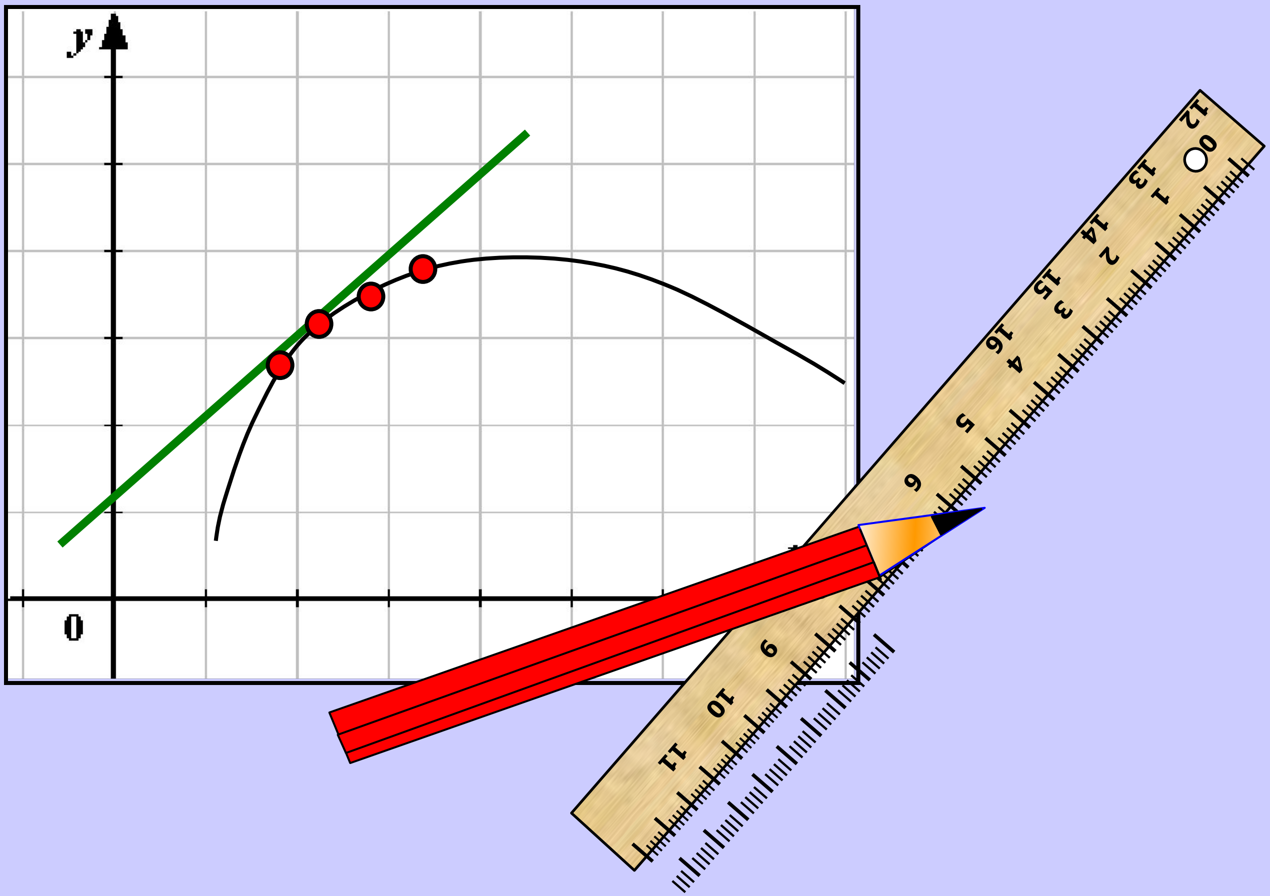
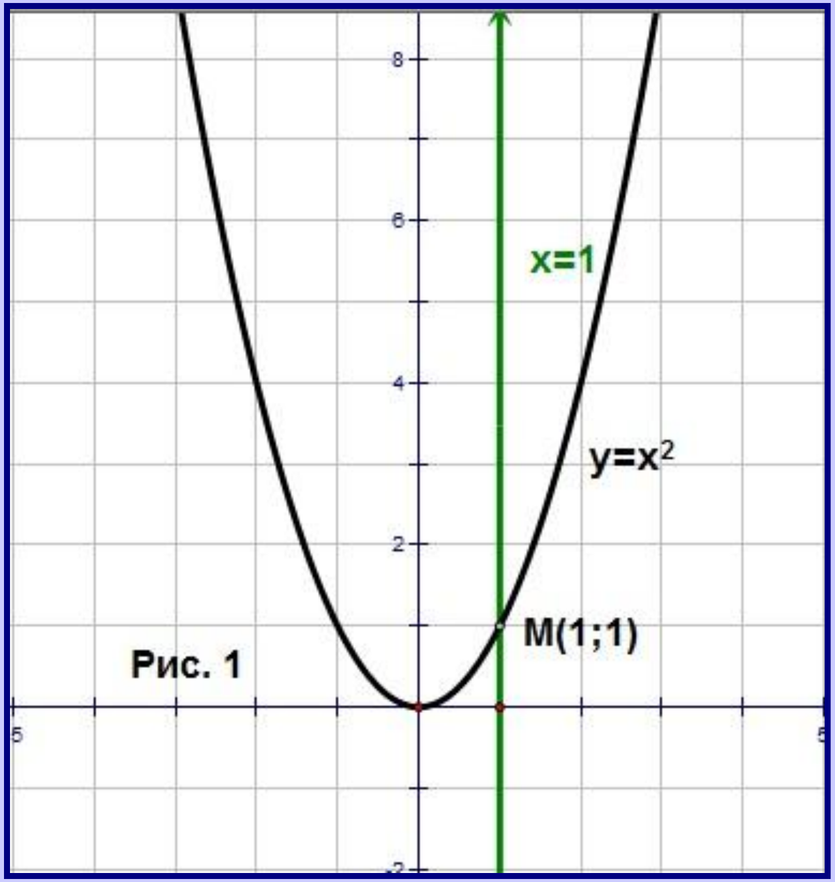
Уравнение касательной к графику функции

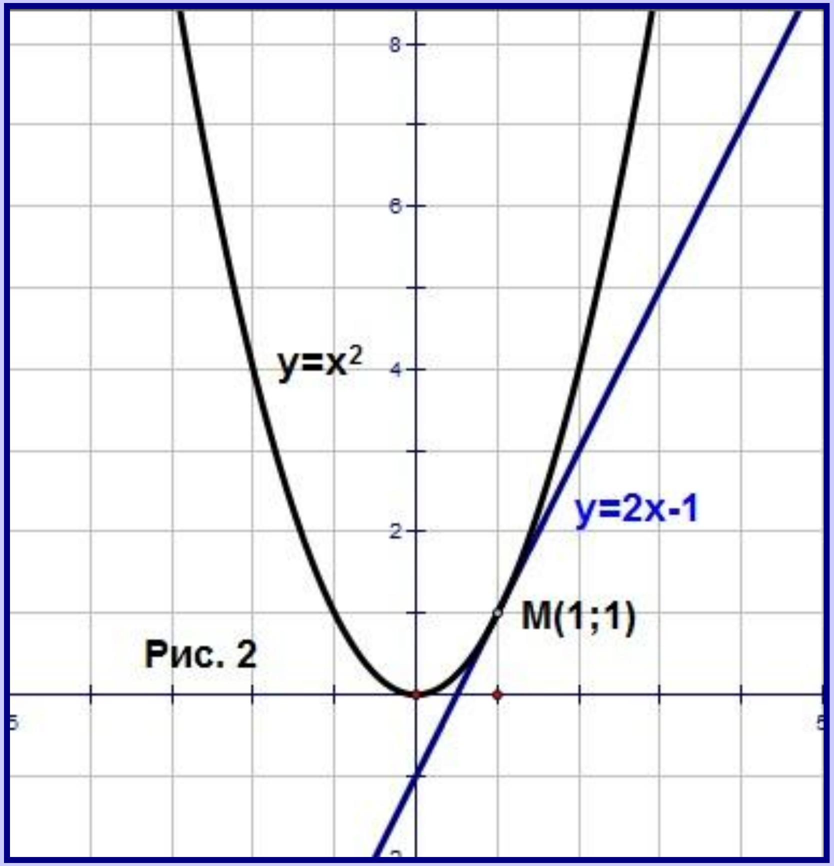


Верно ли определение?

Касательная – это прямая, имеющая с данной кривой одну общую точку.

Пусть дана $y = x^2$ и две прямые $x = 1$ и $y = 2x - 1$, имеющая с данной параболой одну общую точку М (1;1).





На данном уроке:

1. выясним, что же такое касательная к графику функции в точке, как составить уравнение касательной;
2. рассмотрим основные задачи на составление уравнения касательной.

Для этого:

- вспомним общий вид уравнения прямой
- условия параллельности прямых
- определение производной
- правила дифференцирования
- Формулы дифференцирования

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу Δx приращение такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение Δy функции и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.Если существует предел отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют ***<u>производной функции</u>*** $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных.

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной.

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

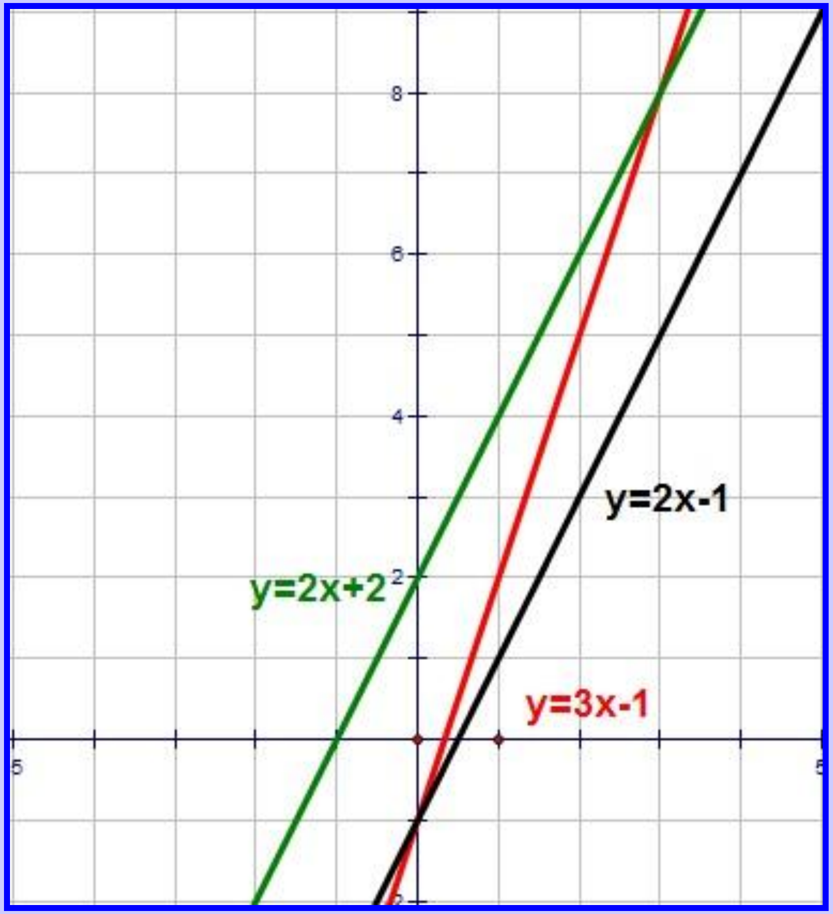
Основные формулы дифференцирования

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

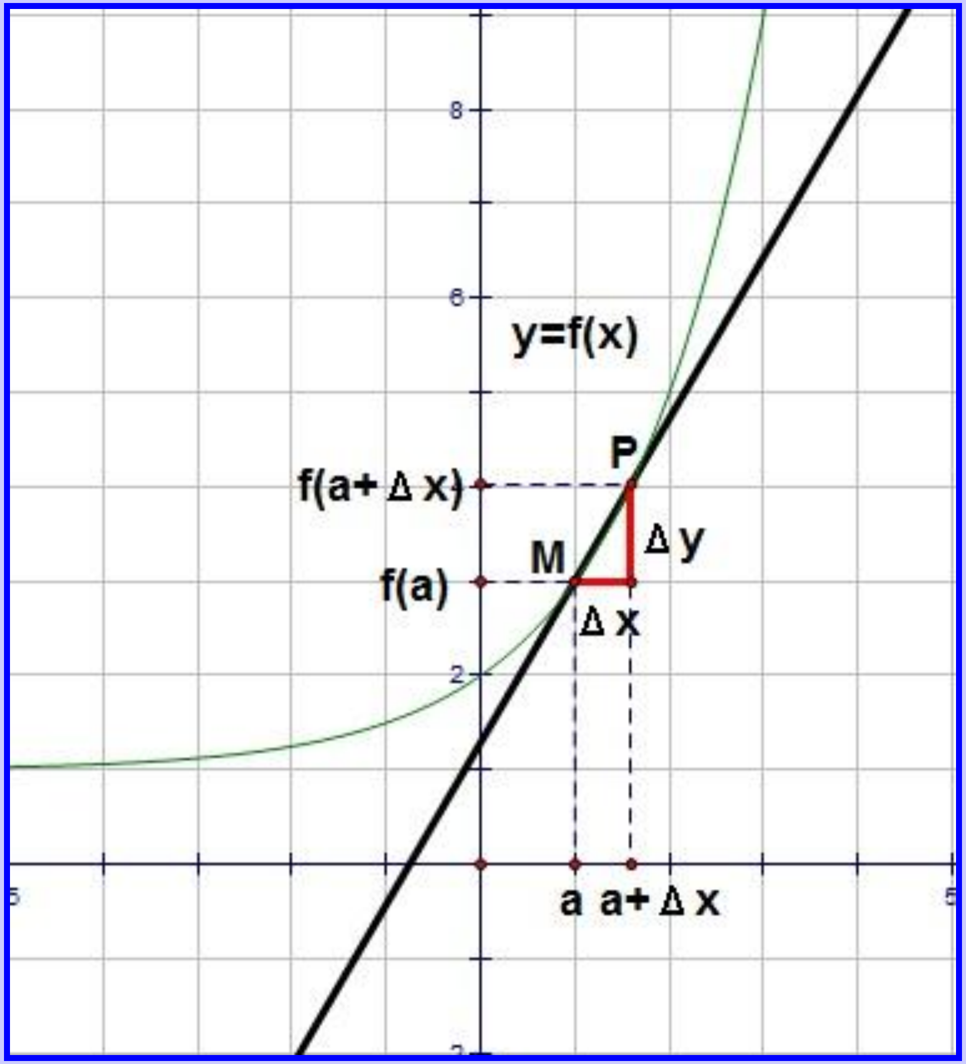
Две ***прямые параллельны*** тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны

Параллельны ли прямые:

$$a)\ y = 2x - 1;$$
$$б)\ y = 2x + 2;$$
$$в)\ y = 3x - 1.$$



Пусть дан график функции y=f(x). На нем выбрана точка M(a;f(a)), в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.



$$y = f(x),\ M(a; f(a))$$

$$k_{сек} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек}$$

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной

Если к графику функции y = f (x) в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f^{'}(a)$ выражает угловой коэффициент касательной

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = f^{'}(a)$$

Геометрический смысл производной

Производная в точке

$x = x_0$ равна

угловому коэффициенту

касательной к

графику функции

y = f(x) в этой точке.

Т.е. $\boxed{f'(x_0) = tg\alpha}$

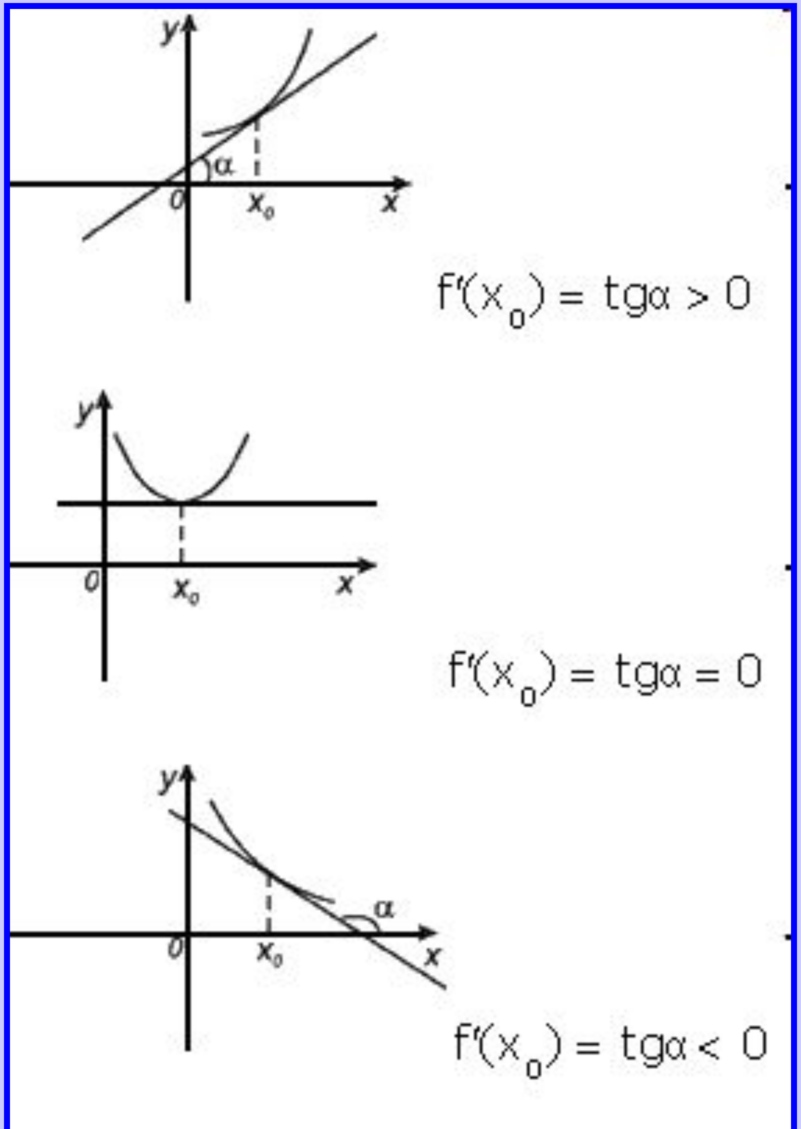
Причем, если

:

$1. f'(x_0) = tg\alpha > 0, \text{то } \alpha - \text{острый}$

$2. f'(x_0) = tg\alpha = 0, \text{то } \alpha - \text{развернутый}$

$3. f'(x_0) = tg\alpha < 0, \text{то } \alpha - \text{тупой}$



Вывод уравнения касательной

Пусть прямая задана уравнением: $y = kx + m,\ M(a; f(a))$

$$k = f'(a)$$

$$f(a) = ka + m$$

$$m = f(a) - ka$$

$$y = kx + (f(a) - ka)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

уравнение касательной к графику функции

$$y = f(x)$$

Составить уравнение касательной:

- к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $M(1;1)$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

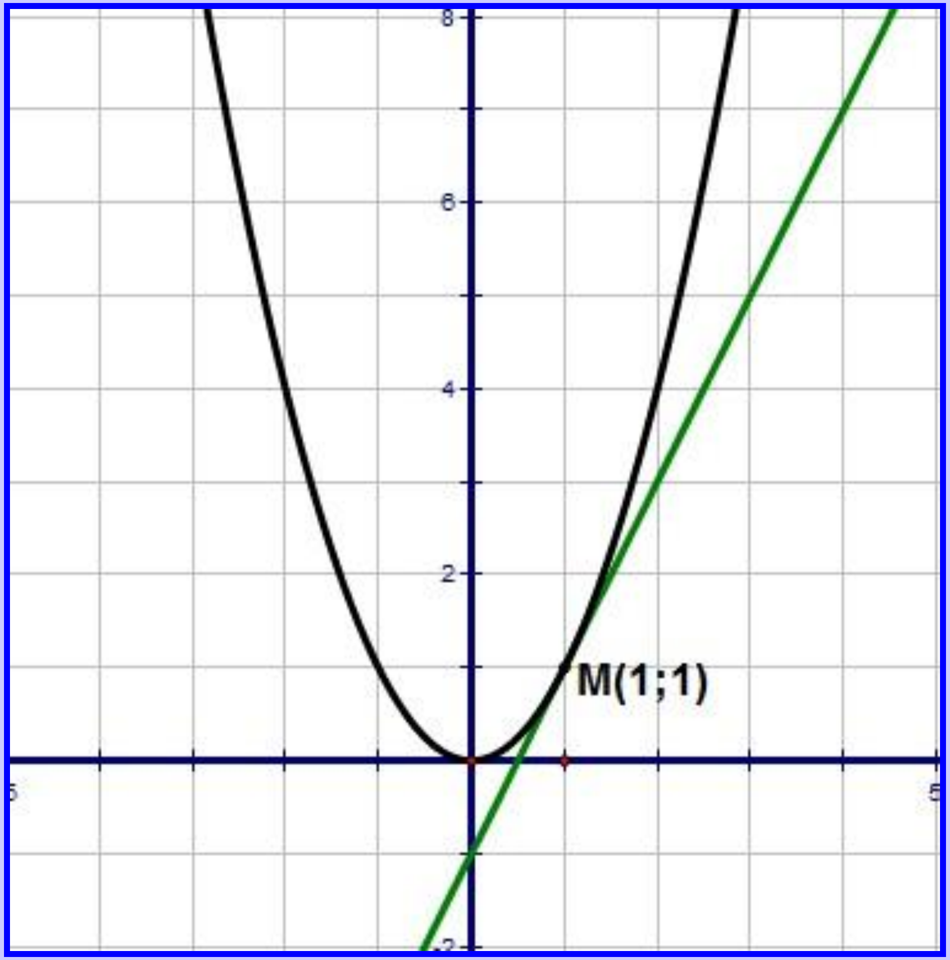
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$



Составить уравнение касательной:

- к графику функции $y = tgx$ в точке $M(0;0)$

$$f(0) = tg0 = 0$$

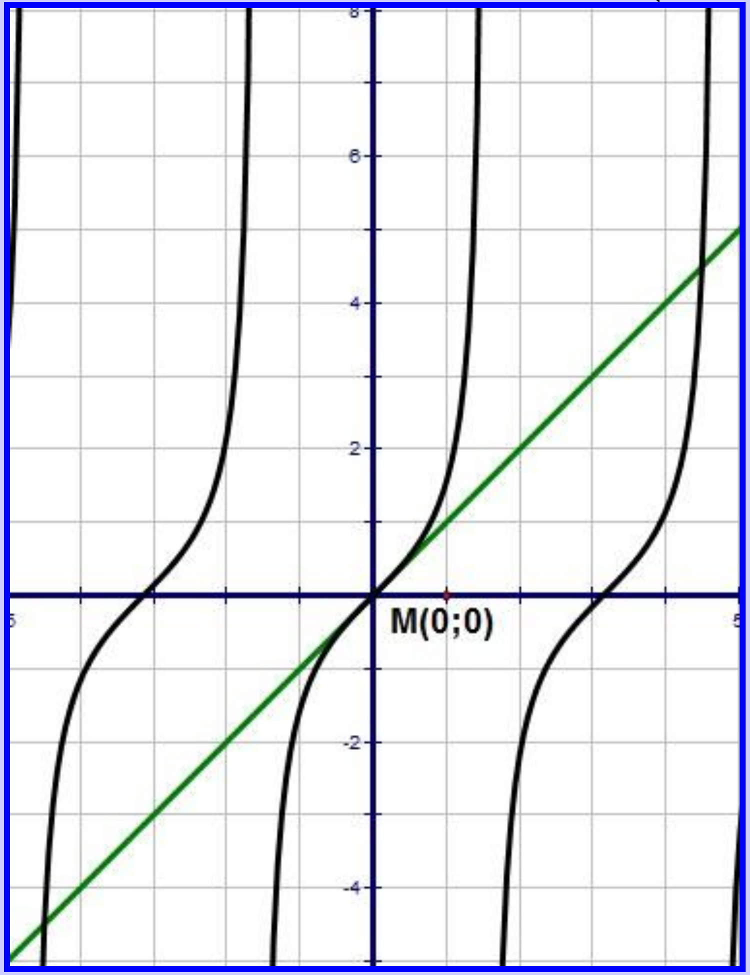
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 0 + 1 \cdot (x - 0)$$

$$y = x$$



Алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции y=f(x).

1. Обозначим абсциссу точки касания буквой *x*=*a*.
2. Вычислим $f(a)$.
3. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$.
4. Подставим найденные числа а , в формулу

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Составить уравнение касательной к графику функции $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=1$.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

1) $a=1$

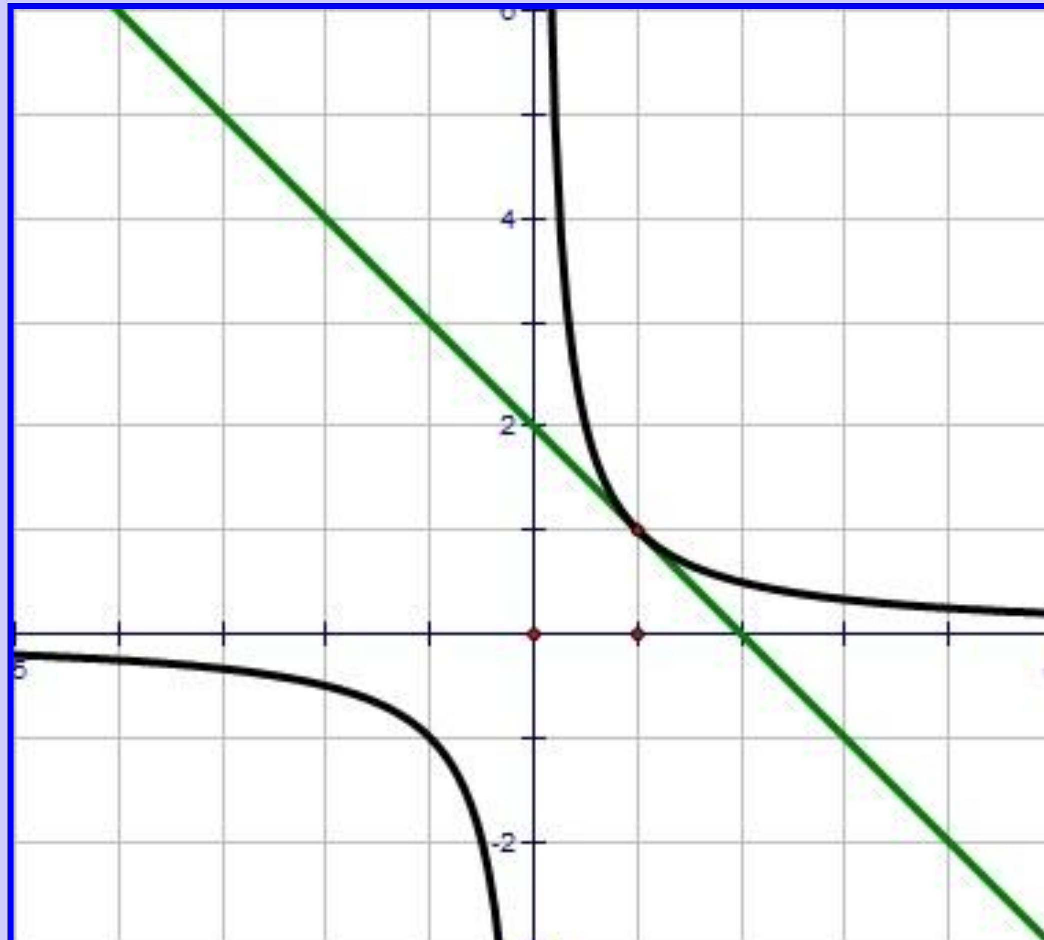
2) $f(a)=f(1)=1$

3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$$f'(a)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

4) $y=1-(x-1)$

$$y=2-x$$



__*Ответ*:__ $y=2-x$

К графику функции $y=\frac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y=4x-5$.

$k_{\text{кас}}=4, k_{\text{кас}}=f'(x)\ f'(x)=4$

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2=x^2$$

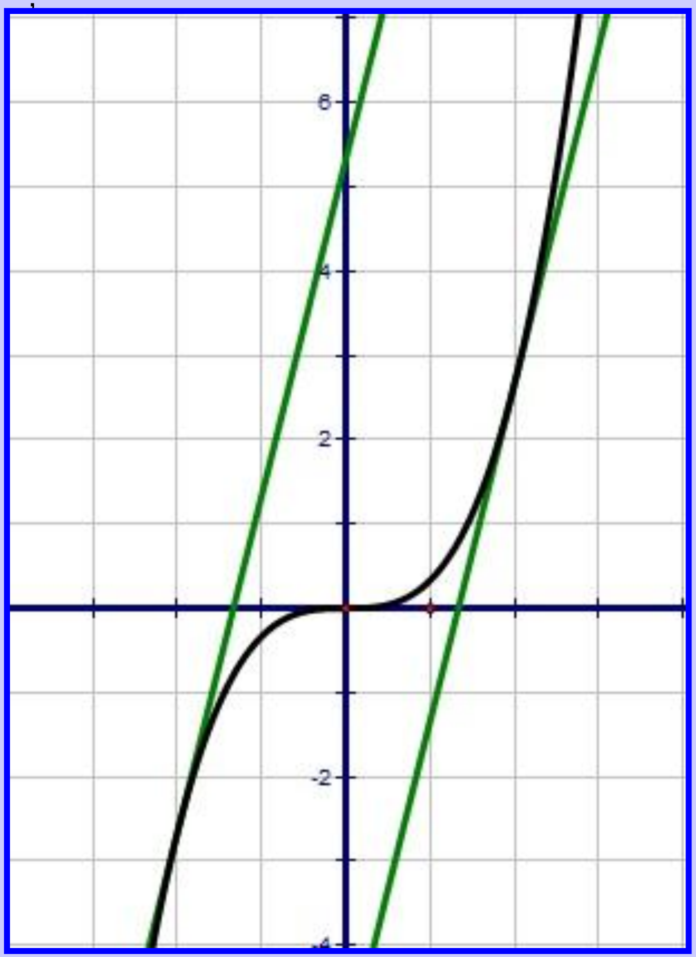
$$f'(a)=a^2\Rightarrow a^2=4,$$

1) $a_1=2, a_2=-2$

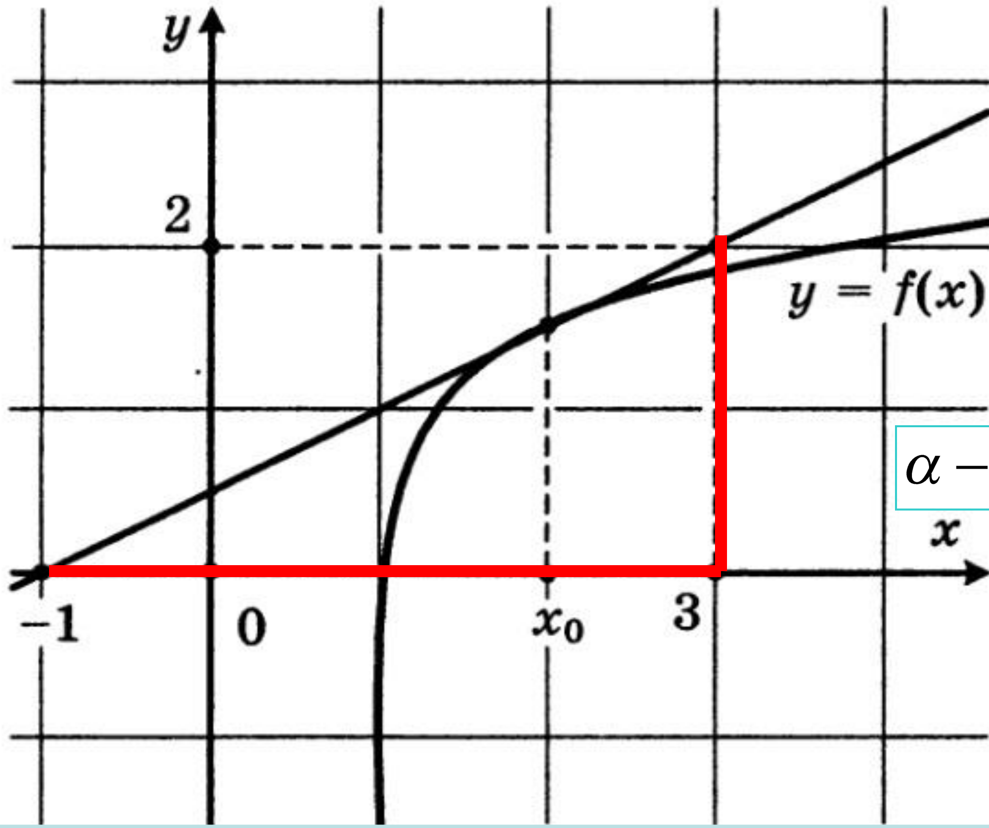
2) $f(a_1)=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$, $f(a_2)=\frac{(-2)^3}{3}=-\frac{8}{3}$

3) $f'(a_1)=f'(a_2)=4$

4) $y=4x+\frac{16}{3}$, $y=4x-\frac{16}{3}$



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

$$\alpha - \text{острый} \Rightarrow tg\alpha > 0$$

$$f'(x_0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\text{Ответ: } \quad f'(2) = 0{,}5$$

Самостоятельная работа

Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой а.

1) $f(x) = x^2 + x+1$, $a=1$

2) $f(x)= x-3x^2$, $a=2$

Ответьте на вопросы:

1. Что называется касательной к графику функции в точке?
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной?