# Информатика. Задание 23

Тропников Андрей, 11Б. 2016 год

# 1. Системы логических уравнений, содержащие однотипные уравнения

Источник: http://inf.reshuege.ru/test?theme=287

# Задание №1

Сколько существует различных наборов значений логических пере менных x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, которые удовлетворяют всем пе речисленным ниже условиям?

(x1 —> x2) —> (x3—> x4) = 1

(x3 —> x4) —> (x5 —> x6) = 1

(x5 —> x6) —> (x7 —> x8) = 1

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений пе ременных x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количе ство таких наборов.

# Решение

Сделаем замену переменных:

$$(x1 \longrightarrow x2) = y1$$

$$(x3 \longrightarrow x4) = y2$$

$$(x5 \longrightarrow x6) = y3$$

$$(x7 \longrightarrow x8) = y4$$

Система уравнений получится следующей:

$$y1 \longrightarrow y2 = 1$$

$$y2 \longrightarrow y3 = 1$$

$$y3 \longrightarrow y4 = 1$$

Эту систему для простоты мы можем записать в виде одного уравнения:

$$(y1 \longrightarrow y2) \land (y2 \longrightarrow y3) \land (y3 \longrightarrow y4) = 1$$

# Решение

$$(y1 \longrightarrow y2) \wedge (y2 \longrightarrow y3) \wedge (y3 \longrightarrow y4) = 1$$

Импликация ложна тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

Варианты решений:

| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Решение

Не забываем, что мы меняли переменную и $y1 = x1 \rightarrow x2$ и т.д.

Разбираем каждую строчку решения:

1. $y1 = 0, y2 = 0, y3 = 0, y4 = 0.$
   1.1. $y1 = 0$. $y1 = x1 \rightarrow x2 \Rightarrow x1 \rightarrow x2 = 0$
   Это возможно только в одном случае. (1)
   1.2. $y2 = 0$. $y2 = x3 \rightarrow x4 \Rightarrow x3 \rightarrow x4 = 0$
   Это возможно только в одном случае. (1)
   1.3. $y3 = 0$. $y3 = x5 \rightarrow x6 \Rightarrow x5 \rightarrow x6 = 0$
   Это возможно только в одном случае. (1)
   1.4. $y4 = 0$. $y4 = x7 \rightarrow x8 \Rightarrow x7 \rightarrow x8 = 0$
   Это возможно только в одном случае. (1)

Перемножаем количество случаев: $1*1*1*1 = 1$ набор значений.

Но это только один вариант.

# Решение

2. y1 = 0, y2 = 0, y3 = 0, y4 = 1.

    2.1. y1 = 0. y1 = x1 —> x2 => x1 —> x2 = 0

    Это возможно только в одном случае. (1)

    2.2. y2 = 0. y2 = x3 —> x4 => x3 —> x4 = 0

    Это возможно только в одном случае. (1)

    2.3. y3 = 0. y3 = x5 —> x6 => x5 —> x6 = 0

    Это возможно только в одном случае. (1)

    2.4. y4 = 1. y4 = x7 —> x8 => x7 —> x8 = 1

    Это возможно в трёх случаях. (3)

Перемножаем варианты: 1*1*1*3 = 3 решения.

3. y1 = 0, y2 = 0, y3 = 1, y4 = 1.

# Решение

4. $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 1.$

4.1. $y_1 = 0$. $y_1 = x_1 \rightarrow x_2 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2 = 0$

Это возможно только в одном случае. (1)

4.2. $y_2 = 1$. $y_2 = x_3 \rightarrow x_4 \Rightarrow x_3 \rightarrow x_4 = 1$

Это возможно в трёх случаях. (3)

4.3. $y_3 = 1$. $y_3 = x_5 \rightarrow x_6 \Rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1$

Это возможно в трёх случаях. (3)

4.4. $y_4 = 1$. $y_4 = x_7 \rightarrow x_8 \Rightarrow x_7 \rightarrow x_8 = 1$

Это возможно в трёх случаях. (3)

Перемножаем варианты: 1*3*3*3 = 27 решений.

5. $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 1.$

Складываем все варианты, которые мы получили: 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = **121 решение**. Это и есть ответ.

5.1. $y_1 = 1$. $y_1 = x_1 \rightarrow x_2 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2 = 1$

Это возможно в трёх случаях. (3)

5.2. $y_2 = 1$. $y_2 = x_3 \rightarrow x_4 \Rightarrow x_3 \rightarrow x_4 = 1$

Это возможно в трёх случаях. (3)

# Итак, что мы сделали?

1. Сделали замену переменных.
2. Упростили систему до одного уравнения.
3. Решили это уравнение.
4. Разобрали каждое решение, относительно заменяемых переменных.
5. Сложили все решения, которые у нас получились.

# Задание №2

Сколько существует различных наборов значений логических пере менных x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, которые удовлетворяют всем пере численным ниже условиям?

$$((x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4)) \land (\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$
$$((x_3 \equiv x_4) \lor (x_5 \equiv x_6)) \land (\neg(x_3 \equiv x_4) \lor \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1$$
$$((x_5 \equiv x_6) \lor (x_7 \equiv x_8)) \land (\neg(x_5 \equiv x_6) \lor \neg(x_7 \equiv x_8)) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений пе ременных x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, при которых выполнена данная си стема равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

# Решение

Заметим, что система состоит из идентичных уравнений. Выпишем первое и разберем его:

$$((x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4)) \land (\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$

1. Конъюнкция делит уравнение на две части. Конъюнкция равна единице тогда, когда оба операнда равны единице. Следовательно, $(x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4) = 1$ и $\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4) = 1$

2. $(x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4) = 1$ в трех случаях: $(x_1 \equiv x_2) = 0$, $(x_3 \equiv x_4) = 1$;

$(x_1 \equiv x_2) = 1$, $(x_3 \equiv x_4) = 0$;

$(x_1 \equiv x_2) = 1$, $(x_3 \equiv x_4) = 1$.

НО! У нас есть уравнение $\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4) = 1$. Скобки здесь с отрицанием, значит, они будут полностью противоположны скобкам в первом уравнении. Вспомним про один из случаев:

Если $(x_1 \equiv x_2) = 1$, $(x_3 \equiv x_4) = 1$, то $\neg(x_1 \equiv x_2) = 0$, $\neg(x_3 \equiv x_4) = 0$. В этом случае дизъюнкция выполняться не будет. Убираем этот вариант.

# Решение

## Разбираем все случаи:

Если $(x_1 \equiv x_2) = 0$, $(x_3 \equiv x_4) = 1$, тогда

x1x2x3x4 = 0 1 1 1

x1x2x3x4 = 0 1 0 0

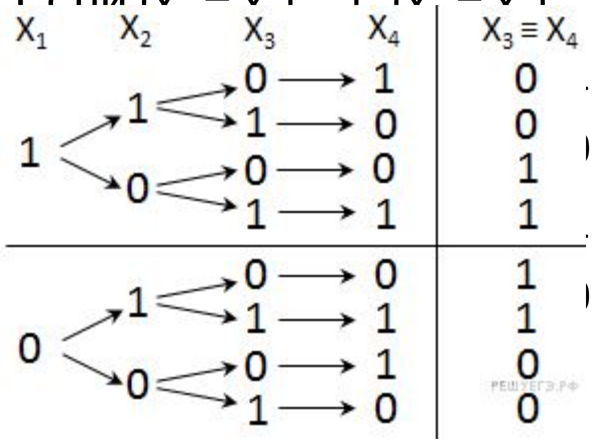
x1x2x3x4 = 1 0 1 1

x1x2x3x4 = 1 0 0 0

4 варианта.

## Дерево решений:

Если $(x_1 \equiv x_2) = 1$, $(x_3 \equiv x_4) = 0$, тогда




Первое уравнение имеет 4 + 4 = 8 решений

# Решение

Второе уравнение: **$((x_3 \equiv x_4) \lor (x_5 \equiv x_6)) \land (\neg(x_3 \equiv x_4) \lor \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1$**

Как мы помним, первое уравнение имеет 8 решений. Из них в четырех решениях $(x_3 \equiv x_4) = 1$, а в остальных четырех решениях $(x_3 \equiv x_4) = 0$.

То есть, в четырех случаях тождество равно нулю, в четырех – единице. Это надо запомнить.

Так как в первом уравнении мы уже разбирали $(x_3 \equiv x_4)$, сейчас это делать бессмысленно.

Разберем случаи:

Если $(x_3 \equiv x_4) = 1$, тогда:

$(x_3 \equiv x_4)$ x5 x6 = 1 0 1

$(x_3 \equiv x_4)$ x5 x6 = 1 1 0

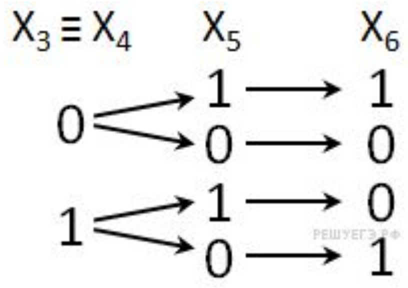
Если $(x_3 \equiv x_4) = 1$, то решения два.

Если $(x_3 \equiv x_4) = 0$, тогда:

$(x_3 \equiv x_4)$ x5 x6 = 0 0 0

$(x_3 \equiv x_4)$ x5 x6 = 0 1 1

Если $(x_3 \equiv x_4) = 0$, то решения два.




Вспоминаем, что для каждого решения у нас есть по 4 случая. То есть, для $(x_3 \equiv x_4) = 0$ есть два решения, но ноль может быть в четырех случаях, как и единица. Перемножаем: 4*2 + 4*2 = 16 решений имеют два уравнения.

# Решение

Третье уравнение: **$((x_5 \equiv x_6) \lor (x_7 \equiv x_8)) \land (\neg(x_5 \equiv x_6) \lor \neg(x_7 \equiv x_8)) = 1$**

Как мы помним, второе уравнение имеет 16 решений. Из них, $(x_5 \equiv x_6) = 1$ восемь раз, $(x_5 \equiv x_6) = 0$ тоже восемь раз. Картина повторяется. Только в прошлом случае было по четыре случая. Теперь по восемь случаев. Разберем случаи:

Если $(x_5 \equiv x_6) = 1$, тогда:

$(x_5 \equiv x_6)$ x7 x8 = 1 0 1

$(x_5 \equiv x_6)$ x7 x8 = 1 1 0

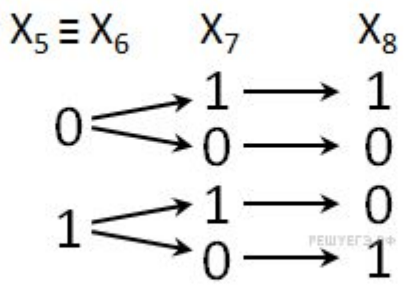
Если $(x_5 \equiv x_6) = 1$, то решения два.

Если $(x_5 \equiv x_6) = 0$, тогда:

$(x_5 \equiv x_6)$ x7 x8 = 0 0 0

$(x_5 \equiv x_6)$ x7 x8 = 0 1 1

Если $(x_5 \equiv x_6) = 0$, то решения два.




Тоже самое: единица будет в восьми случаях, ноль будет в восьми случаях. К каждому случаю добавляем ещё по два решения, получаем: 8*2 + 8*2 = 32 решения имеют три уравнения.

Ответ: **32 решения.**

# Итак, что мы сделали?

1. Разобрали первое уравнение системы.
2. Разобрали все случаи, построили дерево.
3. Разобрали второе уравнение, за исключением скобки, связанной с первым уравнением.
4. Нашли решения, построили дерево, перемножили случаи с решениями.
5. Разобрали третье уравнение, за исключением скобки, связанной со вторым уравнением.
6. Нашли решения, построили дерево, перемножили случаи с решениями.

# 2. Системы логических уравнений, содер жащие неоднотипные уравнения

Источник: http://inf.reshuege.ru/test?theme=264

# Задание №3

Сколько существует различных наборов значений логических пере менных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) \land (x4 \rightarrow x5) = 1$

$(y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4) \land (y4 \rightarrow y5) = 1$

$x1 \lor y1 = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений пе ременных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать ко личество таких наборов.

# Решение

Решим последнее логическое уравнение, т.к. оно самое простое и даст толчок всему решению:

$$\mathbf{x1 \lor y1 = 1}$$

Дизъюнкция равна единице в трех случаях:

| X1 | Y1 |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Следовательно, у нас три глобальных решения. Разберем каждое.

# Решение

$$(x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1$$

$$(y1 \to y2) \land (y2 \to y3) \land (y3 \to y4) \land (y4 \to y5) = 1$$

Если $x1 = 1$, $y1 = 1$, тогда

1. $(x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1$

   $(x1 \to x2) = 1 \Rightarrow x2 = 1$ (В импликации из единички не может следовать ноль).

   $(x2 \to x3) = 1 \Rightarrow x3 = 1$

   $(x3 \to x4) = 1 \Rightarrow x4 = 1$

   $(x4 \to x5) = 1 \Rightarrow x5 = 1$

   Значит, первое уравнение имеет единственное решение: 11111

2. $(y1 \to y2) \land (y2 \to y3) \land (y3 \to y4) \land (y4 \to y5) = 1$

   Уравнение идентично первому, $y1 = x1 = 1$, => уравнение имеет так же единственное решение.

Перемножаем решения: $1*1 = 1$ решение (в первом случае).

# Решение

$$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) \land (x4 \rightarrow x5) = 1$$

$$(y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4) \land (y4 \rightarrow y5) = 1$$

Если x1 = 0, y1 = 1, тогда

1. $(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) \land (x4 \rightarrow x5) = 1$

Разберем возможные варианты.

Следовательно, уравнение имеет 5 решений.

| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2. $(y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4) \land (y4 \rightarrow y5) = 1$

На прошлом слайде разбирали случай при y1 = 1, уравнение имеет 1 решение.

Перемножаем решения: 5*1 = 5 решений (во втором случае).

# Решение

$$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1$$

$$(y1 \rightarrow y2) \wedge (y2 \rightarrow y3) \wedge (y3 \rightarrow y4) \wedge (y4 \rightarrow y5) = 1$$

Если $x1 = 1$, $y1 = 0$, тогда

1. $(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1$

При $x1 = 1$, уравнение имеет 1 решение.

| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2. $(y1 \rightarrow y2) \wedge (y2 \rightarrow y3) \wedge (y3 \rightarrow y4) \wedge (y4 \rightarrow y5) = 1$

При $y1 = 0$, уравнения имеют 5 решений.

Перемножаем решения: 1*5 = 5 решений (во третьем случае).

Складываем решения: 1 + 5 + 5 = **11 решений** системы.

# Итак, что мы сделали?

1. Решили простое уравнение, тем самым найдя глобальные случаи.
2. Разобрали каждый случай.
3. Сложили решения каждого случая.

# Задание №4

Сколько существует различных наборов значений логических пере менных x1, x2, x3, x4, y1, y2 y3, y4, которые удовлетворяют всем пере численным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) = 1$

$(\neg y1 \lor y2) \land (\neg y2 \lor y3) \land (\neg y3 \lor y4) = 1$

$(y1 \rightarrow x1) \land (y2 \rightarrow x2) \land (y3 \rightarrow x3) \land (y4 \rightarrow x4) = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений пе ременных x1, x2, x3, x4, y1, y2 y3, y4, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количе ство таких наборов.

# Решение

Для начала преобразуем второе уравнение:

$(\neg y1 \lor y2) \land (\neg y2 \lor y3) \land (\neg y3 \lor y4) \Leftrightarrow (y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4)$

Теперь решим первое и второе уравнения:

$$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) = 1$$
$$(y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4) = 1$$

| X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Решение

Выпишем все решения (они позже пригодятся):

$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) = 1$

Решения: 1111 0111 0011 0001 0000

$(y1 \rightarrow y2) \land (y2 \rightarrow y3) \land (y3 \rightarrow y4) = 1$

Решения: 1111 0111 0011 0001 0000

Осталось третье уравнение, которое непосредственно связано с этими двумя.

$$(y1 \rightarrow x1) \land (y2 \rightarrow x2) \land (y3 \rightarrow x3) \land (y4 \rightarrow x4) = 1$$

Если y1 = 1, тогда x1 не может быть равен нулю. x1 = 1.

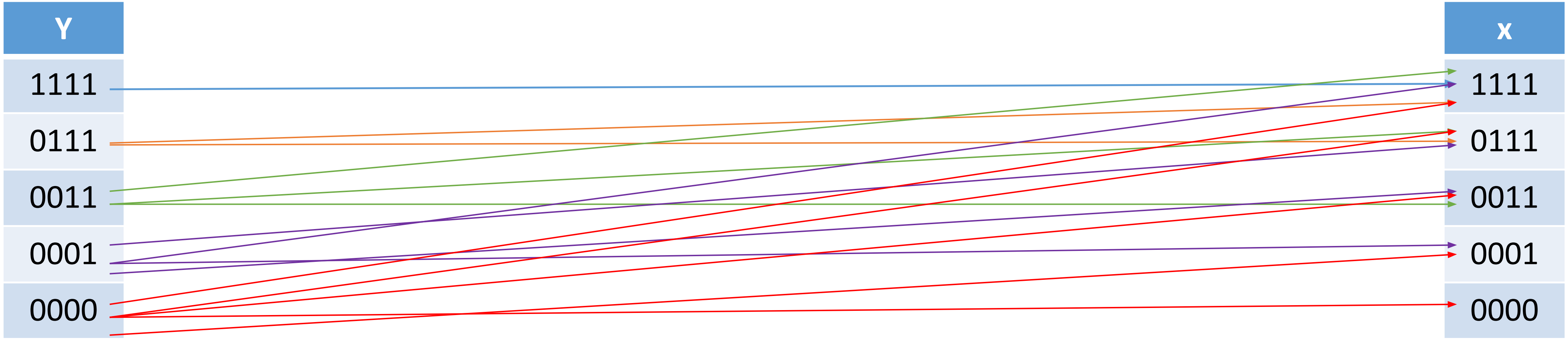
Если y2 = 1, тогда x2 не может быть равен нулю. x2 = 1.

Если y3 = 1, тогда x3 не может быть равен нулю. x3 = 1.

Если y4 = 1, тогда x4 не может быть равен нулю. x4 = 1.

# Решение

Составим таблицу соответствий наборов:



# Решение

Следовательно,

- первому набору решений «y» (1111) соответствует 1 набор решений «x».
- второму набору решений «y» (0111) соответствует 2 набора решений «x».
- третьему набору решений «y» (0011) соответствует 3 набора решений «x».
- четвертому набору решений «y» (0001) соответствует 4 набора решений «x».
- пятому набору решений «y» (0000) соответствует 5 наборов решений «x».

Складываем количества решений: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15 решений.**

# Итак, что мы сделали?

1. Преобразовали второе уравнение к более удобному виду.
2. Решили два уравнения, выписали решения.
3. Решили третье уравнение системы, совместив решения первого уравнения и второго по условию третьего уравнения.
4. Сложили количество решений.