



Презентация: «Решение систем линейных уравнений с параметрами»

Учитель математики
МБОУ СОШ №16
г. Красногорска
Павлова Наталья Ивановна



Задачи с параметрами представляют для учащихся наибольшую сложность. Это самые трудные задания части С Единого государственного экзамена. Универсальных указаний по решению задач с параметрами дать нельзя, приходится рассматривать различные случаи – в зависимости от значений параметров и методы решения задач различны. Но знание некоторых правил и алгоритмов решения необходимо.

- 
- Решить систему уравнений – это значит найти такие значения переменных, которые обращают каждое уравнение системы в верное равенство.
 - Параметр (от греч. parametron отмеривающий) – показатель, величина, значение которой остается постоянным в пределах рассматриваемой задачи.



Что значит решить уравнение с параметром?

- Это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующие значения корней, если они существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет.

Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ где } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ — отличные от нуля числа}$$

Каждое уравнение на плоскости представляет собой некоторую прямую. Для двух прямых на плоскости возможны три случая:

1. Прямые пересекаются. Тогда система уравнений имеет единственное решение.
2. Прямые параллельны. Тогда система не имеет решений.
3. Прямые совпадают. Тогда система имеет бесконечное множество решений.

Для системы линейных уравнений справедливо:

1. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное

множество решений.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное

решение.

Основные методы решения линейной системы :

- метод подстановки;
- метод исключения неизвестного;
- метод определителей.

Пример 1.

При каких a и b система уравнений имеет бесконечное множество решений?

$$\begin{cases} 5x + ay = 2, \\ 15x + 6y = 3b. \end{cases}$$

Решение:

Система имеет бесконечное множество решений, если выполняется равенство:

$$\frac{5}{15} = \frac{a}{b} = \frac{3}{3b} \Rightarrow a = 2, b = 2$$

Ответ: $a = 2, b = 2$.

Пример 2.

При каком a система уравнений имеет решение, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений?

$$\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3. \end{cases}$$

Решение:

1. Если $\frac{1}{a} \neq \frac{-5}{-1}$, то есть $a \neq \frac{1}{5}$, то система имеет

единственное решение.

2. Если $\frac{1}{a} = \frac{-5}{-1} \neq \frac{7}{-3}$, то есть $a = \frac{1}{5}$, то система

не имеет решений.

3. Если $\frac{7}{-3} = \frac{-5}{-1} = \frac{1}{a}$, то система имеет

бесконечное множество решений. Но такого a нет.

ОТВЕТ: 1) при $a \neq \frac{1}{5}$ - единственное решение;
2) при $a = \frac{1}{5}$ - не имеет решений;

3) бесконечное множество решений не
принимает ни при каком a .

Пример 3.

При каких значениях параметра a система двух уравнений

$$\begin{cases} (a+1) \cdot x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a-1 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

Решение:

Система имеет бесконечное множество решений, если выполняются соотношения:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{8}{a+3} = \frac{4a}{3a-1};$$

$$(a+1)(a+1) = 8a$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$a_1 = 3, a_2 = 1$$

$$8(3a - 1) = 4a(a + 3)$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a_1 = 2, a_2 = 1.$$

Ответ: $a = 1$.

Пример 4.

При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (m - 1)y = 3, \\ (m + 1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

Решение:

Система имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, если коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е.

$$\frac{2}{m + 1} = \frac{m - 1}{4}$$

$$m + 1 \neq 0; m \neq -1$$

$$m^2 - 1 = 8,$$

$$m^2 = 9$$

$$m = \pm 3.$$

Если $m=3$, то $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{-3}$ - решений нет;

если $m=-3$, то $\frac{2}{-2} = \frac{4}{-2} = \frac{3}{-3}$ - бесконечное

множество решений.

Ответ: 1) при $m=-3$ – бесконечное множество решений;
2) при $m=3$ – решений нет.

Метод подстановки.

Применяя данный метод, надо учитывать, что каждый из коэффициентов при неизвестных может обращаться в нуль. Поэтому необходимо рассмотреть случай обращения в нуль коэффициента при этом неизвестном.

Пример 5.

Для всех значений параметра ***a*** решить систему:

$$\begin{cases} ax + (a - 1)y = 1 & (1) \\ (a + 1)x - (5 - 3a)y & (2) \end{cases}$$

Решение:

Пусть $a = 0$, тогда $\frac{1 - (a - 1)y}{a} = x = 5, y = -1$.

Пусть $a \neq 0$, тогда из (1) имеем:

$$x = \frac{1 - (a - 1)y}{a}$$

Подставляя $\frac{1 - (a - 1)y}{a}$ вместо x во второе уравнение, получим систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} x = \frac{-(a-1)y}{a}, \\ (a+1) \cdot \frac{1-(a-1)y}{a} - (5-3a)y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1-(a-1)y}{a}, \\ (2a^2 - 5a + 1)y = a^2 - a - 1; \end{cases}$$

$$1) 2a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 17$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$2) a^2 - a - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

при $a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ второе уравнение системы (2) решения не имеет

$\Rightarrow$ исходная система решения не имеет.

при $a \neq \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}; a \neq 0; y = \frac{a^2 - a - 1}{2a^2 - 5a + 1}$, следовательно,

$$x = \frac{1 - (a - 1) \cdot \frac{a^2 - a - 1}{2a^2 - 5a + 1}}{a} = \frac{-a^3 + 4a^2 - 5a}{a(2a^2 - 5a + 1)} = \frac{-a^2 + 4a - 5}{2a^2 - 5a + 1}.$$

Ответ : 1) при $a = 0, x = -5, y = -1$;

2) при $a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ решений нет;

3) при $a \neq 0, a \neq \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ имеем $x = \frac{-a^2 + 4a - 5}{2a^2 - 5a + 1};$
 $y = \frac{a^2 - a - 1}{2a^2 - 5a + 1}.$

Метод исключения.

Пример 6.

Для каждого значения a решить систему:

$$\begin{cases} ax + a^2 y = 1, \\ x + (a - 1)y = a \end{cases}$$

Решение:

1) Пусть $a = 0$, тогда система имеет вид :

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1,$$

$$x - y = 1.$$

- решений нет.

2). Пусть $a \neq 0$, тогда, умножая второе уравнение исходной системы на $-a$, получим:

$$\begin{cases} ax + a^2 y = 1; \\ -ax - a(a-1)y = -a^2. \end{cases}$$

Заменяя второе уравнение системы (2) суммой ее первого и второго уравнений, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} ax + a^2 y = 1, \\ ay = 1 - a^2. \end{cases}$$

Из (2): $y = \frac{1-a^2}{a}$, подставляя это значение в первое

уравнение системы (2), получим

$$x = \frac{1-a^2 y}{a} = \frac{1-a+a^3}{a}.$$

Ответ: 1) при $a=0$, решений нет;

2) при $a \neq 0$,

$$x = \frac{1-a-a^3}{a}; y = \frac{1-a^2}{a}.$$

Пример 7.

Найти все значения параметра a , для каждого из которых числа x и y удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x + y = a, & (1) \\ 2x - y = 3, & (2) \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y$.

Решение:

Сложим уравнения системы, получим

$$3x = a + 3;$$

$$x = \frac{a + 3}{3}; \text{ подставим в (1) уравнение.}$$

$$\frac{a+3}{3} + y = a \Rightarrow y = \frac{a+3}{2}.$$

Т.к. по условию $x > y$, то

$$\frac{a+3}{3} > \frac{a+3}{2} \Rightarrow 3a+9 > 6a-9 \Rightarrow 18 < 3a \Rightarrow a < 9$$

Ответ: при $a < 9$.

Пример 8.

Определить a , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, (1) \\ 2x + (a + 6)y = a + 3. (2) \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

Решение:

Умножим обе части уравнения (1) на $(a+6)$, а (2) на 4.

Получим:

$$\begin{cases} (a^2 + 6a)x - 4(a + 6)y = (a + 1)(a + 6); \\ 8x + 4(a + 6)y = 4a + 12. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$(a^2 + 6a + 8)x = (a + 1)(a + 6) + 4(a + 3). (*)$$

Умножим обе части уравнения (1) на (-2) , а (2) на a :

$$\begin{cases} -2ax + 8y = -2a - 2, \\ 2ax + a(a + 6)y = a(a + 3). \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$(a^2 + 6a + 8)y = -2(a + 1) + a(a + 3). \quad (**)$$

Рассмотрим систему, составленную из (*) и (**):

$$\begin{cases} (a^2 + 6a + 8)x = (a + 1)(a + 6) + 4(a + 3); \\ (a^2 + 6a + 8)y = -2(a + 1) + a(a + 3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a + 4)(a + 2)x = (a + 9)(a + 2); \\ (a + 4)(a + 2)y = (a + 2)(a - 1). \end{cases}$$

При $a \neq \{-4; -2\}$ система имеет решение:

$$x = \frac{a+9}{a+4}; y = \frac{a-1}{a+4};$$

при $a = -2$ система выполняется при любых x и y ,
следовательно, из исходной системы

$$x = -2y + \frac{1}{2}; y \in R.$$

При $a = -4$ левые части уравнения системы равны 0,
правые не равны 0, след., система не имеет решения.

Ответ: $a = -4$.

Решение линейной системы при помощи определителей.

Пусть дана линейная система:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$$

$$(b \neq 0).$$

Тогда решение системы примет вид:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad - \text{ формулы Крамера.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1.$$

- 1) Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение.
- 2) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$, то система не определена, т.е. имеет бесконечное множество решений.
- 3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, то система противоречива и решений не имеет.

Пример 9.

Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ ax + 14y = 15 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

Решение:

Система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$, т.е.,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - a \cdot 7 \neq 0, a \neq 6.$$

Ответ: при $a \neq 6$.

Пример 10.

Найти все a , для которых система

$$\begin{cases} ax - 8y = 12, \\ 2x - 6y = 15 \end{cases} \text{ не имеет решения.}$$

Решение:

$$\text{Т.к. } \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-6) + 8 \cdot 15 = -72 + 120 = 48 \neq 0.$$

Значит, система не имеет решения, если

$$\Delta = 0, \text{ т.е. }, \begin{vmatrix} a & -8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6a + 16 = 0 \Rightarrow a = \frac{8}{3}.$$

Ответ: при $a = \frac{8}{3}$.

Пример 11.

Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 15x + a = 3, \\ 5x + 10y = 1 \end{cases} \text{ имеет бесконечное множество решений.}$$

Решение:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0 \Rightarrow$$

система имеет бесконечное множество решений, если

$$\Delta = 0 \text{ и } \Delta_x = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & a \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 15 - 5a = 0, a = 30.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 30 - a = 0, a = 30.$$

Ответ: при $a=30$.

Литература:

- П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков
Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь; Сервисшкола, 2011.
- Субханкулова С.А. Задачи с параметрами. М.: Илекса, 2012.
- Скорнкова Л.А. Математика 10-11 классы: задачи с параметрами. Волгоград: Учитель, 2010.
- Кочагин В.В. ГИА 2012. Математика: Сборник заданий: 9 класс/ В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2011.