# Комбинаторика

1. Если слово состоит из ***L* букв**, причем есть

$n_1$ вариантов выбора первой буквы,

$n_2$ вариантов выбора второй буквы и т.д.,

то число возможных слов вычисляется как произведение

$$N = n_1 * n_2 * \ldots * n_L$$

2. Если слово состоит из ***L* букв,** причем

каждая буква может быть выбрана ***n* способами**,

то число возможных слов вычисляется как

$$N = n^L$$

# Прямой подсчёт количества вариантов

## Тип №1

1. Вася составляет **4-буквенные слова**, в которых есть только буквы ***Л, Е, Т, О,*** причём буква **Е** используется в каждом слове **хотя бы 1 раз**. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем.

   Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

**Решение. Слова- 4 буквы, алфавит- 4 буквы**

Число возможных слов вычислим по формуле: **N = n1 * n2 * n3 * … =**

где **n1** — количество вариантов выбора первой буквы и т.п.

Рассмотрим все варианты расположения буквы Е:

1. **Е???** или
2. **?Е??** или
3. **??Е?** или
4. **???Е**

Где вопросительный знак означает любую букву из Л, Е, Т, О.

Подсчитаем по формуле количество слов для **варианта 1**:

**Е??? = 1 * 4 * 4 * 4 = 64**

т.к. на первой позиции слева — только 1 буква — Е, на каждой последующей — одна из четырех букв Л, Е, Т, О.

Подсчитаем по формуле количество слов для **варианта 2**: получим тоже 64 слова, но нужно учесть, что все слова, в который первая буква Е мы уже подсчитали, поэтому считаем только слова, где на первом место стоит какая-то другая буква (Л, Т, О)

**?Е?? = 3 * 1 * 4 * 4 = 48**

Подсчитаем по формуле количество слов для **варианта 3**; учтем, что на первой и второй позициях букву Е мы уже посчитали в предыдущих вариантах:

**??Е? = 3 * 3 * 1 * 4 = 36**

Подсчитаем по формуле количество слов для **варианта 4**; учтем, что на первой и второй позициях букву Е мы уже посчитали в предыдущих вариантах:

**???Е = 3 * 3 * 3 * 1 = 27**

Т.к. каждый вариант связан операцией ИЛИ, то теперь суммируем все варианты:

**64 + 48 + 36 + 27 = 175**

2. Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы **Л, Е, Т, О,** причём буква Е используется в каждом слове хотя бы 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

**Решение. Слова – 5 букв, алфавит – 4 буквы.**

Варианты расположения буквы Е.

**1. Е???? = 1*4*4*4*4 = 256**

**2. ?Е??? = 3*1*4*4*4 = 192**

**3. ??Е?? = 3*3*1*4*4 = 144**

**4. ???Е? = 3*3*3*1*4 = 108**

**5. ????Е = 3*3*3*3*1 = 81**

Всего вариантов: 256+192+144+108+81 = 781

3. Олег составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Олег использует

**4-буквенные слова**, в которых есть только буквы *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е*, причём буква **Г** появляется **ровно 1 раз** и только на первом или последнем месте. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Олег?

**Решение:**

Рассмотрим варианты, когда буква Г встречается на 1 или последнем месте:

На первом месте **Г ? ? ? = 1 * 5 * 5 * 5 = $5^3$ = 125**

На последнем месте **? ? ? Г = 5 * 5 * 5 * 1 = $5^3$ = 125**

Вместо знаков **?** может стоять 1 из пяти букв (А, Б, В, Д, Е), т.к. буква Г там стоять не может.

Теперь суммируем количество найденных вариантов:

**125 + 125 = 250**

4. Олег составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Олег использует **5-буквенные слова**, в которых есть только буквы ***З,И,М, А***, причём буква **А** появляется не более одного раза и только на последнем месте. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем.

Сколько различных кодовых слов может использовать Олег?

**Решение:**

Так как буква **А** появляется не более одного раза и только на последнем месте, значит она может либо появиться 1 раз на последнем месте, либо не появиться совсем. Рассмотрим варианты, когда буква Г встречается 1 раз на последнем месте и встречается 0 раз:

<u>1 раз:</u> ? ? ? ? **А** = 3 * 3 * 3 * 3 * 1 = $3^4$ = 81

<u>0 раз:</u> ? ? ? ? ? = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = $3^5$ = 243

Вместо знаков **?** может стоять 1 из трех букв (***З,И,М*** ), т.к. буква **А** там стоять не может

Теперь суммируем количество найденных вариантов:

**81 + 243 = 324**

2. Вася составляет **4-буквенные слова**, в которых есть только буквы **П, И, Р, О, Г**, причём в каждом слове буква **О** может встречаться не более двух раз, при этом, если она есть, то перед ней обязательно стоит согласная буква. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Возможны 3 случая:

1. нет буквы «О» – всего слов – $4^4$=256
2. встречается 1 раз → «О» может занимать место 2, 3, 4, т.к. перед ней должна стоять согласная

3 варианта

? О * *

* ? О *

* * ? О

На месте? могут стоять 3 буквы (П, Р, Г)

На месте*могут стоять 4 буквы (П, И, Р, Г) $3*4^2*3=144$

3. встречается 2 раза ? О ? О - 1 вариант 3*1*3*1=9

(на месте ? по условию могут быть 3 буквы П,Р,Г)

Всего: 256+144+9 = 409

# Исключение из общего количества вариантов

## Тип №2.

1. Вася составляет **4-буквенные слова**, в которых есть только буквы ***Б, У, Ф, Е, Р,*** причём буква **Р** используется в каждом слове **хотя бы 2 раза**. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем.

Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

**Решение:**

Число возможных слов вычислим по формуле: $\mathbf{N = n1 * n2 * n3 * \ldots * nL = n^L}$

где **n1** — количество вариантов выбора первой буквы и т.п.

Сначала по формуле получим все варианты для всех пяти букв, включая букву Р:

$5 * 5 * 5 * 5 = 5^4 = 625$

**Из общего количества вариантов нам необходимо исключить те варианты, где Р не встречается вообще и Р встречается только 1 раз.**

**Буква Р не встречается совсем:**

$4 * 4 * 4 * 4 = 4^4 = 256$

**Буква Р встречается один раз:**

р ? ? ? = $1 * 4 * 4 * 4 = 4^3$

? р ? ? = $4 * 1 * 4 * 4 = 4^3$

? ? р ? = $4 * 4 * 1 * 4 = 4^3$

? ? ? р = $4 * 4 * 4 * 1 = 4^3$

Получим $4^3 * 4 = 256$

Теперь вычтем из общего количества найденные варианты:

**625 - 256 - 256 = 113**

# Тренировка

1. Маша составляет шестибуквенные слова перестановкой букв слова КАПКАН. При этом она избегает слов с двумя подряд одинаковыми буквами. Сколько различных кодов может составить Маша?

1. Ответ: 84

- Решение: из общего количества возможных слов исключим те слова, в которых одинаковые буквы идут подряд.
- Общее количество возможных слов: 6! / (2!*2!) = 180
- (перестановка 6 буква КАПКАН, при этом К повторяется 2 раза, А повторяется 2 раза).
- Подсчитаем, сколько существует слов, в которых подряд идут буквы КК или АА. Для этого склеим КК в одну букву К и АА в одну букву А, получаем перестановку букв КАПН, 4! = 24.
- Подсчитаем, сколько существует слов, в которых буквы КК идут подряд (т.е. склеены), а буквы А никогда не стоят рядом (перестановка букв КАПАН): 5! / 2! – 24 = 36 (из общего количества таких слов вычитаем слова, в которых буквы А идут подряд).
- Подсчитаем, сколько существует слов, в которых буквы АА идут подряд, а буквы К не стоят рядом: 5!/2! – 24 = 36.
- Ответ: 180 – 36 – 36 – 24 = 84.

2. Маша составляет 5-буквенные коды из букв В, У, А, Л, Ь. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код буква Ь не может стоять на первом месте и перед гласной. Сколько различных кодов может составить Маша?

2. Ответ: 60

- Решение: из общего количества возможных слов исключим те слова, в которых буква Ь стоит первой или перед гласной.
- Общее количество возможных слов: 5! = 120.
- Буква Ь стоит на первом месте: 4! = 24.
- Буква Ь стоит перед гласной (но не на первом месте) => буква Ь стоит либо перед В, либо перед Л. Количество вариантов, когда буква Ь стоит перед В, но не первой (склеиваем эти буквы, т.е. переставляем У, А, Л, ЬВ): 3*3*2*1=18. Такое же количество вариантов, когда Ь стоит перед Л (но при этом не первая буква в слове).
- Ответ: 120 – 24 – 18 – 18 = 60.

3. Вася составляет 4-буквенные коды из букв У, Л, Е, Й. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и не может содержать сочетания ЕУ. Сколько различных кодов может составить Вася?

3. Ответ: 14

- Решение: из общего количества возможных слов исключим те слова, в которых буква Й стоит первой или содержит сочетание ЕУ.
- Общее количество возможных слов: 4! = 24.
- Буква Й стоит на первом месте: 3! = 6.
- Есть сочетание ЕУ и при этом Й не стоит на первом месте (перестановка ЕУ, Й, Л): 2*2*1 = 4.
- Ответ: 24 – 6 – 4 = 14.

Несмотря на то, что конкретно эту задачу можно решить простым перебором, нужно знать общий способ решения, т.к. в других количество возможных вариантов перестановок может быть очень большим.

4. Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы К, А, Т, Е, Р, причём буква Р используется в каждом слове хотя бы 2 раза. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

4. Ответ: 821

- Решение: из общего количества возможных слов исключим те слова, в которых буква Р встречается 1 раз или не встречается вообще.
- Общее количество возможных слов: 5*5*5*5*5.
- Буква Р не встречается: 4*4*4*4*4.
- Буква Р встречается 1 раз: 1*4*4*4*4 + 4*1*4*4*4 + 4*4*1*4*4 + 4*4*4*1*4 + 4*4*4*4*1 = 4*4*4*4*5.
- Ответ: $5^5 – 4^4*5 – 4^4*4 = 5^5 – 4^4*9 = 821$.

5. Вася составляет 4-буквенные слова, в которых есть только буквы П, И, Р, О, Г, причём в каждом слове буква О может встречаться не более двух раз, при этом, если она есть, то перед ней обязательно стоит согласная буква. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

5. Ответ: 409

- Решение: прямой подсчёт.
- Буква О не встречается: 4*4*4*4.
- Буква О встречается 1 раз, перед ней стоит согласная П, Р или Г. Склеиваем: ПО, П, И, Р, Г, получаем: 1*4*4 + 4*1*4 + 4*4*1 = 4*4*3. Аналогичное количество решений получается, если склеивать РО и ГО, т.е. общее количество: 4*4*3*3.
- Буква О встречается 2 раза, перед ней стоит согласная П, Р или Г. Склеиваем: ПО, РО, ГО. Т.к. буквы должно быть 4, то общее количество вариантов: 3*3.
- Ответ: $4^4 + 4^2*3^2 + 3^2 = 409$.

6. Иван составляет 3-буквенные слова из букв А, Б, В, Г, Д, Я. Буква Я в слове может быть только одна (или ни одной) и только на первой или последней позициях. Сколько различных кодовых слов может составить Иван?

6. Ответ: 175

- Решение: прямой подсчёт.
- Буква Я не встречается: 5*5*5.
- Буква Я встречается 1 раз, первая буква в слове: 1*5*5.
- Буква Я встречается 1 раз, последняя буква в слове: 5*5*1.
- Ответ: $5^3 + 2*5^2 = 175$.

7. Дано слово КОРАБЛИКИ. Таня решила составлять новые 5-буквенные слова из букв этого слова по следующим правилам:  1) слово начинается с гласной буквы; 2) гласные и согласные буквы в слове должны чередоваться; 3) буквы в слове не должны повторяться. Сколько существует таких слов?

7. Ответ: 72

- Решение: прямой подсчёт.
- 3 гласных буквы => 3 варианта для первой буквы.
- Согласных букв – 4, т.е. 4 варианта для 2-й буквы.
- Следующая буква должна быть гласная, но т.к. нельзя повторяться, осталось только 2 варианта для 3-й буквы.
- 4-я буква снова согласная, повторяться нельзя => 3 варианта.
- 5-я буква гласная, единственный вариант.
- Ответ:3*4*2*3*1 = 72.

8. Вася составляет 5-буквенные коды из букв М, А, Н, О, К. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы О и не может содержать сочетания АО. Сколько различных кодов может составить Вася?

8. Ответ: 72

- Решение: исключение из общего количества.
- Общее количество слов: 5! = 120.
- Слова, начинающиеся с буквы О: 1*4*3*2*1 = 24.
- Слова, содержащие АО (перестановка М, Н, К, АО): 4! = 24.
- Ответ: 120 – 24 – 24 = 72.

9. Маша составляет 7-буквенные коды из букв А, Й, С, Б, Е, Р, Г. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код буква Й не может стоять на первом месте и перед гласной. Сколько различных кодов может составить Маша?

9. Ответ: 3120

- Решение: исключение из общего количества.
- Общее количество слов: 7!
- Й на первом месте: 1*6*5*4*3*2*1 = 6!
- Й не на первом месте, но перед гласной: предположим, перед гласной А, т.е. сочетание ЙА. Перестановка ЙА, С , Б, Р, Г, Е, на первом месте не Й, т.е.: 5*5*4*3*2*1 = 5*5!

  Аналогичное количество для ЙЕ. В сумме – 10*5!
- Ответ: 7! – 6! – 10*5! = 5!*(6*7 – 6 – 10) = 120 * 26 = 3120.

10. Петя составляет семибуквенные слова перестановкой букв слова ТРАТАТА. Сколько всего различных слов может составить Петя?

10. Ответ: 140

- Решение: прямой подсчёт.
- Если бы все буквы были разными, то было бы 7!, но буква А встречается 3 раза (делим на 3!) и буква Т встречается 3 раза (ещё раз делим на 3!).
- Ответ: 7! / (3!*3!) = 140.

11. Артур составляет 6-буквенные коды из букв З, Д, А, Н, И, Е. Каждую букву нужно использовать ровно один раз, при этом нельзя ставить рядом две гласные. Сколько различных кодов может составить Артур?

11. Ответ: 144

- Решение: исключение из общего количество.
- Общее количество слов: 6!
- Две гласные идут подряд: склеим АИ, получаем перестановку АИ, Е, З, Д, Н: 5!, при этом мы могли склеить ИА (ещё 5!), могли склеить ЕИ, ИЕ, АЕ, ЕА, всего 6 вариантов, т. е. 6*5!
- В предыдущем пункте есть ошибка: мы могли дважды посчитали склейку АЕИ и подобные им (ЕАИ, АИЕ...). Вычтем их из 6*5! Для этого подсчитаем, сколько всего вариантов, когда 3 гласные идут подряд, это перестановка АИЕ, З, Д, Н (т.е. 4!), при этом буквы АИЕ могут быть расставлены 6 способами. В итоге получаем 6*5! – 6*4! = 6*4!*4 = 24*4!
- Ответ: 6! – 24*4! = 144.

12. Василий составляет 4-буквенные коды из букв М, О, И, С, Е, Й. Каждую букву можно использовать любое количество раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и должен содержать хотя бы одну гласную. Сколько различных кодов может составить Василий?

12. Ответ: 1026

- Решение: исключение из общего количество.
- Общее количество слов: $6^4$.
- Слов, начинающихся с Й: $1*6^3$.
- Слов, не содержащих гласные и не начинающихся с Й: на первом месте либо М, либо С, на остальных местах одна из букв М, С, Й. Получаем: $2*3^3$.
- Ответ: $6^4 – 6^3 – 2*3^3 = 1026$.

13. Из букв слова К О Р Т И К составляются 6-буквенные последовательности. Сколько можно составить различных последовательностей, если известно, что в каждой из них содержится не менее 3 согласных?

13. Ответ: 12285

- Решение: прямой подсчёт.
- Различных букв: КРТОИ, 3 согласных, 2 гласных.
- Три согласных: если идут друг за другом: $3*3*3*2^3$. Различных вариантов их перестановки: 6! / (3! * 3!) = 20 (6! – общее количество перестановок, 3 согласные могут меняться местами и 3 гласные могут меняться местами). Получаем $20*27*2^3$ вариантов.
- Четыре согласных: есл идут друг за другом: $3^4*2^2$. Возможных вариантов перестановки: 6! / (4!*2!) = 15. Итого: $15 * 3^4*2^2$.
- Пять согласных: $3^5*2$. Вариантов перестановки: 6! / (5!*1!) = 6. Итого: $3^5*12$
- Шесть согласных: $3^6$.
- Ответ: $3^6 + 12*3^5 + 20*27*2^3=12285$.

14. Сколько существует чисел, делящихся на 5, десятичная запись которых содержит 5 цифр, причём все цифры различны и никакие две чётные и две нечётные цифры не стоят рядом.

14. Ответ: 480

- Решение: прямой подсчёт.
- Делится на 5: в конце или 0, или 5.
- Если в конце 5, то чередование чётных (ч) и нечётных (н) выглядит так: нчнч5. Нечётных цифр 4 помимо 5 (т.к. цифры должны быть различны), чётных цифр 5, получаем: 4*5*3*4*1 = 240.
- Если в конце 0, чередование выглядит так: чнчн0. Чётных цифр помимо 0 всего 4, нечётных цифр можно использовать 5, получаем: 4*5*3*4*1 = 240.
- Ответ: 240 + 240 = 480.

15. Сколько существует чисел, восьмеричная запись которых содержит 6 цифр, причём все цифры различны и никакие две чётные и две нечётные цифры не стоят рядом.

16. Сколько существует чисел, шестнадцатеричная запись которых содержит 3 цифры, причём все цифры различны и никакие две чётные и две нечётные цифры не стоят рядом.

15. Ответ: 1008

16. Ответ: 840