Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

Синтез логических выражений

Синтез логических выражений

A	B	X	
0	0	1 •	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	1 •	$\overline{A}\cdot B$
1	0	0	
1	1	1 •	$A\cdot B$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 1**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат.

распределительный

$$X = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B + A\cdot B = \overline{A}\cdot(\overline{B}+B) + A\cdot B$$

$$= \overline{A} + A\cdot B = (\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+B) = \overline{A}+B$$

исключения третьего

распределительный

исключения третьего

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	X	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$A \cdot \overline{B}$
1	1	1	

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат, который равен $\overline{X}$.

Шаг 4. Сделать инверсию.

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \;\Rightarrow\; X = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} + B$$

Когда удобнее применять 2-ой способ?

Синтез логических выражений (3 способ)

A	B	X	
0	0	0 •	$A+B$
0	1	1	
1	0	0 •	$\overline{A}+B$
1	1	1	

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое **ложно** только для этой строки.

Шаг 3. **Перемножить** эти выражения и упростить результат.

$$X=(A+B)\cdot(\overline{A}+B)\;=A\cdot\overline{A}+B\cdot\overline{A}+A\cdot B+B\cdot B$$

$$=B\cdot(\overline{A}+A)+B=B$$

Синтез логических выражений

A	B	C	X	
0	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

$$X=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+A\cdot C\cdot(\overline{B}+B)$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot C$$
$$=\overline{A}+A\cdot C$$
$$=(\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+C)=\boxed{\overline{A}+C}$$

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	C	X	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	1	

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$
$$= A \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B)$$
$$= A \cdot \overline{C}$$

$$X = \overline{A \cdot \overline{C}} = \boxed{\overline{A} + C}$$

3-й способ – самостоятельно.

Логические основы компьютеров

Предикаты и кванторы

Предикаты

Предикат (логическая функция) – это утверждение, содержащее переменные.

Предикат-свойство – от одной переменной:

P(*N*) = «В городе *N* живут более 2 млн человек»

P(Москва) = 1

P(Якутск) = 0

Простое(x) = «x – простое число»

Спит(x) = «x всегда спит на уроке»

Предикат-отношение – от нескольких переменных:

Больше(x, y) = «$x > y$»

Живет(x, y) = «x живет в городе y»

Любит(x, y) = «x любит y»

Предикаты и кванторы

Предикаты задают **множества:**

$$P(x) = (x > 0)$$

$$P(x, y) = (x + y = 1)$$

Предикаты, которые **всегда истинны**:

$P(x) = (x^2 \geq 0)$ для всех вещественных чисел

«Для любого допустимого x утверждение $P(x)$ истинно»:

квантор

$$\forall x \, P(x)$$

высказывание

Квантор – знак, обозначающий количество.

$\forall = A$ (*all* – все) $\exists = E$ (*exists* – существует)

Кванторы

Какой квантор использовать?

« … $\forall$ моря соленые».

« … $\exists$ кошки серые».

« … $\exists$ числа чётные».

« … $\forall$ окуни – рыбы».

« … $\exists$ прямоугольники – квадраты».

« … $\forall$ квадраты – прямоугольники».

Истинно ли высказывание?

~~$\forall x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x > 0)$~~

✓ $\exists x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x > 0)$

✓ $\forall x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x^2 \geq 0)$

✓ $\exists x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x^2 \geq 0)$

Кванторы

Дано:

A = «Все люди смертны» = 1.

B = «Сократ – человек» = 1.

Доказать:

C = «Сократ смертен» = 1.

Доказательство:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P(x) = «x – человек» Q(x) = «x – смертен»

A = 1: $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(x))$

при «x =Сократ» $\mathrm{P}(\text{Сократ}) \to \mathrm{Q}(\text{Сократ}) = 1$

B = 1: $\mathrm{P}(\text{Сократ}) = 1$

по свойствам импликации $\mathrm{Q}(\text{Сократ}) = 1$

Несколько кванторов

Квантор **связывает** одну переменную:

$\forall x\, \mathrm{P}(x,y)$ – предикат от переменной y

$\exists y\, \mathrm{P}(x,y)$ – предикат от переменной x

Два квантора связывают две переменных:

$\forall x\, \exists y\, \mathrm{P}(x,y)$ – высказывание «для любого x существует y, при котором $\mathrm{P}(x,y)=1$»

$\exists x\, \forall y\, \mathrm{P}(x,y)$ – высказывание «существует x, такой что при любом y верно $\mathrm{P}(x,y)=1$»

Сравните два последних высказывания при:

$$\mathrm{P}(x,y) = (x+y=0) \qquad \mathrm{P}(x,y) = (x \cdot y = 0)$$

Отрицание

НЕ «для любого x выполняется P(x)» ⇔ «существует x, при котором не выполняется P(x)»

$$\overline{\forall x\,\mathrm{P}(x)} = \exists x\,\overline{\mathrm{P}(x)}$$

НЕ «существует x, при котором выполняется P(x)» ⇔ «для любого x не выполняется P(x)»

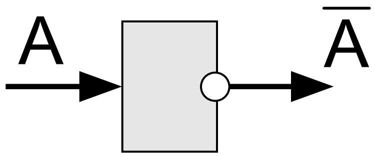
$$\overline{\exists x\,\mathrm{P}(x)} = \forall x\,\overline{\mathrm{P}(x)}$$

Логические основы компьютеров

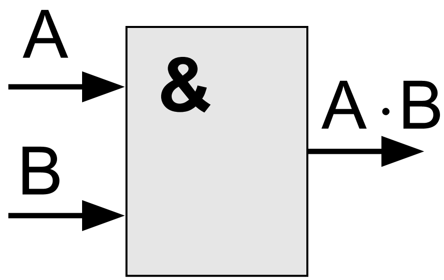
Логические элементы компьютера

Логические элементы компьютера

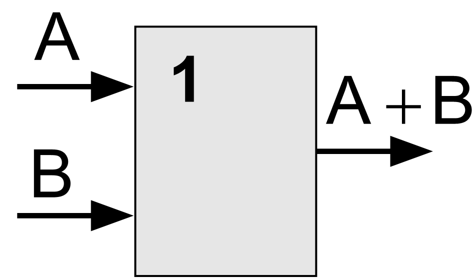
значок инверсии



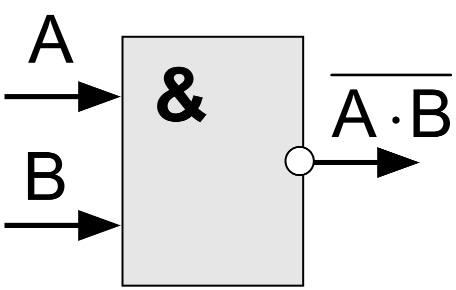
НЕ



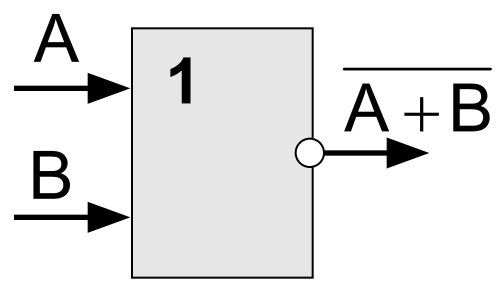
И



ИЛИ



И-НЕ



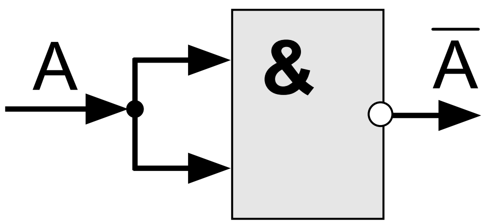
ИЛИ-НЕ

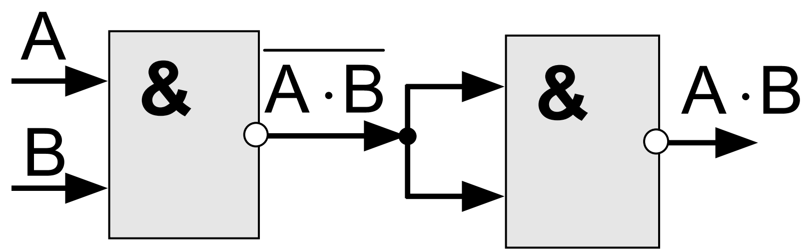
Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ.**

НЕ: $\overline{A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A \cdot A}$

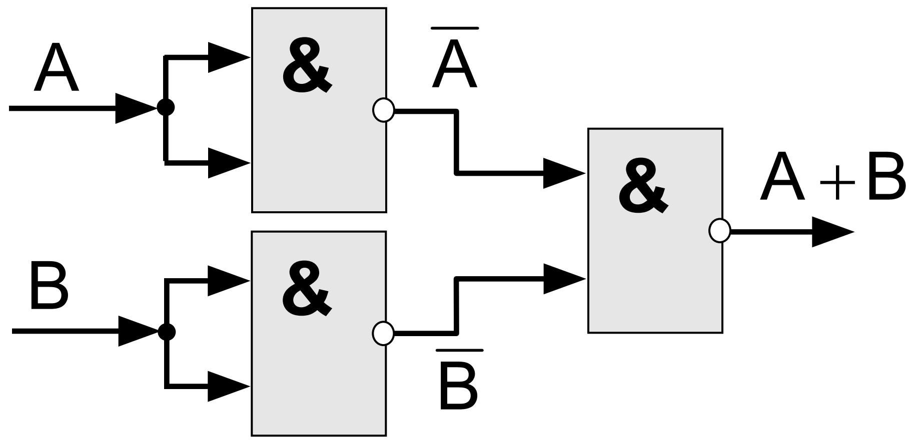
И: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$





ИЛИ:

$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$

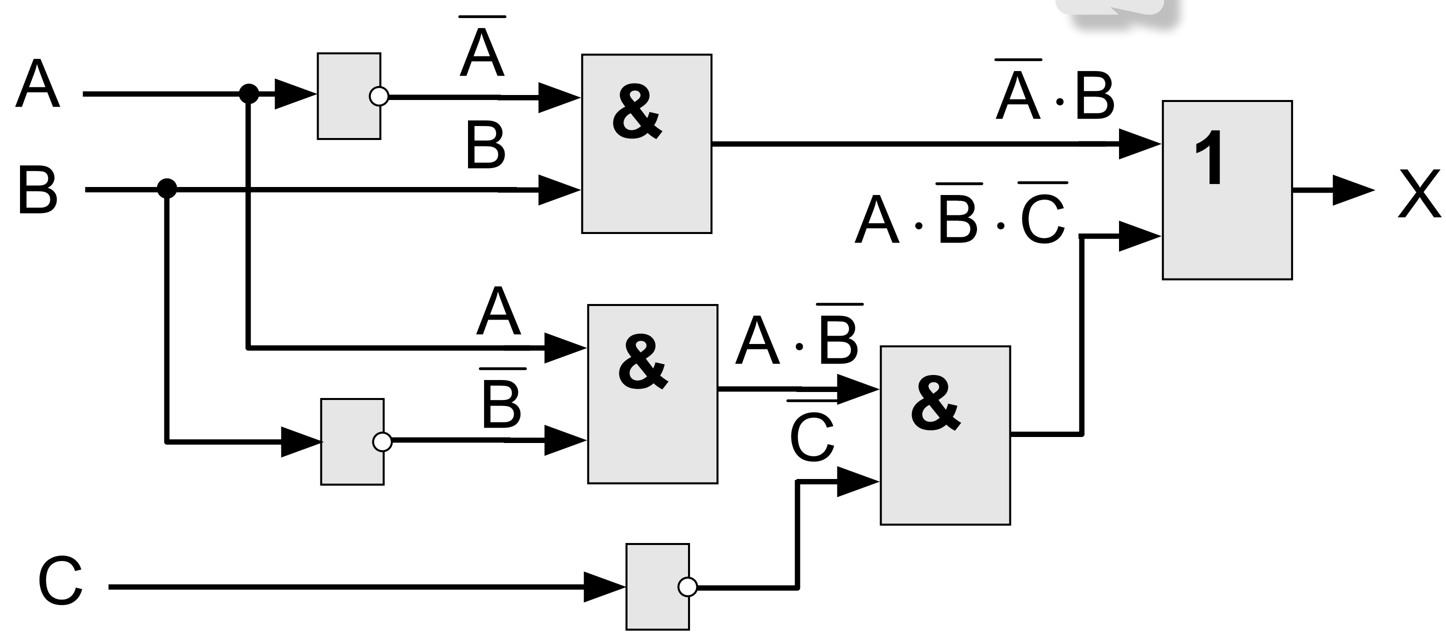


Составление схем

последняя операция - ИЛИ

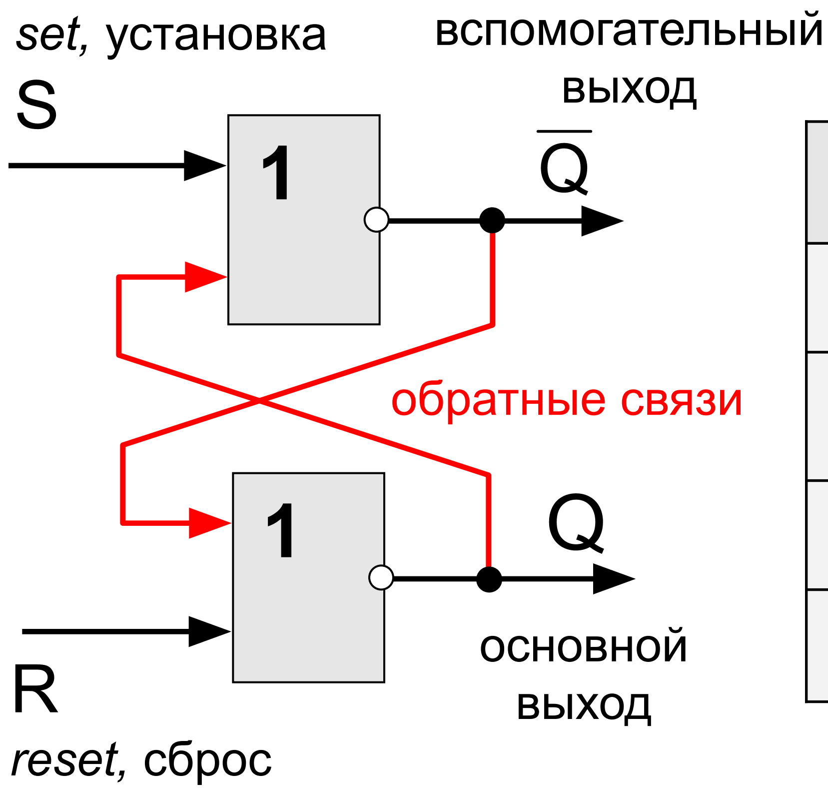
$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

И



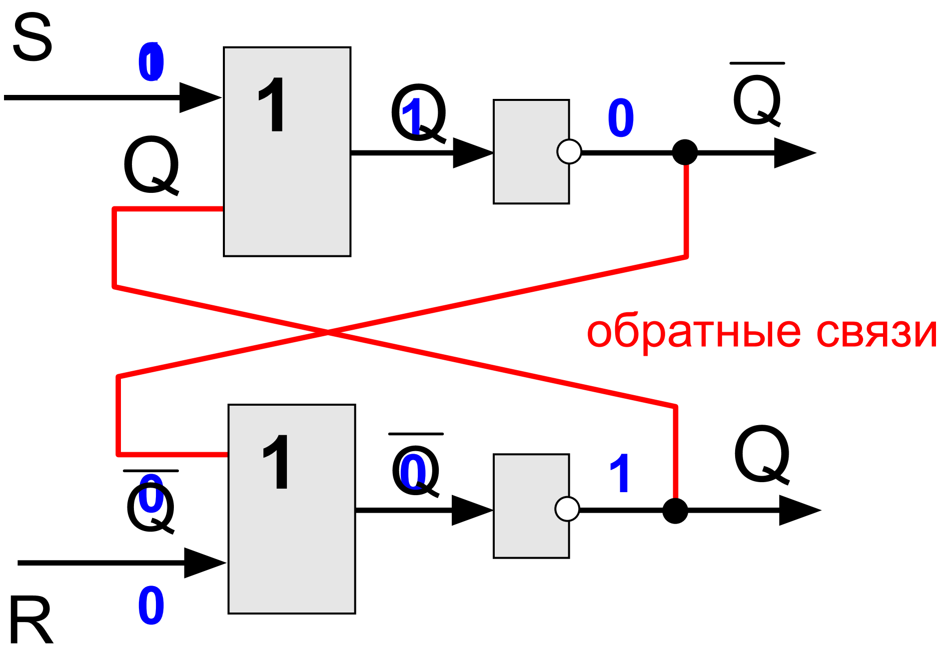
Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ.**



S	R	Q	$\overline{Q}$	режим
0	0	Q	$\overline{Q}$	**хранение**
0	1	0	1	**сброс**
1	0	1	0	**установка 1**
1	1	0	0	**запрещен**

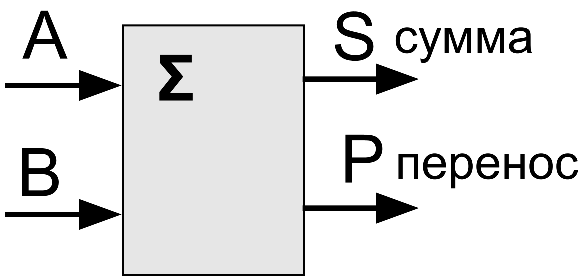
Триггер – таблица истинности



S	R	Q	$\overline{Q}$	режим
0	0	Q	$\overline{Q}$	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	0	0	запрещен

Полусумматор

Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$P = A \cdot B$

$S = A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

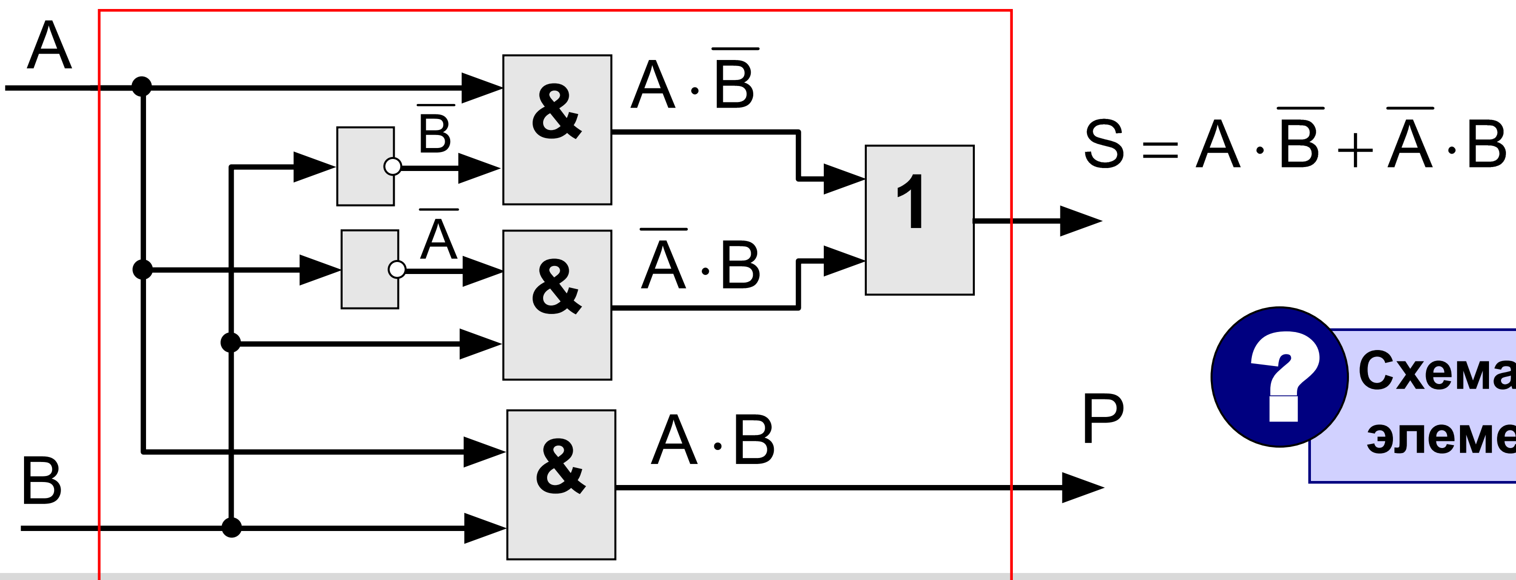
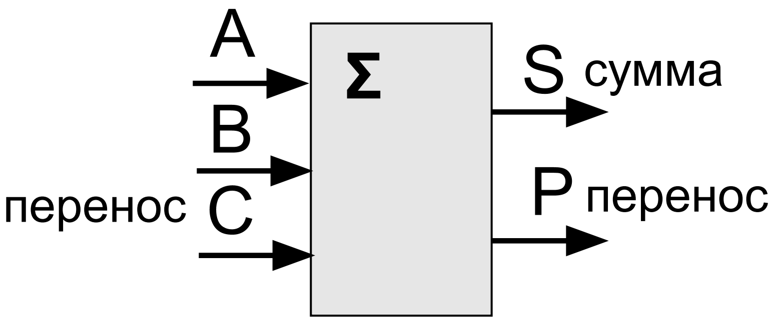


Схема на 4-х элементах?

Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.



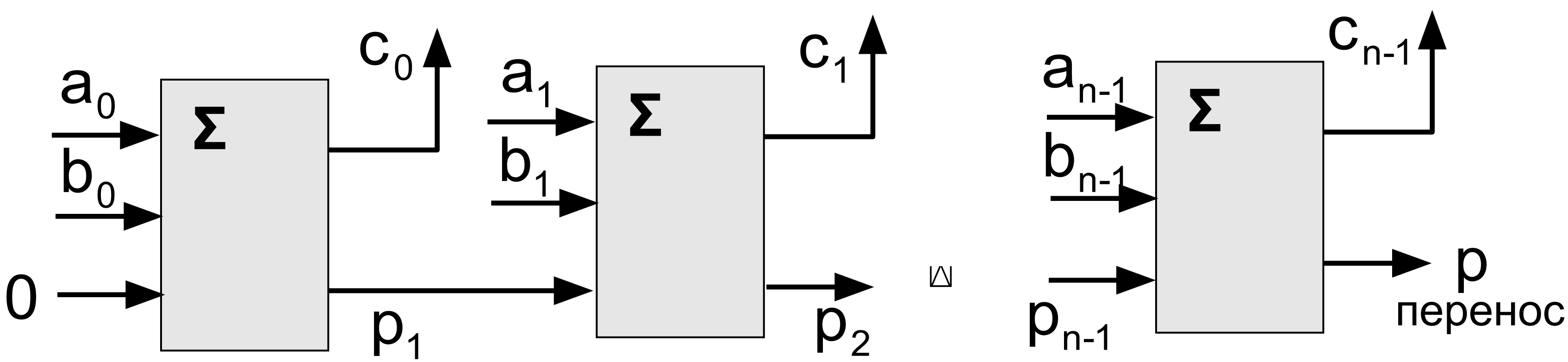
A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n-разрядных двоичных числа.

$$
\begin{array}{rl}
 & A = \quad a_{n-1}\; a_{n-2}\; \ldots\; a_0 \\
+ & B = \quad b_{n-1}\; b_{n-2}\; \ldots\; b_0 \\
\hline
 & C = \boxed{p}\; c_{n-1}\; c_{n-2}\; \ldots\; c_0
\end{array}
$$

перенос



Логические основы компьютеров

Логические задачи

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: «Чей именно проект был принят?», министры дали такие ответы:

Россия — «Проект не наш (1), проект не США (2)»;
США — «Проект не России (1), проект Китая (2)»;
Китай — «Проект не наш (1), проект России (2)».

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

! **В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!**

Использование алгебры логики

Задача 3. Следующие два высказывания истинны:

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет.
2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

Решение:

… если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 1$

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 0$ $\boxed{\overline{A \to \overline{C}} = 1}$

2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе. $\boxed{B \oplus C = 1}$

$$\left(\overline{A \to \overline{C}}\right) \cdot (B \oplus C) = 1$$

$$\left(\overline{\overline{A} + \overline{C}}\right) \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\boxed{A = 1,\ \ B = 0,\ \ C = 1}$$

Использование алгебры логики

Задача 4. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал «Память не могла выйти из строя». Его сын предположил, что сгорел процессор, а винчестер исправен. Мастер по ремонту сказал, что с процессором все в порядке, а память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали все верно, а третий – все неверно. Что же сломалось?

Решение:

A – неисправен процессор, **B –** память, **C –** винчестер

хозяин: $B = 0, \ \overline{B} = 1$ сын: $A \cdot \overline{C} = 1$ мастер: $\overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся хозяин: $X_1 = \overline{\overline{B}} \cdot A \cdot \cancel{\overline{C} \cdot \overline{A}} \cdot B = 1$

Если ошибся сын: $X_2 = \overline{B} \cdot \overline{A \cdot \cancel{\overline{C}} \cdot \cancel{\overline{A}}} \cdot B = 1$

Если ошибся мастер: $X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = 1$

$$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{B}) = 1$$

$$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} = 1$$

$A = 1$
$B = 0$
$C = 0$

Использование алгебры логики

Задача 5. На вопрос «Кто из твоих учеников изучал логику?» учитель ответил: «Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». Кто же изучал логику?

Решение: **A –** логику изучал Андрей, **B –** Борис, **C –** Семен

«Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис». $A \to B = 1$

«Неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». $C \to B = 0$ $\quad \overline{C \to B} = 1$

1 способ:

$$(A \to B) \cdot (\overline{C \to B}) = 1$$

$$(\overline{A} + B) \cdot (\overline{\overline{C} + B}) = 1$$

$$(\overline{A} + \cancel{B}) \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\overline{A} \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$A = 0$

$B = 0$

$C = 1$

Использование алгебры логики

Задача 5. На вопрос «Кто из твоих учеников изучал логику?» учитель ответил: «Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». Кто же изучал логику?

Решение: **A** – логику изучал Андрей, **B** – Борис, **C** – Семен

«Неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис».

«Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис».

2 способ: $C \to B = 0$ $A \to B = 1$

C	B	$C \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$B = 0$

$C = 1$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A = 0$

$B = 0$

$C = 1$

Использование алгебры логики

Задача 6. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Аськин?

Решение: **A –** виновен Аськин, **B –** Баськин, **C –** Сенькин

«Если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин».

$$(\overline{A}+B)\to C=1$$

«Если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен».

$$\overline{A}\to\overline{C}=1$$

$$((\overline{A}+B)\to C)\cdot(\overline{A}\to\overline{C})=1$$

$$((\overline{\overline{A}+B})+C)\cdot(A+\overline{C})=1$$

$$(A\cdot\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{C})=1$$

$$A=0$$

$\rightarrow$ $C\cdot\overline{C}\cancel{=}1$ $\rightarrow$

Аськин виновен

Использование алгебры логики

Задача 6б. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Баськин?

Решение: **A –** виновен Аськин, **B –** Баськин, **C –** Сенькин

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$B = 0$$

$\rightarrow$ $A = 1$

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$B = 1$$

$\rightarrow$ $C \cdot A = 1$

Не получили противоречия: возможно, что и виновен

Использование алгебры логики

Задача 6в. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Сенькин?

Решение: **A** – виновен Аськин, **B** – Баськин, **C** – Сенькин

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$C = 0$$

$\rightarrow$ $A \cdot \overline{B} = 1$

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$C = 1$$

$\rightarrow$ $A = 1$

Не получили противоречия: возможно, что и виновен

Логические основы компьютеров

Задачи ЕГЭ

Задачи ЕГЭ

Для какого из указанных значений X истинно высказывание **¬((X > 2)→(X > 3))**?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}$$

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}=1 \quad\Rightarrow\quad (X>2)\to(X>3)=0$$

$$A\to B=0 \quad\Rightarrow\quad A=1,\;\; B=0$$

$$\left.\begin{matrix}X>2\\X\le 3\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad X=3$$

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению **A ∧ ¬(¬B ∨ C)**.

1) **¬A ∨ ¬B ∨ ¬C**
2) **A ∨ ¬B ∨ ¬C**
3) **A ∧ B ∧ ¬C**
4) **A ∧ ¬B ∧ C**

$$A\cdot\overline{(\overline{B}+C)}$$

1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
2) $A+\overline{B}+\overline{C}$
3) $A\cdot B\cdot\overline{C}$
4) $A\cdot B\cdot C$

Задачи ЕГЭ (2)

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(50 < X \cdot X) \to (50 > (X+1) \cdot (X+1))$$

В целых числах:

A

B

$$50 < X^2 \quad \Leftrightarrow \quad |X| \geq 8$$

$$50 > (X+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |X+1| \leq 7 \quad \Leftrightarrow$$

$$A \to B = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=0,\quad B=0 \\ A=0,\quad B=1 \\ A=1,\quad B=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{max} = 7}$$

Задачи ЕГЭ (6)

Перед началом Турнира Четырех болельщики высказали следующие предположения по поводу своих кумиров:

А) Макс победит, Билл – второй;
В) Билл – третий, Ник – первый;
С) Макс – последний, а первый – Джон.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов. Какое место на турнире заняли Джон, Ник, Билл, Макс? (В ответе п
пробелов места участников в

	A	B	C
Джон			1
Ник		1	
Билл	2	3	
Макс	1		4

Ответ: 3124

Задачи ЕГЭ (7)

На одной улице стоят в ряд 4 дома, в каждом из них живет по одному человеку. Их зовут Василий, Семен, Геннадий и Иван. Известно, что все они имеют разные профессии: скрипач, столяр, охотник и врач. Известно, что

(1) Столяр живет правее охотника.
(2) Врач живет левее охотника.
(3) Скрипач живет с краю.
(4) Скрипач живет рядом с врачом.
(5) Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом.
(6) Иван живет рядом с охотником.
(7) Василий живет правее врача.
(8) Василий живет через дом от Ивана.

Определите, кто где живет, и запишите начальные буквы имен жильцов всех домов слева направо. Например, если бы в домах жили (слева направо) Кирилл, Олег, Мефодий и Пафнутий, ответ был бы КОМП.

Задача Эйнштейна

Условие: Есть 5 домов разного цвета, стоящие в ряд. В каждом доме живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Известно, что:

1. Англичанин живет в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьет чай.
4. Зеленой дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Человек, который курит *Pallmall*, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьет молоко.
8. Жилец из желтого дома курит *Dunhill*.
9. Норвежец живет в первом доме.
10. Курильщик *Marlboro* живет около того, кто держит кошку.
11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит *Dunhill*.
12. Курильщик *Winfield* пьет пиво.
13. Норвежец живет около голубого дома.
14. Немец курит *Rothmans*.
15. Курильщик *Marlboro* живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Вопрос: У кого живет рыба?