Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «АСОИУ»

Курс «Вычислительная математика»

Тема «Решение нелинейных уравнений»

Автор Исенбаева Е.Н., старший преподаватель

Ижевск
2013

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Решить уравнение **– значит найти множество всех корней этого уравнения.**

При решении практических задач:

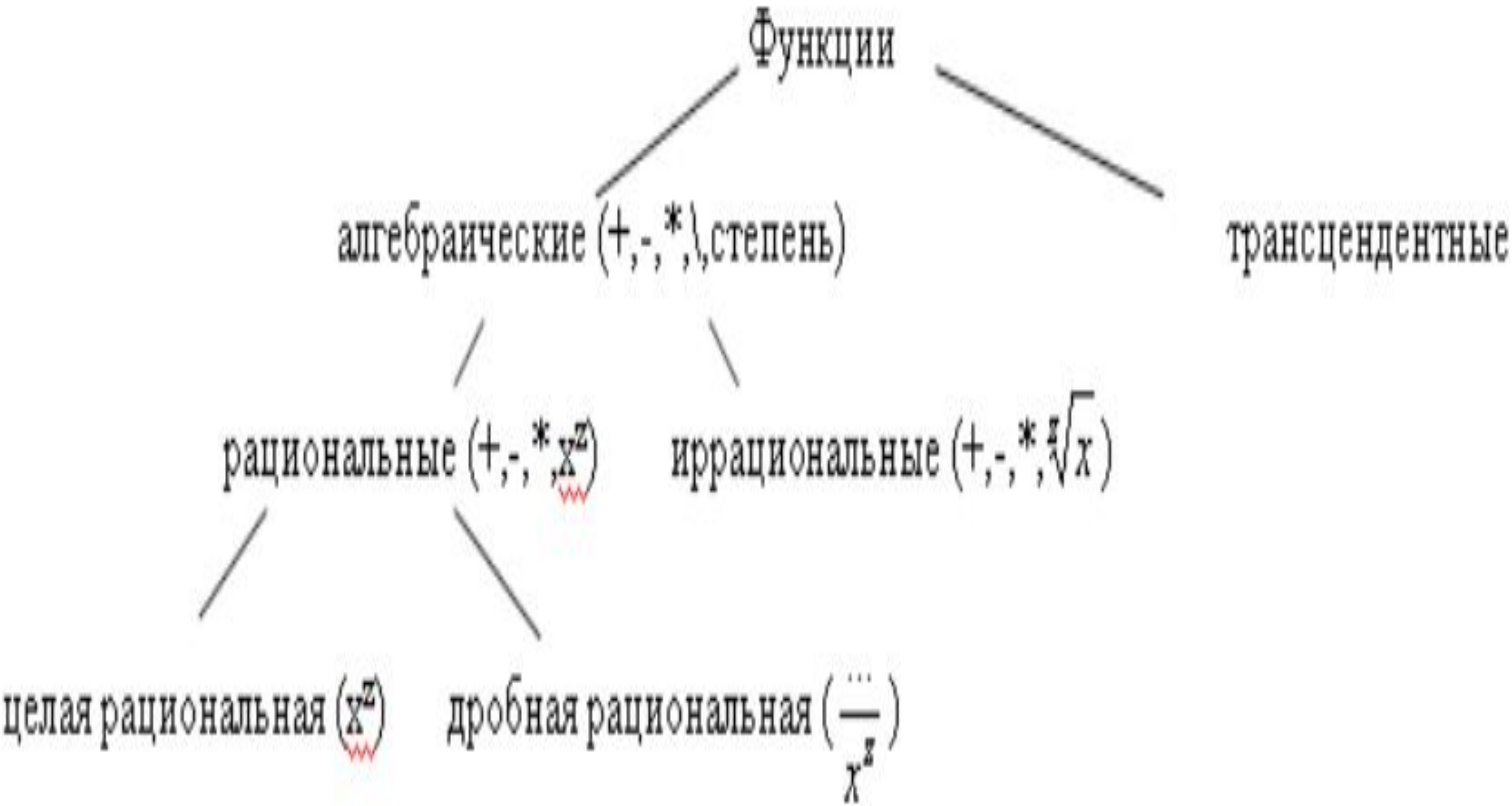
корни вычислены с заданной степенью сложности-> задача нахождения корней считается решенной.

КЛАССЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В зависимости от того, какие функции входят в уравнение $f(x)=0$, уравнения разделяются на два больших класса:

– алгебраические,
– трансцендентные.

КЛАССЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ



АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Алгебраическая функция – функция,

содержащая арифметические операции

(+, -, *, \ ) и возведение в степень с рациональным

показателем.

Пример рациональной алгебраической функции

Рациональная алгебраическая функция:

$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{3}{x-7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}$$

ПРИМЕРЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Целая рациональная алгебраическая функция:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x+8}{3}$$

Иррациональная алгебраическая функция:

$$y = \frac{3x^2 - 4x + \sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-рациональная алгебраическая функция:

$$y = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}$$

$$m \in N \cup 0$$

$$n \in N; a_i \in R; b_i \in R, a_0 \neq 0; b_0 \neq 0.$$

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Трансцендентные функции – все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические *sinx, cosx, tgx, ctgx*; обратные тригонометрические arcsinx, *arccosx, arctgx, arcctgx* и др.

ЭТАПЫ НАХОЖДЕНИЙ КОРНЯ

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на 2 этапа:

1) отделение корней,

2) уточнение корней до заданной степени точности.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ

Отделить корни – это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень.

Корень уравнения $f(x)=0$ считается отделенным на $[a, b]$, если на этом отрезке уравнение $f(x)=0$ не имеет других корней.

СПОСОБЫ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

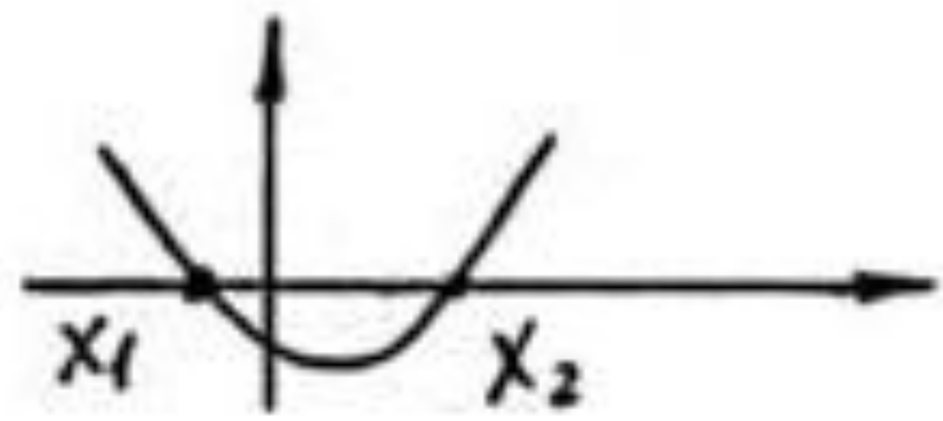
Отделение корней можно произвести двумя методами:

– графическим,

– аналитическим.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

I способ: Средствами машинной графики функция f(x) представляется на дисплее и приближенно определяются отрезки, которым принадлежат корни x_i.



ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

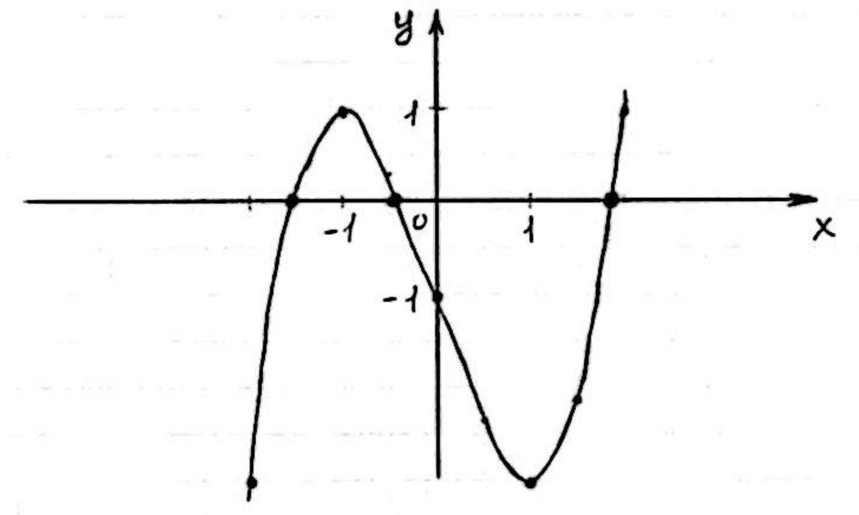
II способ: Все члены уравнения f(x)=0 разбивают на 2 группы, т.е. представляют уравнение в виде: $\varphi(x) = g(x)$. Далее строят графики функций $y = \varphi(x); y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ПРИМЕР

Пример: Отделить графически корни уравнения:

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

I способ: Построим график функции $y = x^3 - 3x - 1$



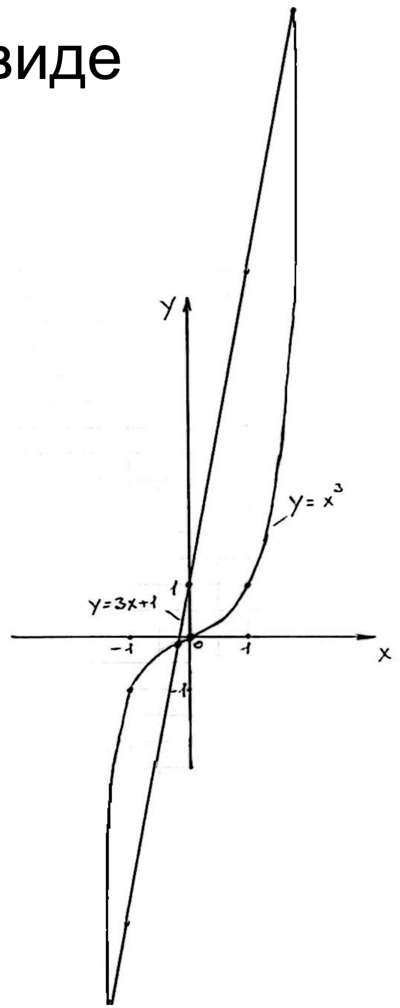
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ПРИМЕР

II способ: Представим данное уравнение в виде

$$x^3 = 3x + 1$$

и построим графики функций

$$y = x^3; y = 3x + 1.$$



ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ЗАМЕЧАНИЕ

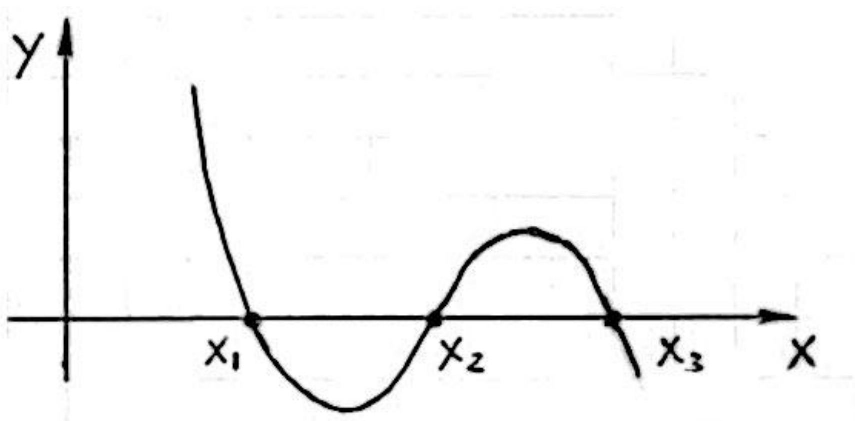


Рис. 1

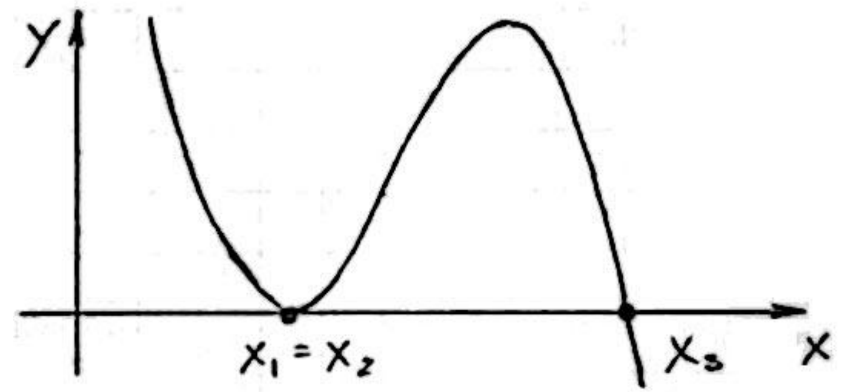


Рис. 2

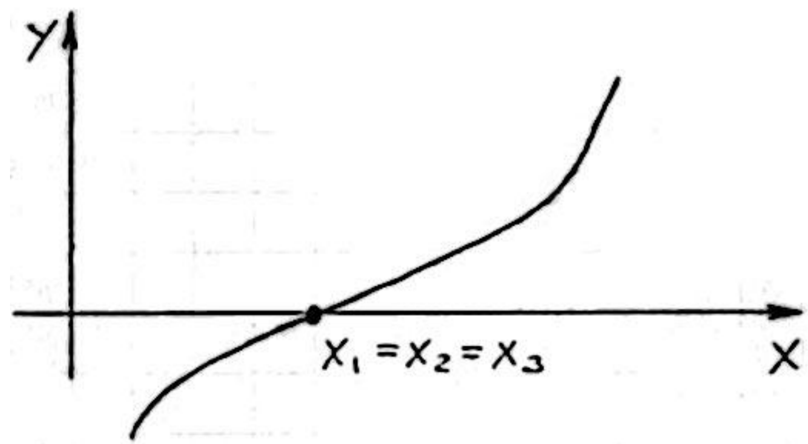
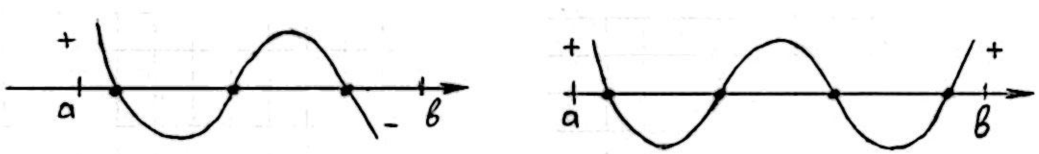


Рис. 3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Аналитически корни уравнения f(x)=0 можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа.

Теорема 1. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах



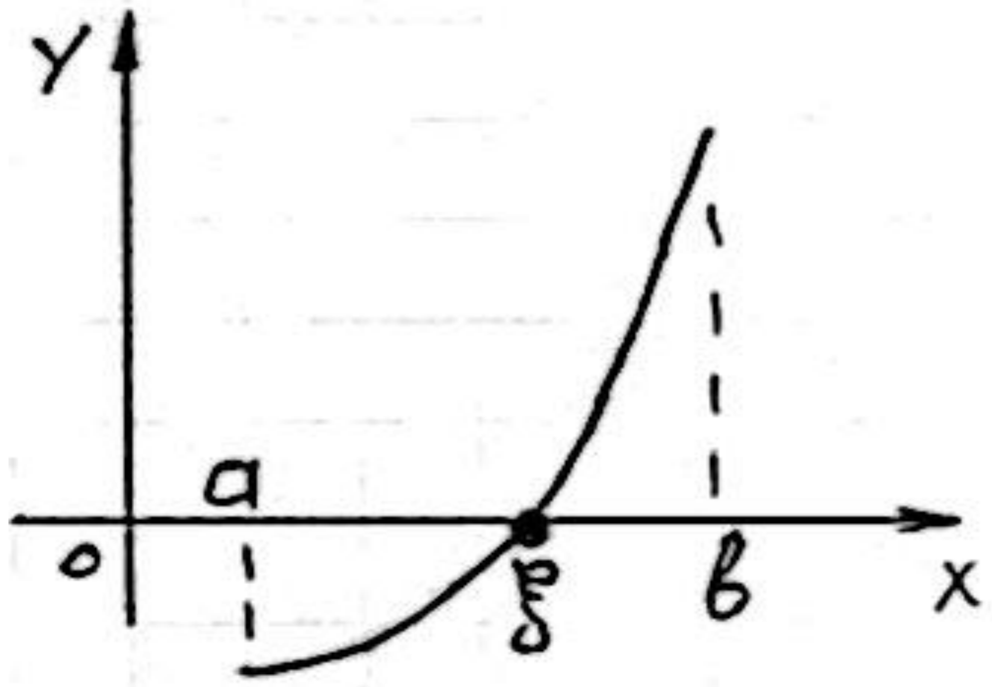
этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] существует, по крайней мере, один корень уравнения f(x)=0 .

Теорема 2. Если функция f(x) непрерывна и монотонна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] содержится корень уравнения f(x)=0 , этот корень единственный.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Теорема 3. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная f’(x) сохраняет знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения f(x)=0 и притом единственный.

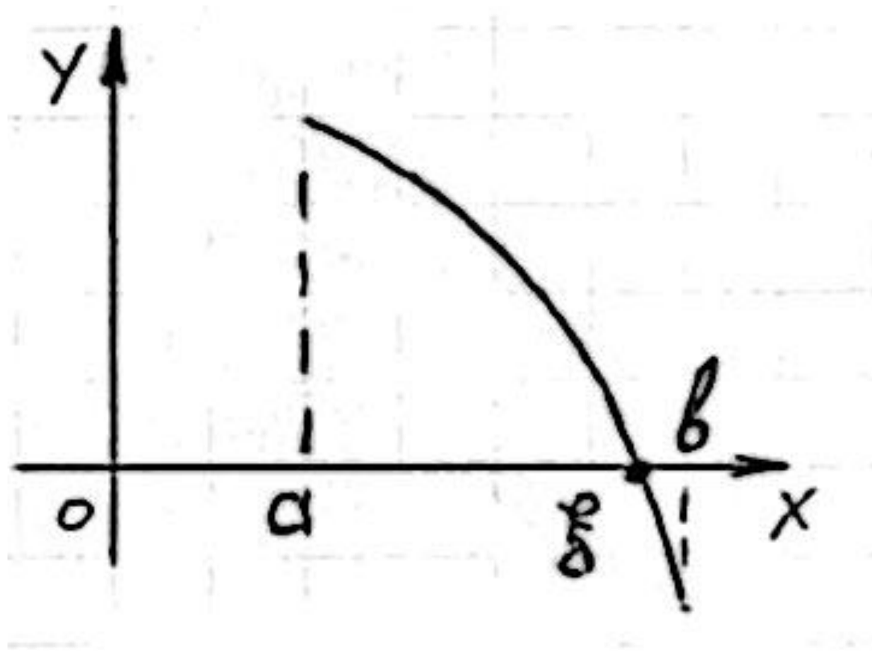
ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



$f'(x) > 0$

$f''(x) > 0$

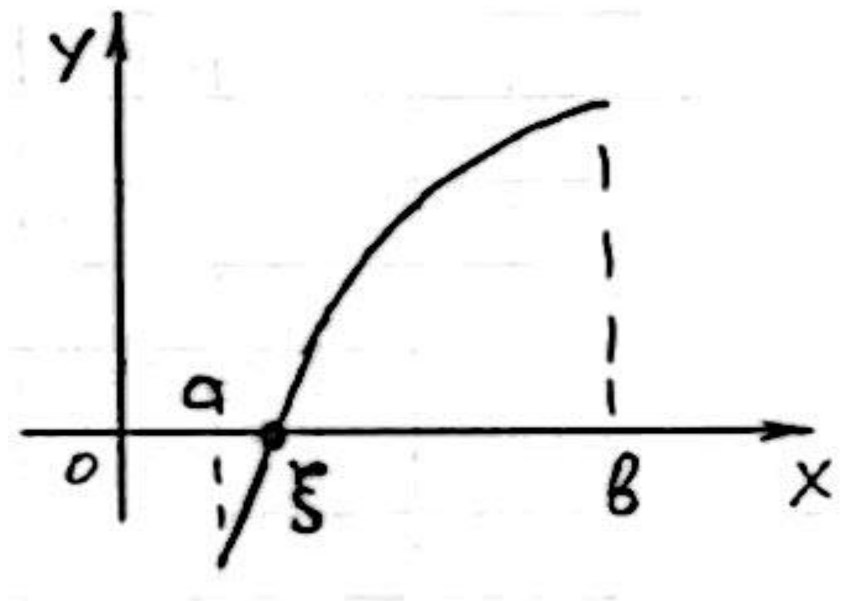
ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



$f'(x) < 0$

$f''(x) < 0$

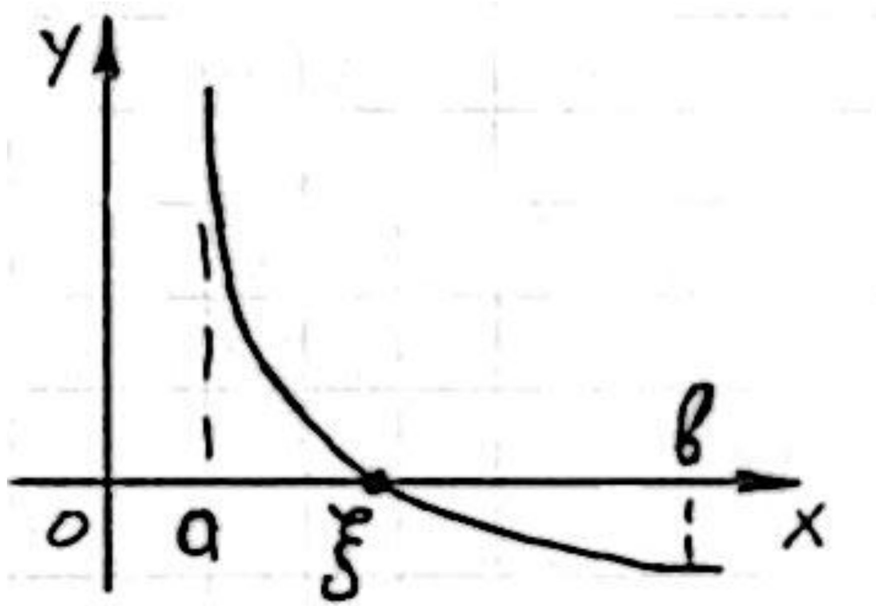
ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



$f'(x) > 0$

$f''(x) < 0$

ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



$f'(x) < 0$

$f''(x) > 0$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Для того чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо:

1) Определить критические точки функции, т.е. точки, в которых первая производная функции равна нулю или не существует, но функция сохраняет непрерывность.

2) Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка [a, b].

3) Наибольшее из значений, найденных в п.2, будет наибольшим, а наименьшее – наименьшим значением функции на отрезке.

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

1) Находят $f'(x)$.

2) Составляют таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным:

а) критическим значениям (корням) производной или ближайшим к ним

б) граничным значениям (исходя из ОДЗ неизвестного).

3) Определяют интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ПРИМЕР

Пример. Отделить корни уравнения 2^x - $5x$ - $3 = 0$ аналитическим методом.

Обозначим $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Область определения функции $f(x)$ – вся числовая ось.
Найдем первую производную

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 5.$$

Приравниваем ее к нулю и находим корни.

$$2^x \ln 2 - 5 = 0$$

$$2^x \ln 2 = 5$$

$$2^x = \frac{5}{\ln 2}$$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0{,}6990 + 0{,}1592}{0{,}3010} = \frac{0{,}8582}{0{,}3010} = 2{,}85$$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ПРИМЕР

- Составим таблицу знаков функции f(x), полагая x равным:
- а) критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним;
- б) граничным значениям

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
знак $f(x)$	+	-	-	+

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. ПРИМЕР

Уравнение имеет два корня, т.к. происходит две перемены знака функции. Составим новую таблицу с более мелкими интервалами изоляции корня.

x	-1	0	1	2	3	4	5
знак $f(x)$	+	-	-	-	-	-	+

Корни заключены в промежутках (-1; 0); (4; 5).

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 1: (о числе корней алгебраического уравнения

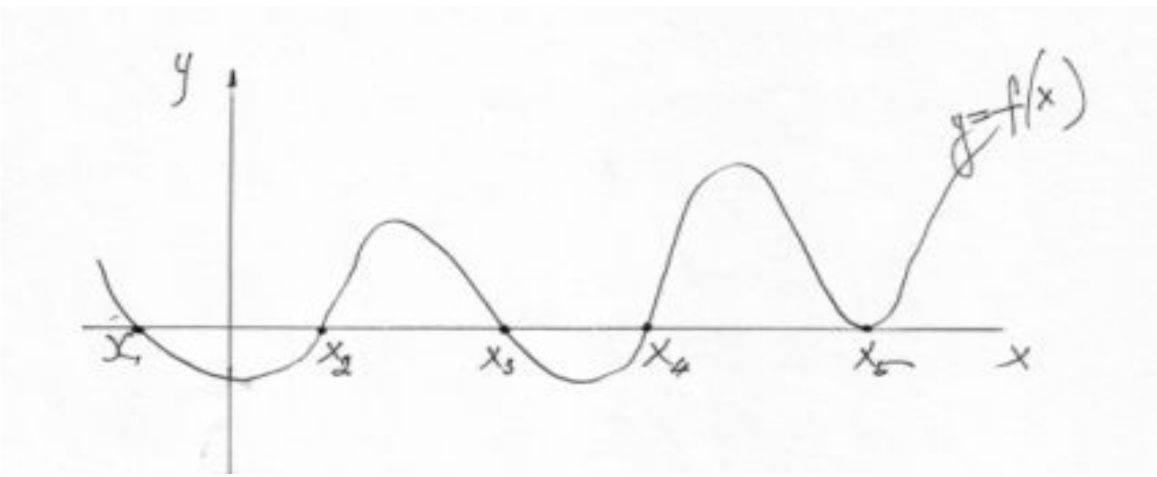
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,\ a_n, \ldots a_0$$

действительные числа (1)

Алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней, действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Следствие: Алгебраическое уравнение нечетной степени имеет, по крайней мере, один действительный корень.



x – корень уравнения, если

при $x=x_0$ верно: $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$

КРАТНОСТЬ КОРНЯ

- Число x есть корень уравнения (1) *кратности k*, если при x=x0 вместе с функцией f(x) обращаются в нуль ее производные до (k-1) го порядка включительно.

- *Простой корень*- корень кратности k=1.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 2. (об оценке модулей корней уравнения (1)).

Пусть

$A = \max \{ |a_{n-1}| \dots, |a_0| \}$

$B = \max \{ |a_n|, |a_{n-1}| \dots, |a_1| \}$, где

a_k -коэффициент уравнения (1).

Тогда модули всех корней x_i удовлетворяют неравенству:

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} < /x_i/ \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}$$

, $i = 1,..n$, т.е. корни в кольце

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 3: (теорема Лагранжа о верхней границе положительных корней уравнения (1)).

Пусть $a_n > 0$ и a_i – первый отрицательный коэффициент в последовательности $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

С – наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Тогда за верхнюю границу положительных корней уравнения принимают число:

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}$$

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 4: (о нижних и верхних границах положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения).

Пусть R – верхняя граница положительных корней уравнения P(x)= 0

R_1-верхняя граница уравнения $P^1(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

R_2 - верхняя граница уравнения $P^2(x) = P_n(-x) = 0$

R_3 - верхняя граница уравнения $P^3(x) = x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Тогда положительные корни x_i^+

и отрицательные корни x_i^-

уравнения(1) удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{1}{R_1} \le x_i^+ \le R \qquad -R_2 \le x_i^- \le -\frac{1}{R_3}$$

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 5: (теорема Декарта о количестве действительных корней алгебраического уравнения).

Число S1 положительных корней (с учетом их кратности) алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ (коэффициенты = 0 не учитываются) многочлена $P_n(x)$ меньше этого числа на четное число.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Число S2 отрицательных корней (с учетом их кратности) алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$

равно числу перемен знаков в

последовательности коэффициентов

$a_n, \; a_{n-1}, \ldots a_0$

многочлена $P_n(-x)$ или меньше этого числа на четное число.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 6: (теорема Гюа о необходимом условии действительности всех корней алгебраического уравнения).

Если алгебраическое уравнение имеет все действительные корни, то квадрат каждого некрайнего коэффициента больше произведения двух его соседних коэффициентов.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕР

Пример: $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

$n = 3;\ a_3 = 1;\ a_2 = -1;\ a_1 = -9;\ a_0 = 9.$

Согласно Следствию Теоремы 1 уравнение имеет 3 корня, среди которых, по крайней мере один действительный.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕР

A = max {/-1/, /-9/, /9/}= 9

B = max {/1/, /-1/, /-9/} = 9

$$\frac{1}{1+\frac{9}{|9|}} < /x_i/ < 1+\frac{9}{|1|}$$

$$\frac{1}{2} < |x_i| < 10$$

$$\frac{1}{2} < x^+_i < 10$$

$$-10 < x^-_i < -\frac{1}{2}$$

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Найдем верхнюю границу положительных корней. Так как первый отрицательный коэффициент в последовательности $a_2 = -1$, то $i = 2$.

$C = \max\{|-1|, |9|\} = 9$ –наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.

$$R = 1 + \sqrt[3-2]{9/1} = 10$$

1

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Найдем нижнюю границу положительных корней: $\frac{1}{R_1}$

$P^1(x) = x^3\, P_3\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x} + 9\right) = 0$

$P^1(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 0$

$i = 2;\ a_2 = -9$

$C = 9$

$R_1 = 1 + \sqrt[3-2]{9/9} = 2$

$\frac{1}{2} < x^+_i < 10$

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

- Рассчитаем границы отрицательных корней по Теоремам 3 и 4:

$$P^2(x) = P_3(-x) = -x^3 - x^2 + 9x + 9 = 0$$

или

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

$a_1 = -9;\ i = 1$

$C = 9$

$$R_2 = 1 + \sqrt[3-1]{\frac{9}{1}} = 4$$

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

$$P^3(x) = x^3\, P_3\left(-\frac{1}{x}\right) = x^3\left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x} + 9\right) = 0$$

$$P^3(x) = 9x^3 + 9x^2 - x - 1 = 0$$

$a_1 = -1;\ i = 1$

$C = 1$

$$R_3 = 1 + \sqrt[3-1]{1/9} = \frac{4}{3}$$

$$-R_2 = -4 < x^-_i < -\frac{3}{4}$$

$$-4 < x^-_i < --\frac{3}{4}$$

Нахождение числа положительных корней уравнения

Определим количество положительных корней по Теореме 5 уравнения:

$$P_3(x) \quad = \quad x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$

Коэффициенты многочлена: 1,-1,-9, 9.
Количество перемен знака- 2→ количество положительных корней уравнения- два или их нет.

Нахождение числа отрицательных корней уравнения

Определим количество отрицательных корней уравнения. Для уравнения

$$P_3(-x) = -x^3 - x^2 + 9x + 9$$

выпишем коэффициенты: -1, -1, 9, 9. Количество перемен знака- 1 → число отрицательных корней- один.

Исследование структуры корней

- По Теореме Гюа исследуем структуру корней по коэффициентам уравнения:

$$(-1)^2 > 1*(-9); \quad (-9)^2 > (-1)*9$$

Необходимое условие действительности всех корней уравнения выполняется.

Уточнение корней

Уточнение корней – это доведение отделенных корней до заданной степени точности.

Второй этап решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

УТОЧНЕНИЕ КОРНЕЙ

Пусть дано уравнение f(x)=0, где f(x) – непрерывная функция. Требуется найти корень этого уравнения ξ с точностью ε, где ε - некоторое положительное достаточно малое число.

Будем считать, что корень ξ отделен и находится на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0, причем |b-a|> ε.

Здесь f(x) – непрерывная функция.

МЕТОДЫ УТОЧНЕНИЯ КОРНЕЙ

1. МЕТОДЫ ДИХОТОМИИ

-Метод половинного деления

-Метод хорд

2. Метод простых итераций

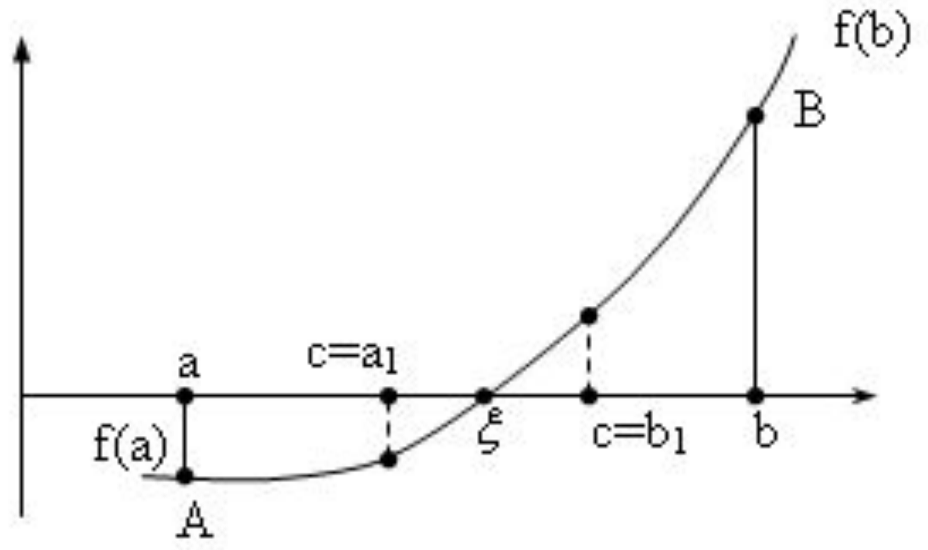
МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Возьмем на отрезке [a,b] промежуточную точку так, чтобы она являлась серединой отрезка [a,b], т.е. c=(a+b)/2.

Алгоритм метода

1. Задать концы отрезка [a,b], функцию f, малое число >0, вычислить (или ввести) f(a).
2. Вычислить c=(a+b)/2.
3. Если (b-a)<2, то положить c и останов
4. Вычислить f(c)
5. Если f(a)*f(c)<0, положить b=c и вернуться к шагу 2, иначе a=c, f(a)=f(c) и вернуться к шагу 2.

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ



$$\left|\xi - x_k\right| < \frac{b-a}{2^k}, \forall k \in N \quad (1)$$

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad (2)$$

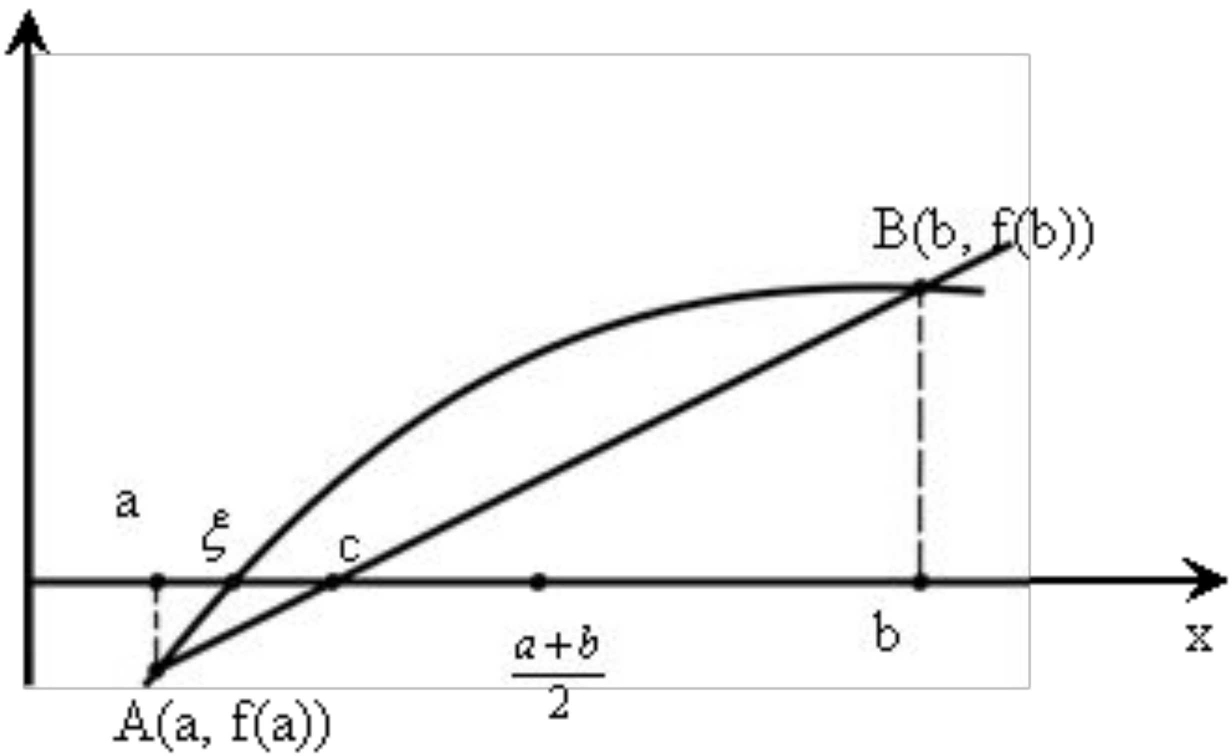
Априорная оценка метода половинного деления

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad (2)$$

Априорная оценка позволяет предварительно рассчитать примерное количество шагов (итераций), достаточное для получения корня с заданной степенью точности Ɛ. Для этого находим наименьшее натуральное решение неравенства (2).

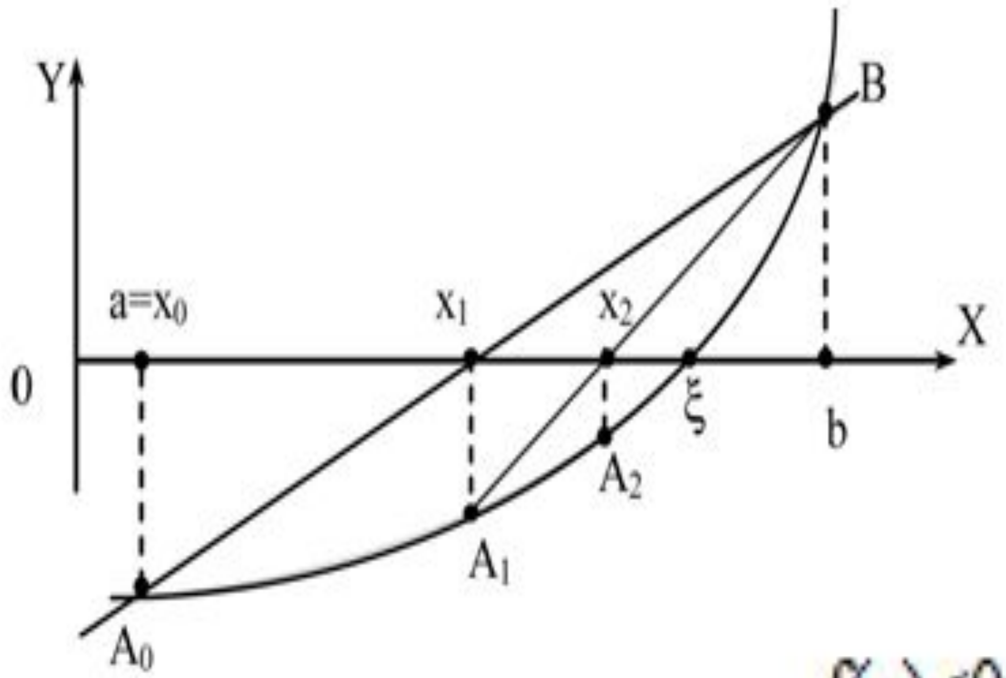
МЕТОД ХОРД

Пробная точка c находится как абсцисса точки пересечения оси Ох с прямой, проходящей через точки A(a, f(a)) и B(b,f(b)), т.е. с хордой AB дуги A ⌣B.



МЕТОД ХОРД. 1 СЛУЧАЙ

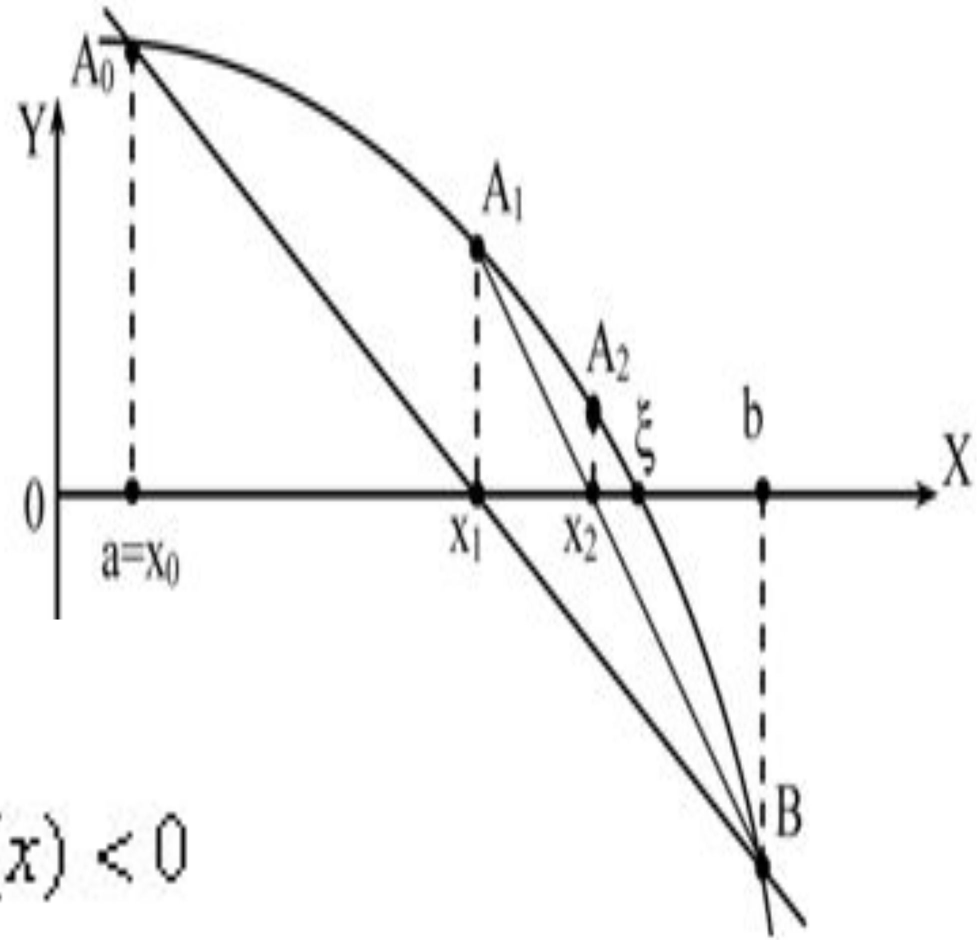
1 случай: первая и вторая производные имеют одинаковые знаки, т.е. $f'(x) * f''(x) > 0$



$f(a)<0; f(b)>0$

$f'(x) > 0; f''(x) > 0$

1 случай: первая и вторая производные имеют одинаковые знаки, т.е. $f'(x)*f''(x)>0$



f(a)>0; f(b)<0

$f'(x)<0; f''(x)<0$

МЕТОД ХОРД. 1 СЛУЧАЙ

Уравнение хорды, проходящей через точки A_0 и B, имеет вид:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Найдем значение $x=x_1$, для которого $y=0$:

$$x1=a-\frac{f(a)*(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad (1)$$

МЕТОД ХОРД. 1 СЛУЧАЙ

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)*(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

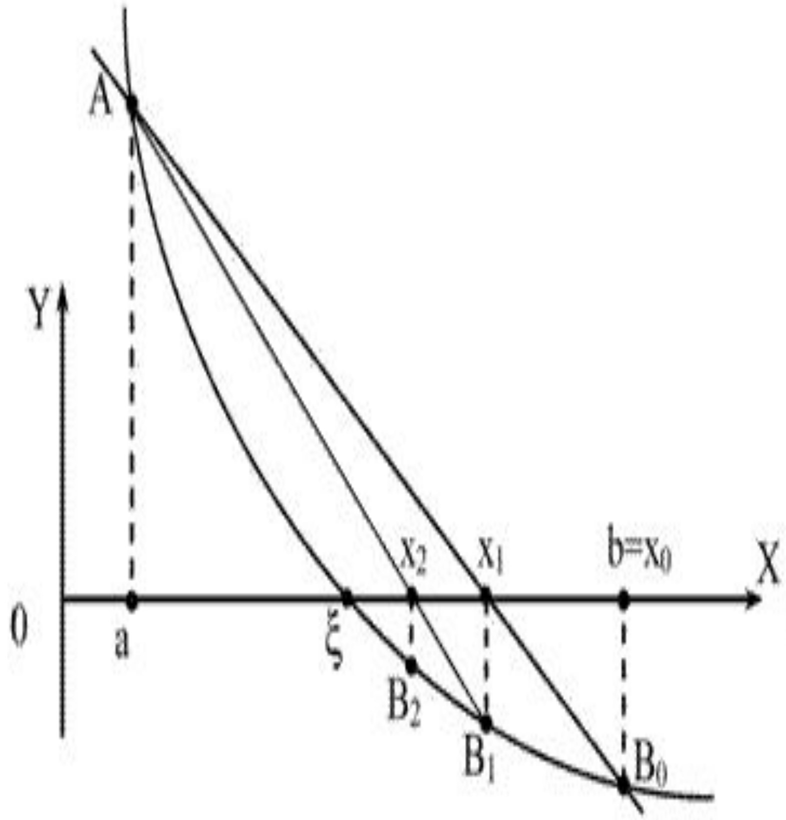
В общем случае:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)*(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)} \qquad (2)$$

МЕТОД ХОРД. 2 СЛУЧАЙ

2 случай: первая и вторая производные имеют разные знаки, т.е.:

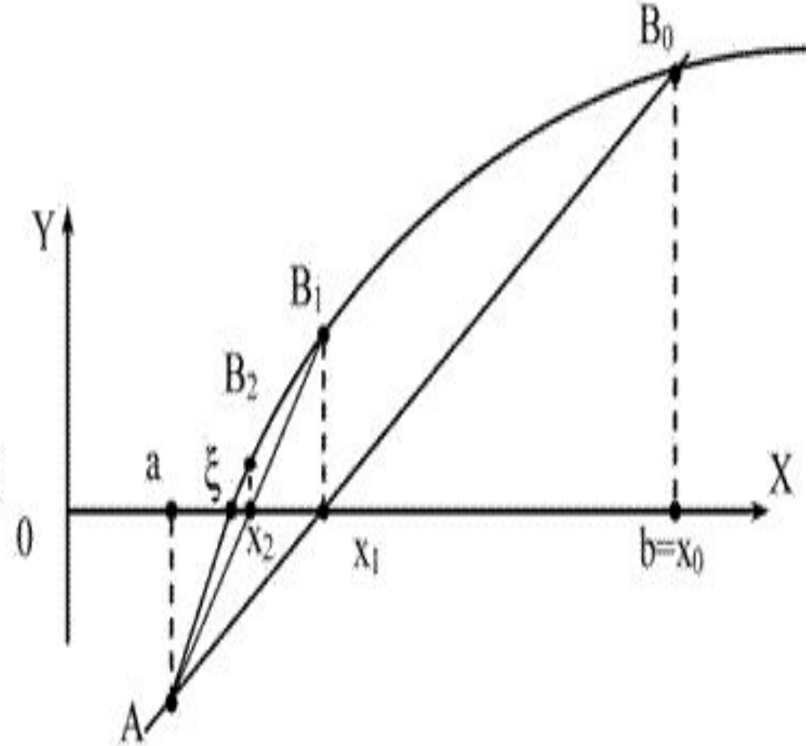
$f'(x) * f''(x) < 0$.



f(a)>0; f(b)<0

$f'(x) < 0; f''(x) > 0$

2 случай: первая и вторая производные имеют разные знаки, т.е.:
$f'(x) * f''(x) < 0$.



f(a)<0; f(b)>0
$f'(x) > 0, f''(x) < 0$

МЕТОД ХОРД. 2 СЛУЧАЙ

Соединим точки $A(a; f(a))$ и $B_0(b; f(b))$ и запишем уравнение хорды, проходящей через A и B_0

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Найдем x_1 как точку пересечения хорды с осью Ox, полагая $y=0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a) * (b - a)}{f(b) - f(a)}$$

МЕТОД ХОРД. 2 СЛУЧАЙ

Корень ξ теперь заключен внутри отрезка $[a, x_1]$. Применяя метод хорд к отрезку $[a, x_1]$, получим:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) * (b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

В общем случае:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) * (b - x_k)}{f(b) - f(x_k)} \qquad (3)$$

МЕТОД ХОРД

Выбор формулы (2) или (3) можно осуществить, пользуясь <u>простым правилом</u>: неподвижным концом отрезка является тот, для которого <u>знак функции совпадает со знаком второй производной.</u>

МЕТОД ХОРД

$f(b)*f''(x)>0$ → неподвижен конец b,

в качестве начального приближения- конец a. При этом используется расчетная формула (2).

$f(a)*f''(x)>0$ → неподвижен конец a,

в качестве начального приближения- конец b. При этом используется расчетная формула (3).

МЕТОД ХОРД. УСЛОВИЕ ОСТАНОВА ПРОЦЕССА

При оценке погрешности приближения можно воспользоваться формулой:

$$|\xi - x_k| < |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon \qquad (4),$$

где ξ - точное значение корня, x_k, x_{k-1} – приближения к корню.

МЕТОД ХОРД. УСЛОВИЕ ОСТАНОВА ПРОЦЕССА

Этой формулой можно воспользоваться, если выполнено условие:

$$M \le 2m \qquad (5),$$

где $M = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$ и $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Пример: Методом хорд уточнить до $\varepsilon = 10^{-3}$ меньший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$. Корни уравнения отделены и меньший корень содержится на отрезке [-3,-2].

Решение: Проверяем выполнение условия (5).

$$|f'(x)| = |3x^2 + 6x|$$

$$M = \max_{[-3;-2]} |3x^2 + 6x| = |27 - 18| = 9;$$

$$m = \min_{[-3;-2]} |3x^2 + 6x| = |12 - 12| = 0$$

M>2m – условие не выполняется.

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Возьмем середину отрезка [-3;-2], т.е. x=-2,5 и выберем интервал [-3;-2,5]. Снова проверяем выполнение условия (5):

$$M = \max_{[-3;-2,5]} |f'(x)| = 9$$

$$m = \min_{[-3;-2,5]} |f'(x)| = 3{,}75$$

$$M > 2m$$

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Возьмем теперь середину отрезка [-3;-2,5]: x=-2,75

Имеем:

f(-2,75)<0

f(-2,5)>0

f(-3)<0

Выбираем отрезок [-2,75;-2,5].

Находим:

$$M = \max_{[-2,75;-2,5]} |f'(x)| = 6{,}189$$

$$m = \min_{[-2,75;-2,5]} |f'(x)| = 3{,}75$$

M<2m – условие выполняется.

Таким образом, для оценки погрешности корня, лежащего на отрезке [-2,75;-2,5], можно воспользоваться формулой (4), т.е. процесс последовательного приближения к корню следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$.

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Определим знак второй производной и установим, по какой формуле надо производить вычисления.

$$f''(x) = 6x + 6$$

На [-2,75;-2,5]:

f(-2,75)<0

f(-2,75)* f'' (x)>0

Значит, за неподвижный конец отрезка нужно принять x=-2,75. Вычисления ведем по формуле (3).

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

$$x_1 = b - \frac{f(a)*(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)*(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$$, где a=-2,75

f(a)=-1,111.

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Если последнее выражение представить в виде:

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)*(x_k - a)}{f(x_k) - f(a)}$$

, то сразу же можно будет получать разность между двумя последовательными приближениями и производить проверку на окончание вычислений, т.е. проверять выполнение неравенства:

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon .$$

МЕТОД ХОРД. ПРИМЕР

Все вычисления удобно производить в следующей таблице:

k	x_k	$f(x_k)$	x_k-a	$x_{k+1}-x_k$
0	-2,5	0,125	0,25	-0,025
1	-2,525	0,0288	0,225	-0,006
2	-2,531	0,0050	0,219	-0,0009
3	-2,5319			

Из таблицы видно, что $|x_3 - x_2| < 0{,}001$, поэтому, округляя до 10^{-3}, получим $\xi = -2{,}532$.

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Дано $f(x) = 0$ (1) (2) $x = \varphi(x)$

$x \in [a, b]$

Если существует $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$ и функция $\varphi(x)$ непрерывна, то получим $x^* = \varphi(x^*)$

Существование и единственность корня уравнения $x = \varphi(x)$ основывается на **принципе сжимающих отображений** (принципе неподвижной точки).

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

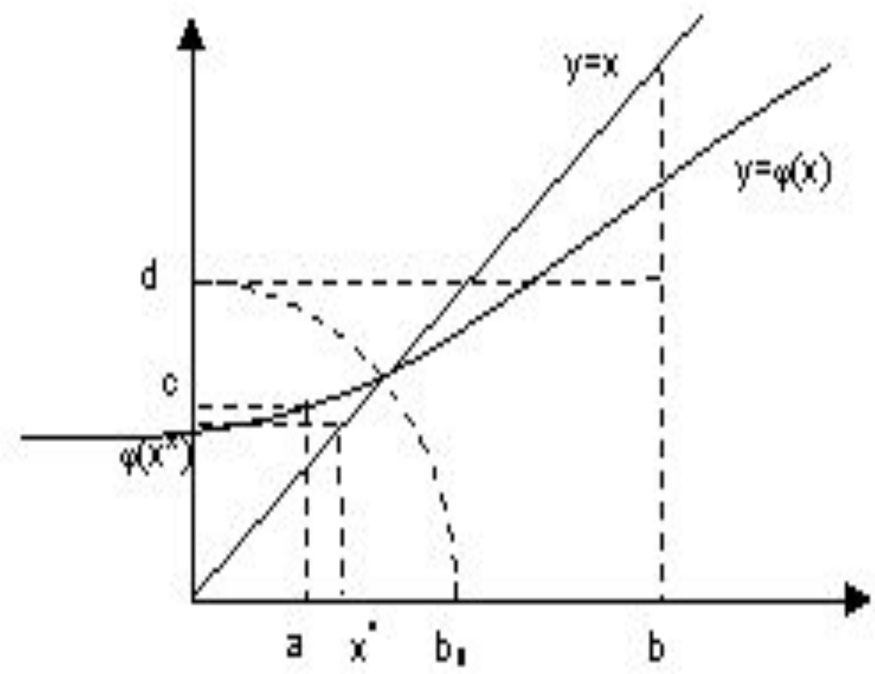
<u>Определение</u>

Непрерывная функция $\varphi(x)$ называется сжимающей на отрезке [a, b], если:

1) $\varphi(x) \in [a,b] \ \forall x \in [a,b]$

2) $\exists q \in (0,1): |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1| \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ



Возрастающая функция

[a, b]⊃ [a1, b1]⊃ [a2, b2]⊃… [ak, bk] ⊃…

причем их длины убывают по закону:

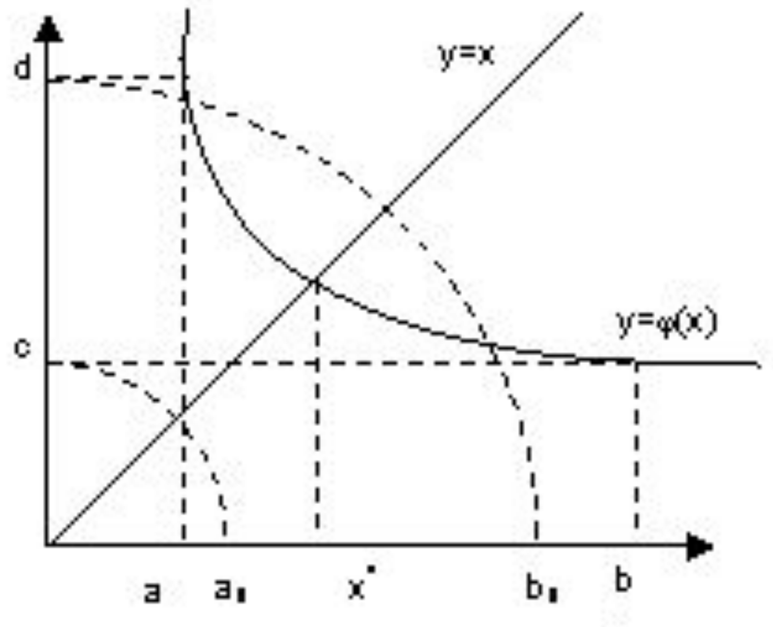
$$b_k - a_k \le q^k (b-a) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

a, $a_1 = \varphi(a)$; $a_2 = \varphi(a_1)$; $a_3 = \varphi(a_2)$ …

b, $b_1 = \varphi(b)$; $b_1 = \varphi(b_1)$; $b_1 = \varphi(b_2)$ …,

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

При условии убывания сжимающей функции φ(x), т.е.в случае, изображенном на рисунке 2, последовательности выстраиваются следующим образом:

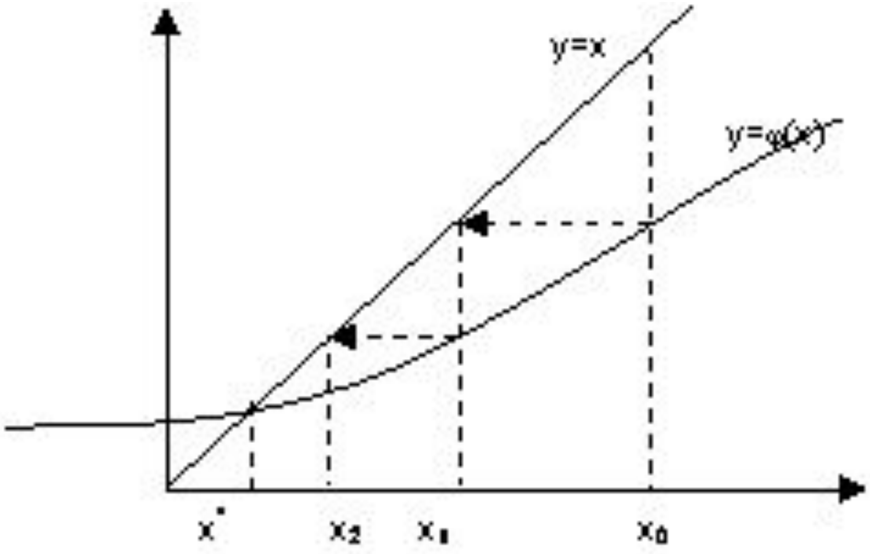


Убывающая функция

$$a,\ b_1=\varphi(a);\ b_2=\varphi(a_1);\ b_3=\varphi(a_2)\ \ldots$$

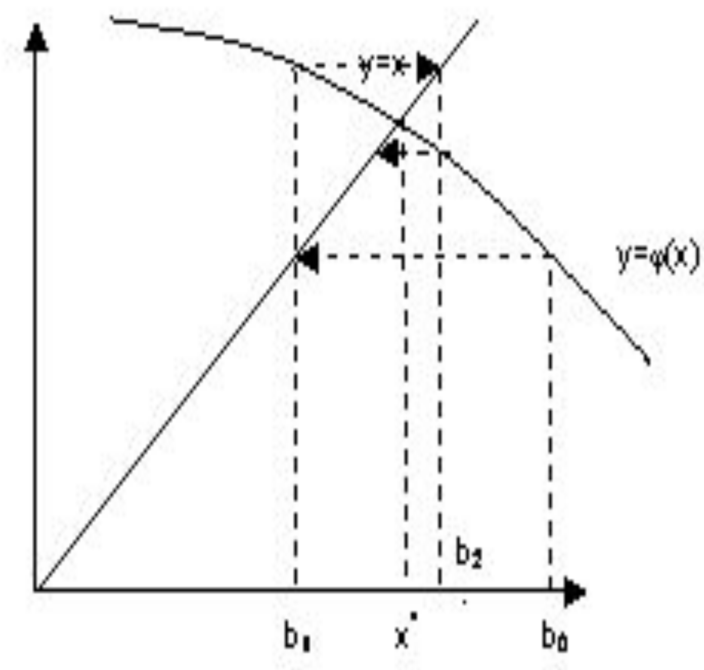
$$b,\ a_1=\varphi(b);\ a_1=\varphi(b_1);\ a_1=\varphi(b_2)\ \ldots,$$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Функция монотонно возрастает, ломанная типа «ступеньки»

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Функция монотонно убывает,
ломанная типа «спираль»

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Выводы:

На некотором промежутке [a,b] функция φ(x) удовлетворяет условиям сжатия, зафиксированным в определении →

1. уравнение x= φ(x) имеет и притом единственный корень x*є[a,b] ;
2. к этому корню со скоростью геометрической прогрессии сходится определяемая МПИ последовательности (xk), начинающая с x0є[a,b], причем скорость сходимости тем выше, чем меньше коэффициент сжатия qє(0,1);
3. функция φ(x) монотонно возрастает на [a, b] → приближения xk к x0 также будут монотонными;
4. φ(x) убывает → процесс порождает двустороннее приближение к корню x*.

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Теорема.

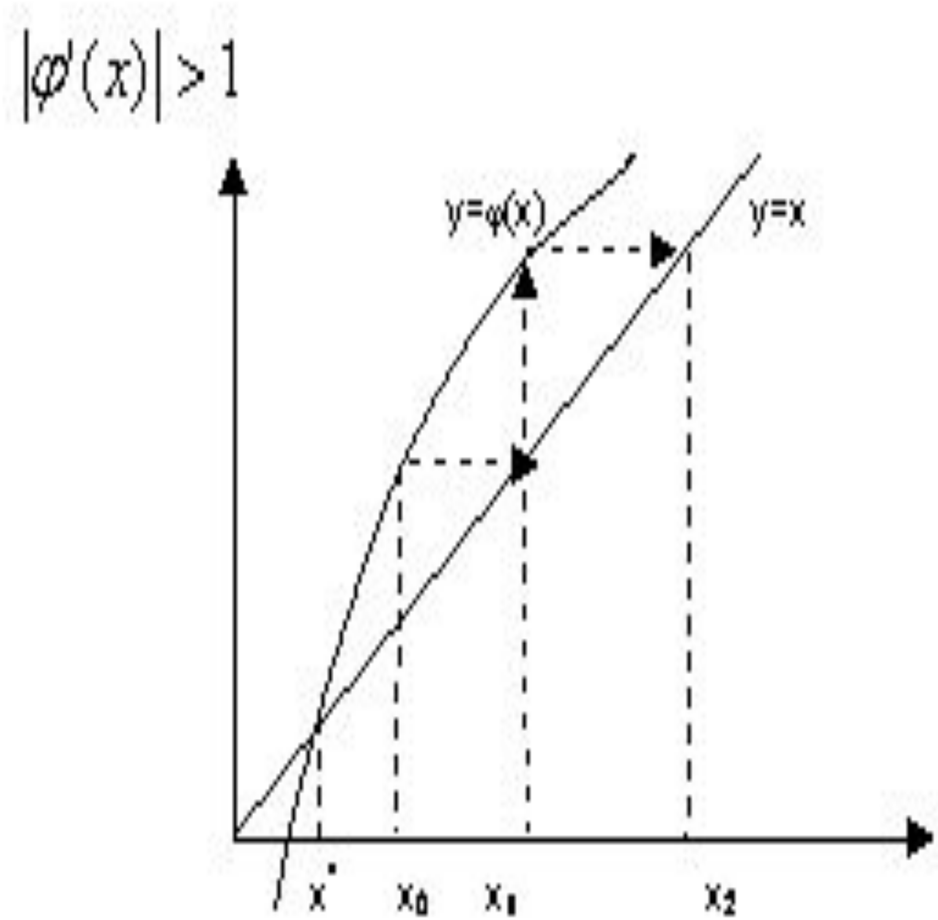
Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке [a, b];

2) $\varphi(x) \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b]$

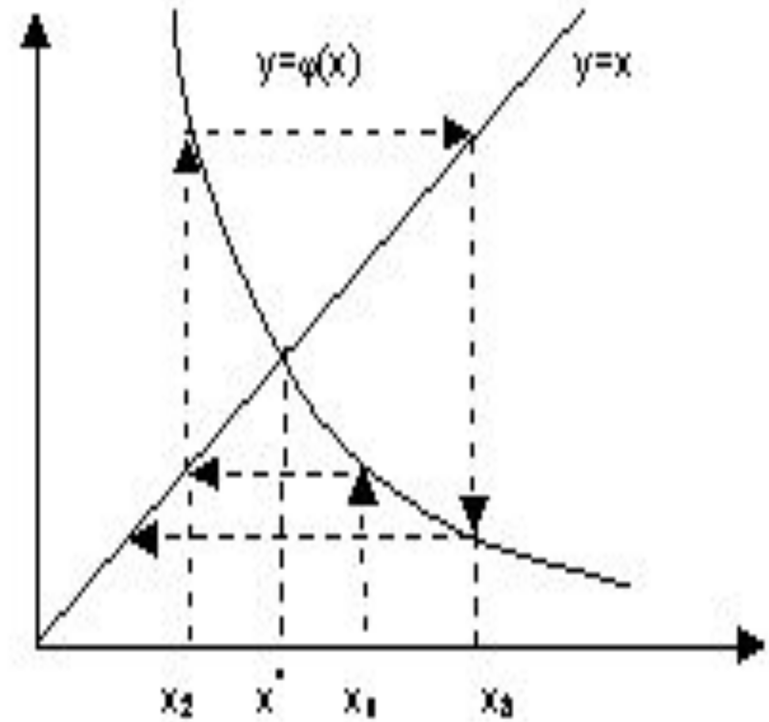
3) $\exists q \in (0,1): \left|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\right| \le q\left|x_2 - x_1\right| \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

Расходящийся процесс итераций



Расходящийся процесс итераций

$$\left|\varphi'(x)\right| < -1$$



АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Используется для остановки итерационного процесса

$$\left|x^{*} - x_k\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_k - x_{k-1}\right|$$ - апостериорная оценка

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon$$, где

e - заданная абсолютная погрешность корня x^{*} и $\left|\varphi'(x)\right| \le q$

Априорная оценка

Используется для предварительного расчета количества операций

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{q^k}{1-q}\left|x_1 - x_0\right|$$ - априорная оценка

$$\frac{q^k}{1-q}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon$$

$$k \ge \frac{1}{\ln q} \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\left|x_1 - x_0\right|}$$

СПОСОБЫ *ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ (1) К ВИДУ (2)*

1. Заменяем f(x)=0 на равносильное x=x+cf(x), c=const≠0

   φ(x)=x

$$|\varphi'(x)| = |1 + c \cdot f'(x)| < 1$$

$$-2 < c \cdot f'(x) < 0$$

Находим c є [a,b]

$$x = x \mp \frac{f(x)}{\max|f'(x)|} = \varphi(x)$$

2. Заменяем f(x)=0 на равносильное

$$x = x \mp \frac{f(x)}{\max|f'(x)|} = \varphi(x)$$

Знак выбирается из условия $|\varphi'(x)| < 1$

СПОСОБЫ *ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ (1) К ВИДУ (2)*

3. Выражаем x из : f(x)=0

   x=φ(x);

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

ПРИМЕР

<u>Пример.</u> Методом итераций уточнить до 10^{-4} корень уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$, заключенный на [0,1].

Данное уравнение следует привести к виду $x = \varphi(x)$. Это можно сделать несколькими способами, например:

$$x = x + 5x^3 - 20x + 3 = 5x^3 - 19x + 3 = \varphi_1(x)$$

или

$$x = \sqrt[3]{\frac{(20x-3)}{5}} = \varphi_2(x)$$

или

$$x = \frac{(5x^3+3)}{20} = \varphi_3(x)$$

ПРИМЕР

Определим, какой из полученных функций следует воспользоваться для вычисления последовательных приближений.

$$|\varphi_1'(x)| = |15x^2 - 19| > 1$$ на $[0,1]$

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{15x^2}{20} = \frac{3x^2}{4} < 1$$ на $[0,1]$

ПРИМЕР

Следовательно, можно воспользоваться функцией $\varphi_3(x)$ и искать последовательные приближения методом итераций по формуле $x_k = \dfrac{(5x_{k-1}^3+3)}{20}$. За начальное приближение возьмем $\max \varphi'(x)$ на [0,1], т.е. $x_0=0{,}75$.

Рассчитаем условие выход из итерационного процесса:

$$|x_k - x_{k-1}| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$$

$|\varphi'(x)| \le q < 1$. На отрезка [0,1] максимальное значение $|\varphi'(x)| = \dfrac{3x^2}{4}$ достигается в точке x=1, поэтому q=0,75.

Т.о., итерационный процесс можно остановить, когда $|x_k - x_{k-1}| \le \dfrac{1-0{,}75}{0{,}75} \cdot 10^{-4} = 0{,}00003$.

ПРИМЕР

Вычисления удобно вести с помощью следующей таблицы:

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0,75	
1	0,2555	0,4945
2	0,1542	0,1013
3	0,1509	0,0033
4	0,1508	0,00006

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ