«Координатный метод решения стереометрических задач»

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – раздел математики, являющийся носителем собственного метода познания мира.

ГЕОМЕТРИЯ РАЗВИВАЕТ:

1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

2.ОБРАЗНОЕ МЫШЛЕНИЕ

3.ИЗОБРАЗИТЕЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИЕ УМЕНИЯ

4. ПРИЕМЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

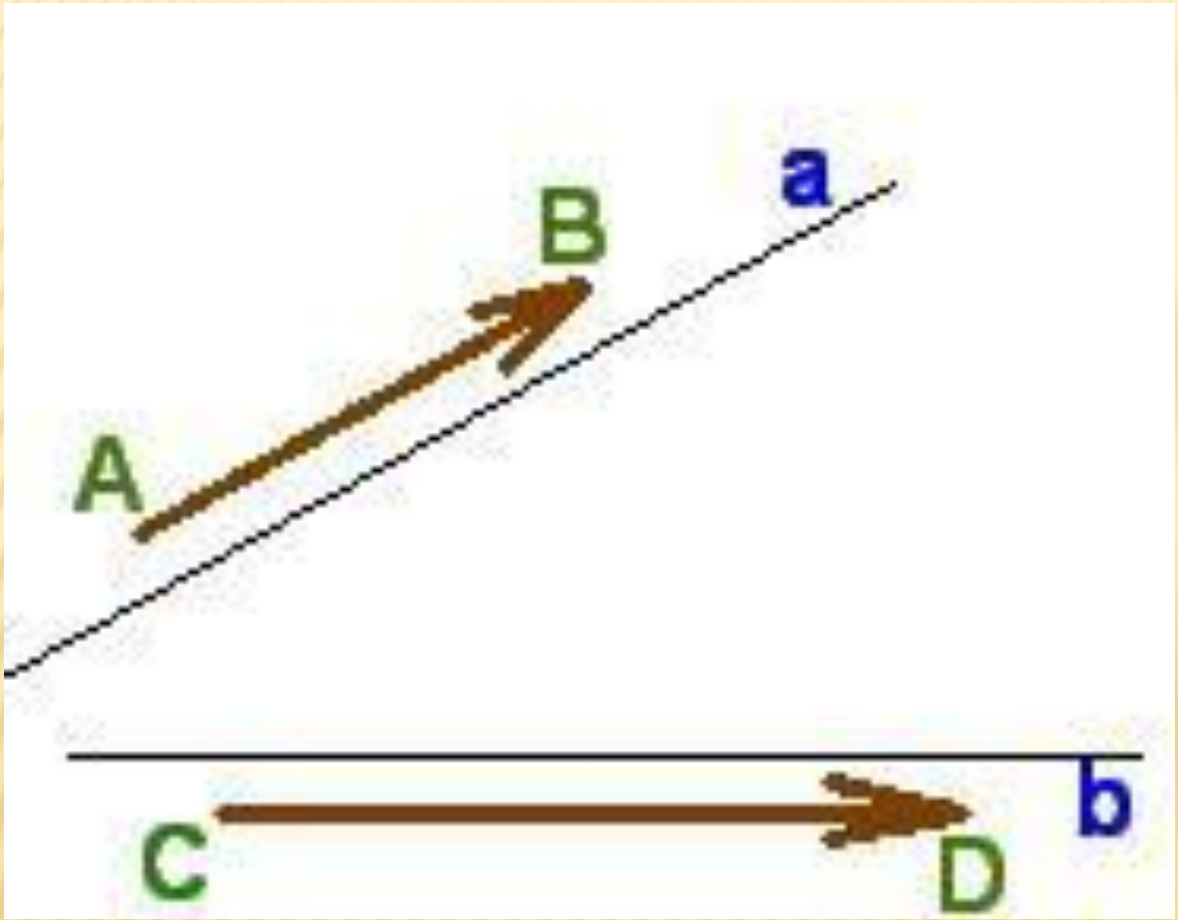
Уменьшение практической направленности курса геометрии повлекло за собой неумение решения стереометрических задач.

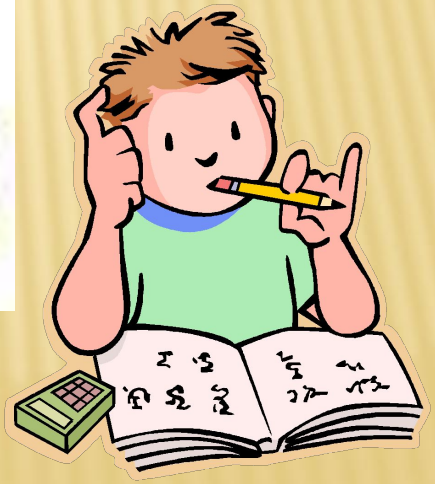
КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

- 1.систематизирует знания по решению стереометрических задач
- 2.расширяет умения их решения
- 3.упрощает работу, связанную с чертежом
- 4. доступен ученикам с разным уровнем подготовки

Метод позволяет с помощью формул и введения координатного пространства решать стереометрические задачи различного уровня сложности.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ A И B



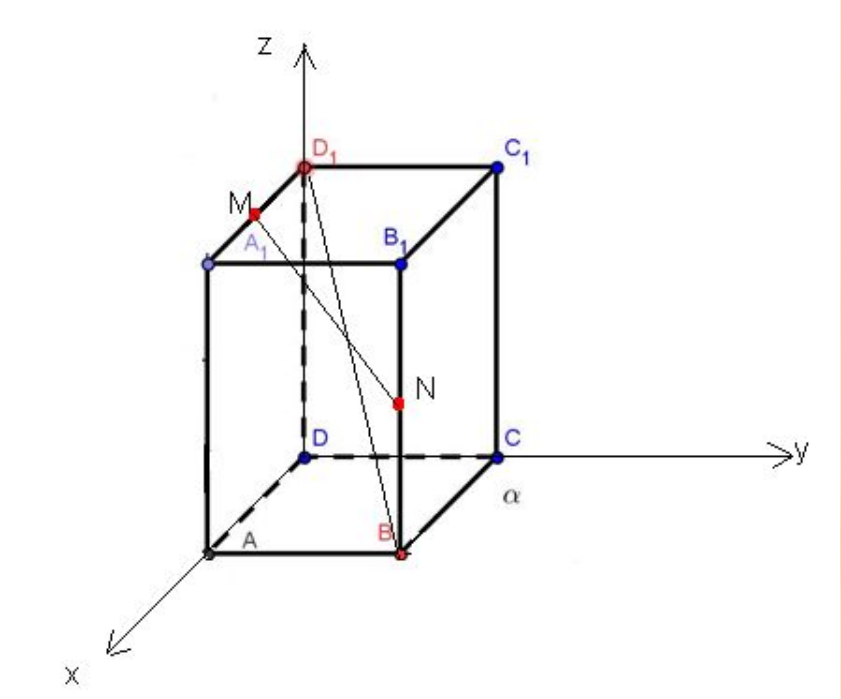


- Углом между прямыми в пространстве называется угол между любыми параллельными им пересекающимися прямыми. Этот угол равен углу между направляющими векторами данных прямых (или дополняет его до 180^0).
- 1) Выбираем любые вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющие направления прямых a и b (параллельные им).
  2) Определяем координаты векторов $\overrightarrow{AB}(x_1;y_1;z_1)$ и $\overrightarrow{CD}(x_2;y_2;z_2)$ по соответствующим координатам их начал и концов (от координат конца вектора нужно отнять координаты начала).
  3) Подставляем найденные координаты в формулу:

$$\cos(\widehat{AB,CD}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M и N – середины ребер A_1D_1 и BB_1. Найдите косинус угла между прямой MN и диагональю BD_1.



Решение:

Введем пространственную систему координат.

Находим координаты точек B, D_1, M , N : B(1;1;0) , D_1(0;0;1) , M(0,5;0;1) , N(1;1;0,5).

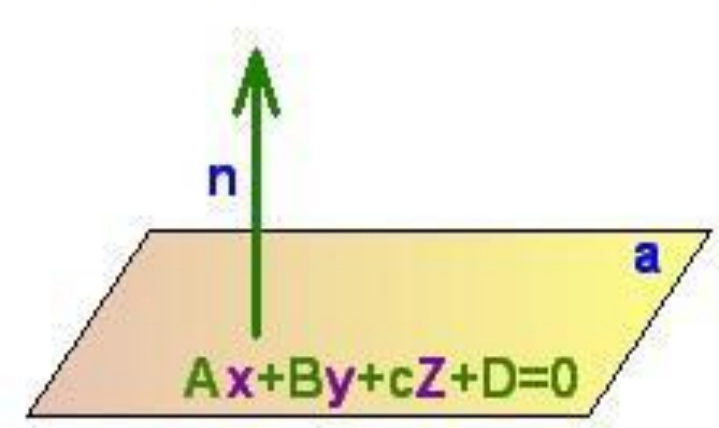
Координаты векторов $\overrightarrow{BD_1}$(-1;-1;1) , $\overrightarrow{MN}$ (0,5;1;-0,5).

Искомый угол находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|(\vec{n_1} * \vec{n_2})|}{|\vec{n_1}| * |\vec{n_2}|} = \frac{|-1*0{,}5-1*1+1*(-0{,}5)|}{\sqrt{1+1+1}*\sqrt{0{,}25+1+0{,}25}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ



- Точки, удовлетворяющие равенству

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

образуют плоскость с нормалью . $\vec{n}(A;B;C)$

Коэффициент отвечает за величину отклонения (параллельного сдвига) между двумя плоскостями с одной и той же заданной нормалью $\vec{n}(A;B;C)$

Для того, чтобы написать уравнение плоскости нужно сначала найти ее нормаль, используя матрицу и определители, а затем подставить координаты найденной нормали в уравнение

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Угол между прямой и плоскостью

Допустим, что нам заданы прямая и плоскость координатами направляющего вектора $\overrightarrow{AB}(x_1;y_1;z_1)$ и нормали $\overrightarrow{n}(x_2;y_2;z_2)$.
Угол Ψ между прямой и плоскостью вычисляется по следующей формуле:

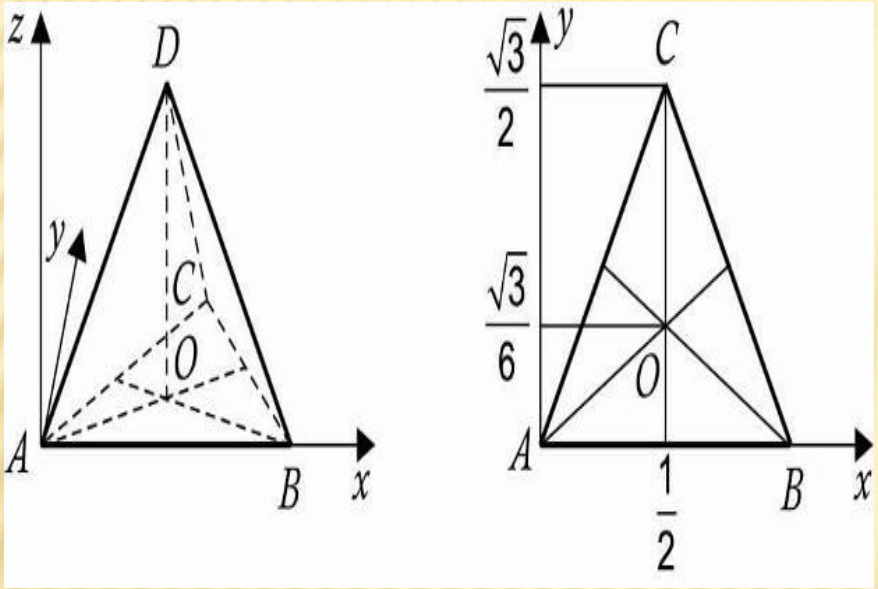
$$\sin\Psi = \cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{AB}) = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}*\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Чтобы составить уравнение плоскости, которой принадлежат данные точки, необходимо воспользоваться определителями матрицы и следующей формулой:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = x * \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - y * \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} + z * \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

Задача.

В правильной треугольной пирамиде DABC сторона основания равна 8 и DC =17. Найдите tg угла , образованного плоскостью основания и прямой AD , где O – точка пересечения медиан грани ABC.



Решение:

Введем пространственную систему координат.

Находим координаты точек B,A,C: B(8 ;0;0) A(0;0;0) , C(;12;0) , D(4;4;15).

Координаты вектора

$\vec{n} = \vec{AD}$ (4;4;15)

Составляем уравнение плоскости основания :

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8\sqrt{3}-0 & 0-0 & 0-0 \\ 4\sqrt{3}-0 & 12-0 & 0-0 \end{vmatrix} = x*0 - y*0 + z*96\sqrt{3} = 96\sqrt{3}z$$

Искомый угол находится по формуле sin a :

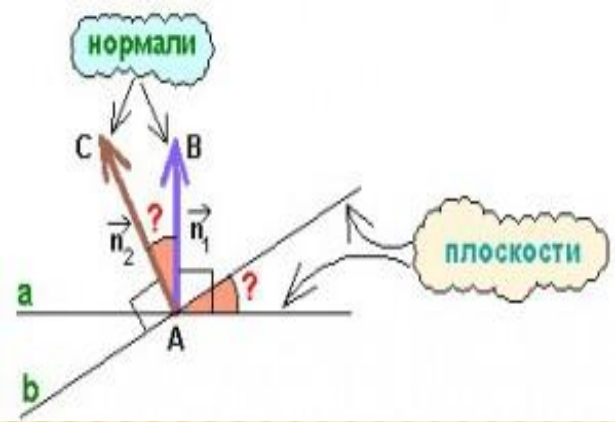
$$\sin a = \frac{|(\vec{n_1} * \vec{n_2})|}{|\vec{n_1}| * |\vec{n_2}|} = \frac{|0*4\sqrt{3} - 0*4 + 96\sqrt{3}*15|}{\sqrt{48+16+225} * \sqrt{0+0+96\sqrt{3}*96\sqrt{3}}} = \frac{96\sqrt{3}*15}{96\sqrt{3}*17} = \frac{15}{17}$$

$$\cos a = \frac{8}{17} \qquad \text{tg } a = \frac{15}{8}$$

Ответ: $\frac{15}{8}$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Пусть $\vec{n_1}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{n_2}(x_2;y_2;z_2)$ — две любые нормали к данным плоскостям.

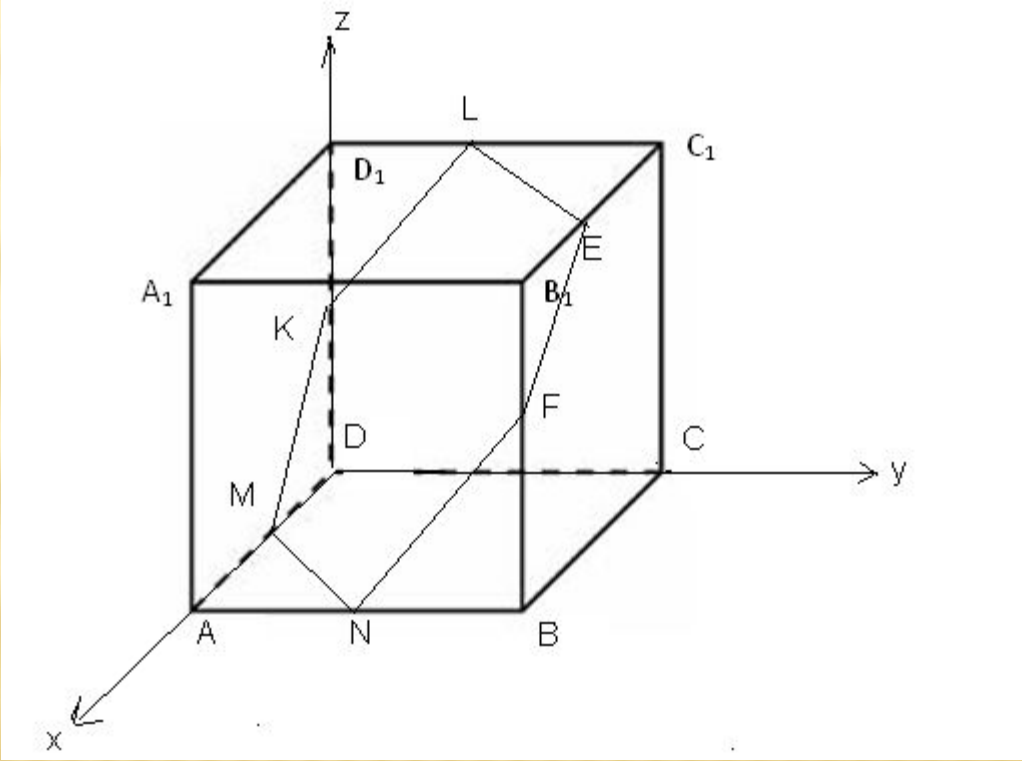


Если в задаче необходимо найти угол между плоскостями , то координаты векторов нормали составляются по матрицам , в которых берутся координаты соответствующих точек. После того как составлены уравнения плоскостей, значение угла можно найти по формуле COS a.

Тогда косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормалями:

$$\cos\alpha = \left|\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})\right| = \frac{\left|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}*\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины его ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, DA.



Решение:

Введем пространственную систему координат. Находим координаты точек необходимых для составления матриц и нахождения уравнения плоскостей:

B(1;1;0) , A_1(1;0;1) , D(0;0;0) ,K(0;0;0,5) , M(0,5;0;0),N(1;0,5;0)

Составляем уравнение плоскости A_1BD

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x(-1) - y(-1) + z(1) = -x + y + z.$$

Составляем уравнение плоскости KMN

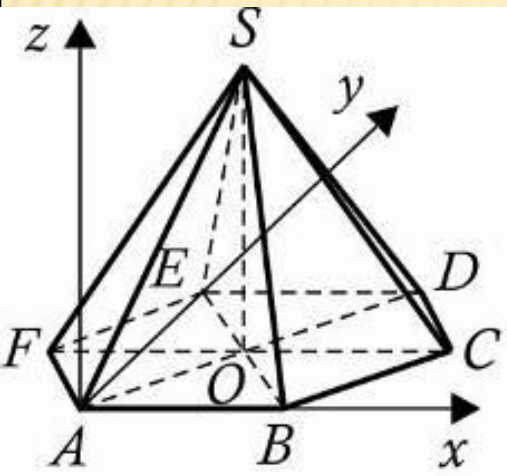
$$\begin{vmatrix} x & y & z-0,5 \\ 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \end{vmatrix} = x(-0,25) - y(-0,25) + (z-0,5)(-0,25) = -0,25x + 0,25y - 0,25z.+0,125$$

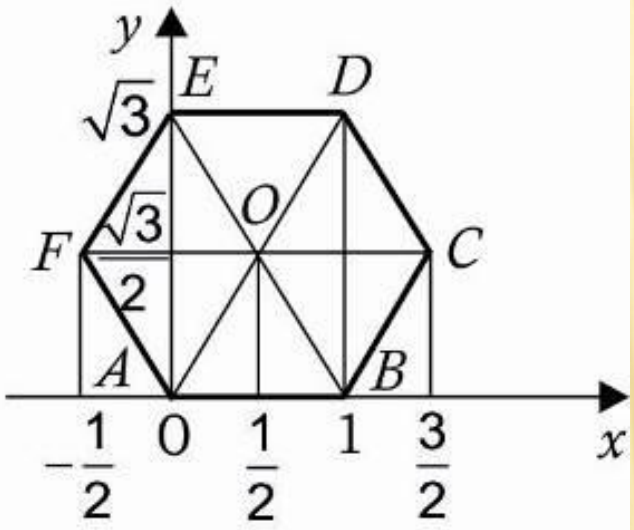
Тогда $\vec{n_1}$(-1; 1; 1) , $\vec{n_2}$(-0,25; 0,25;-0,25). Следовательно

$$COS\ a = \frac{|0,25 + 0,25 - 0,25|}{\sqrt{3 * \frac{3}{16}}} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}$$

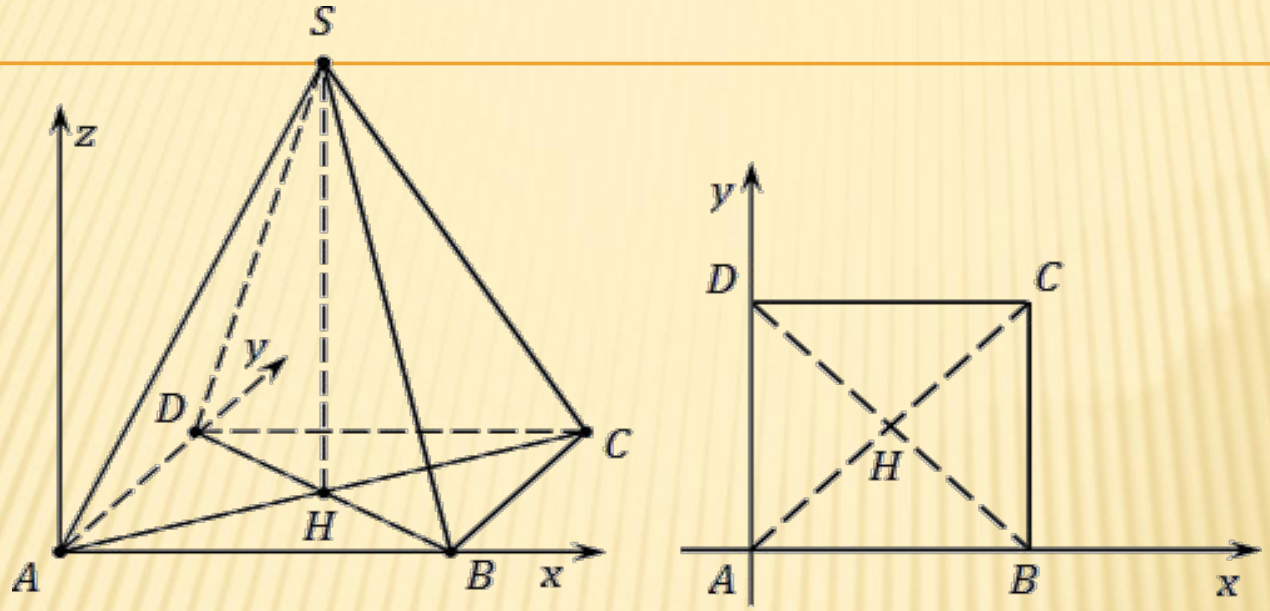
$$sin\ a = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad tg\ a = 2\sqrt{2}$$

Ответ: $arctg\ 2\sqrt{2}$





ДЛИНА СТОРОНЫ ОСНОВАНИЯ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ SABCDEF РАВНА 2, А ДЛИНА БОКОВОГО РЕБРА РАВНА 5. НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ AC И SD .



ДАНА ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА SABCD , СТОРОНА ОСНОВАНИЯ КОТОРОЙ РАВНА 2, А ВЫСОТА 3. ТОЧКИ M И F – СЕРЕДИНЫ РЕБЕР СООТВЕТСТВЕННО. НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЬЮ ABM И ПЛОСКОСТЬЮ ОСНОВАНИЯ ПИРАМИДЫ.