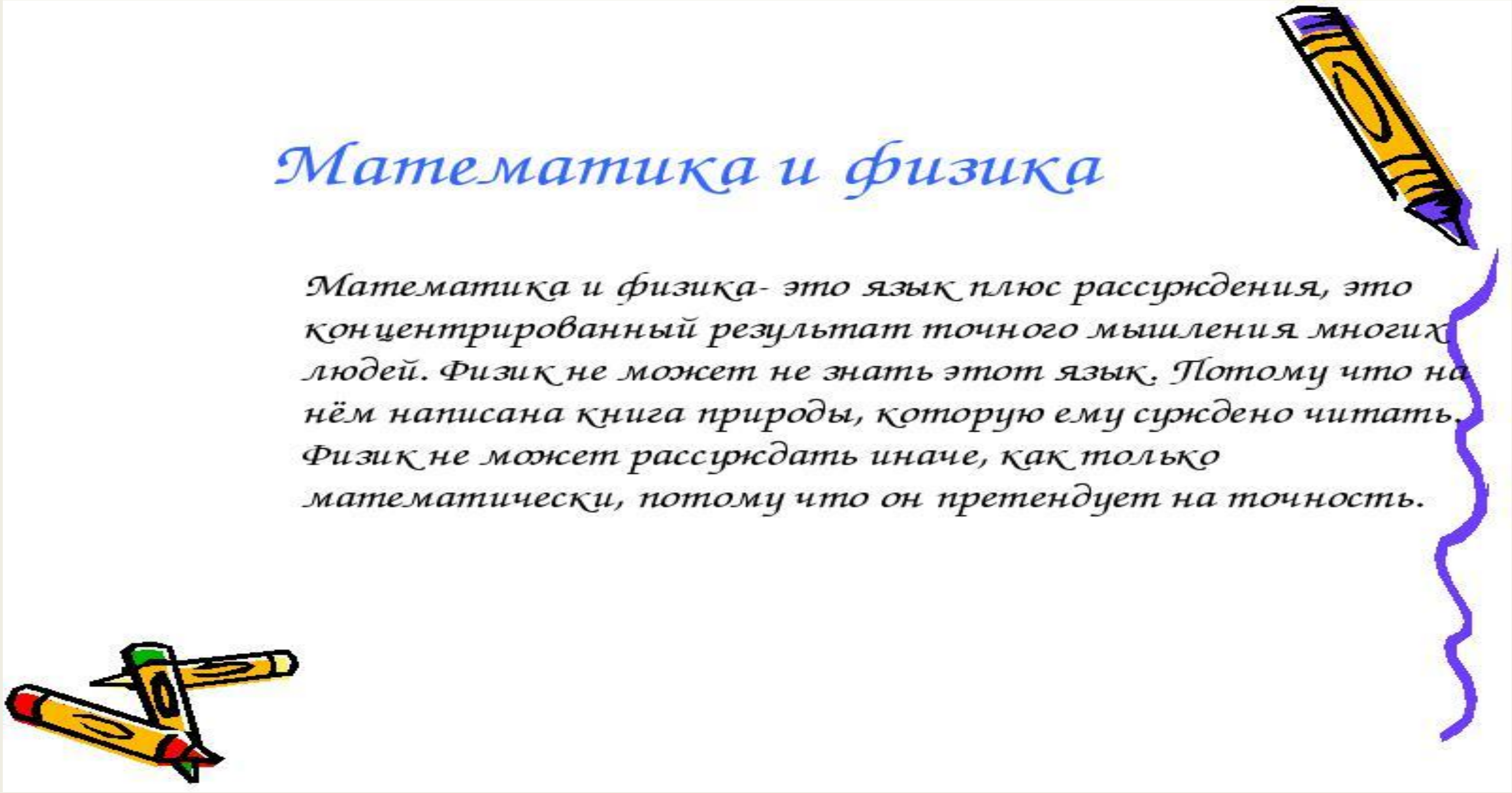
« назад *далее »*

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

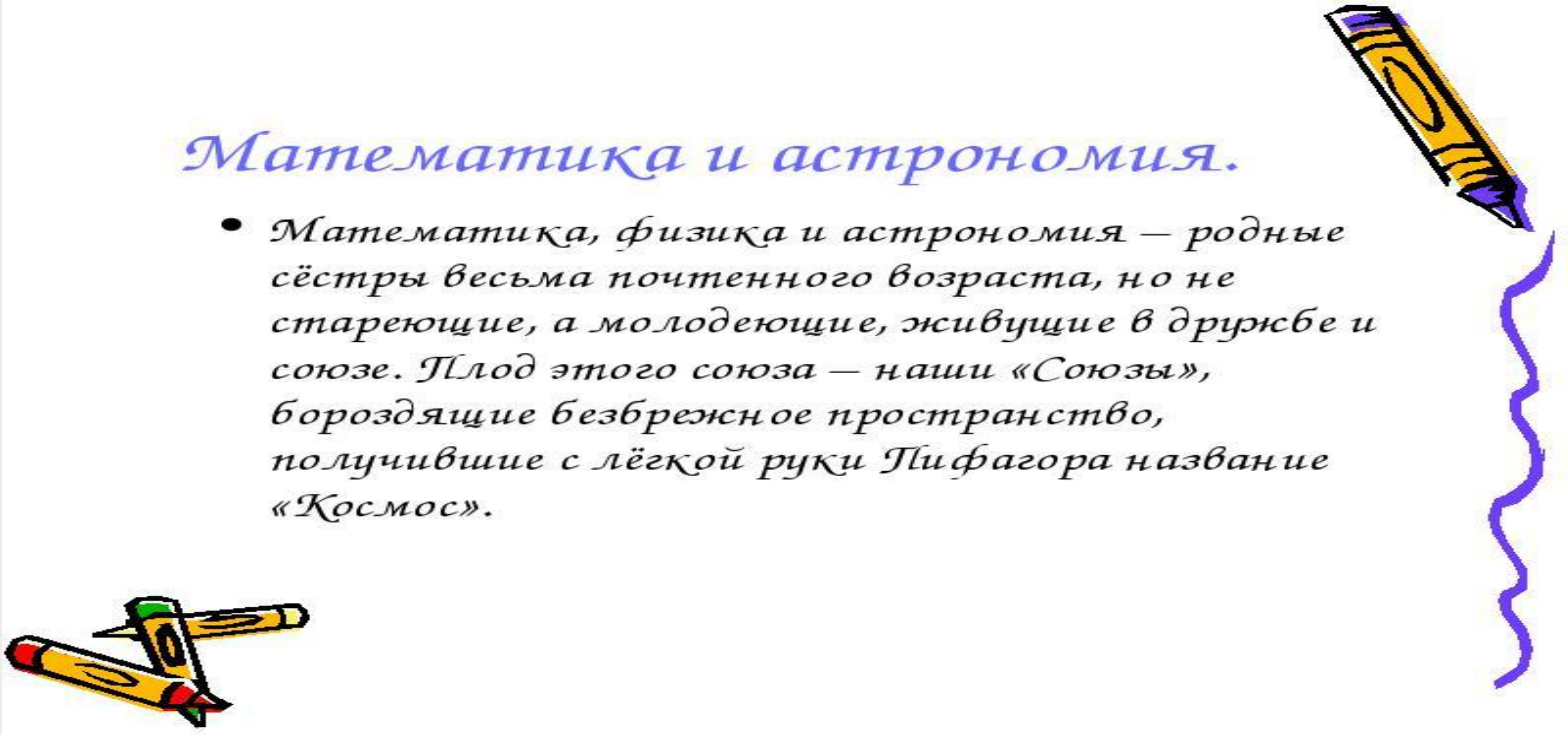
СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ



СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ



СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ



СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Математика и физкультура

« Великий мастер фехтования» -
испанец Луис Пачеко де Нарвасс,
автор книги «Великие шпаги» развил
теорию фехтования, основанную на
математических принципах. Сегодня ожидают,
что применение её позволит, в частности
заменить субъективизм анализа. Уже написана
не одна работа и применение математических
методов к анализу различных оценок в спорте.

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Математика и черчение

- *Мысли в технике чаще всего выражаются с помощью [illegible] и рисунков с числами. Теоретической основой черчения является начертательная геометрия. Широко известны слова русского учёного В.И.Курдюшова о том, что «черчение является языком техники, а начертательная геометрия – грамматикой этого языка». В свою очередь начертательная геометрия – одна из ветвей геометрической науки. Не случайно её основателем явился величайший французский математик Гаспар Монж, а его предшественниками в разработке теории перспективы наряду с художниками – многие математики*

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Математика и военное дело.

- Военная математика, т.е. математика, приспособленная к военным нуждам, имелась уже у римлян, относившихся к этой науке, по словам Цицерона, не только без всякого интереса, но даже с пренебрежением. Возникновение в США в40-х годах электронно – вычислительных машин было связано с военными задачами. Например такой прикладной раздел, как теория выработки решений, теория игр, теория массового обслуживания.

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Математика и география

Первая, довольно удачная для своего времени попытка изменения Земли была сделана во 2 в. до н. э. александрийским учёным Эратосфером, который нам известен больше как автор способа нахождения простых чисел «решето Эратосфера». Решением задач успешно занимались математики Мольвейде, Гаусс и другие. На наших глазах происходит процесс создания новой дисциплины теоретической или математической географии, цель которой: установления пространственных закономерностей.

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Спасибо за внимание