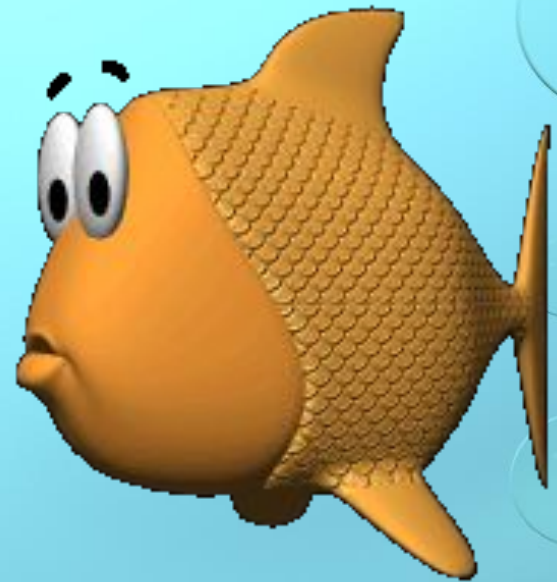
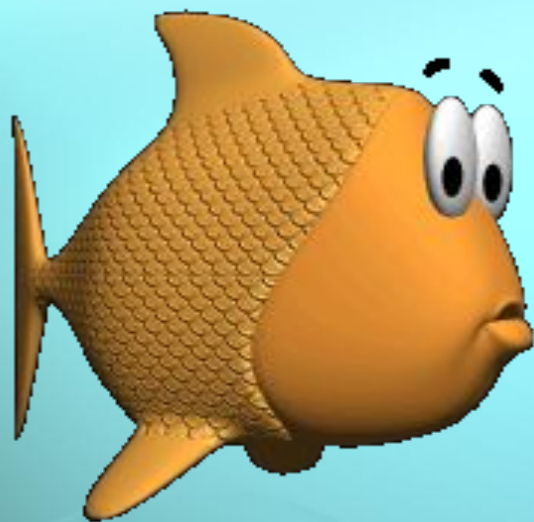


# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



**Алгебраическая  
форма  
комплексного  
числа.**





**Число, квадрат  
которого равен  $-1$   
называется мнимой  
единицей и  
обозначается  $i$  или  $j$**

$$j^2 = -1$$

# Степени мнимой единицы

$$j^0 = 1 \quad j^4 = \cancel{j^2} \cdot j^2 = \cancel{j^2} \cdot (-1) = 1$$

$$j^1 = j \quad j^5 = \cancel{j^4} \cdot j = 1 \cdot j = j$$

$$j^2 = -1 \quad j^6 = -1 \quad j^{10} = -1$$

$$j^3 = \cancel{j^2} j j = \cancel{j^2} \cdot j = -j \quad j^{11} = -j$$

$$j^{4k+0} = 1$$

$$j^{4k+1} = j$$

$$j^{4k+2} = -1$$

$$j^{4k+3} = -j$$

$$j^{4k+a} = j^a$$

$$j^{326} = j^{4 \cdot 81 + 2} = j^2 = -1$$


$$326 = 4 \cdot 81 + 2$$

$$(-j)^{157} = (-1)^{157} \cdot j^{4 \cdot 39 + 1} = (-1) \cdot j^1 = -j$$

$$157 = 4 \cdot 39 + 1$$

$$\begin{aligned} (-2j)^{55} &= (-2)^{55} \cdot j^{4 \cdot 13 + 3} = (-1)^{55} 2^{55} \cdot j^3 = \\ &= -2^{55} \cdot (-j) = 2^{55} j \end{aligned}$$

$$55 = 4 \cdot 13 + 3$$



***Мнимым числом  
называется  
произведение  
мнимой единицы на  
действительное  
число.***

***Примеры:  $2j$ ;  $-5,3j$ ;  $\frac{2}{7}j$ ;  $j\sqrt{7}$***



**Комплексным числом  
называется число вида**

$$a+bj,$$

**где  $a$  и  $b$ -произвольные  
действительные числа,  
 $j$  – мнимая единица.**

**$a$  – действительная часть КЧ;**

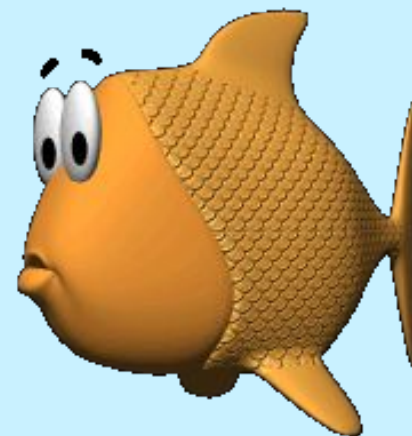
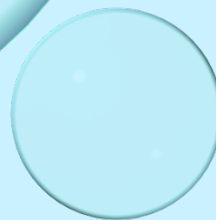
**$bj$  – мнимая часть КЧ**

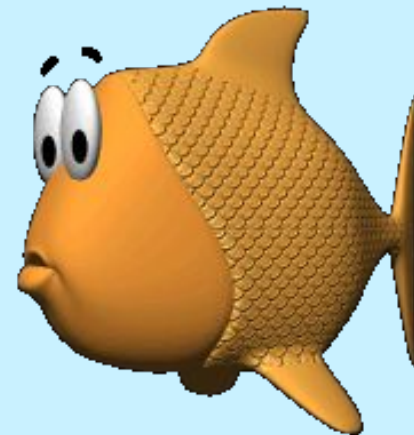
**$b$  – коэффициент мнимой части.**



$$z=a+bj$$

*алгебраическая  
форма кч*





$$z = a + bj$$

$$a = 0$$


$$b = 0$$

Мнимое число

$$z = bj$$

Действительное  
число

$$z = a$$



**Комплексные числа  
называются равными,  
если равны их  
действительные части  
и коэффициенты  
мнимых частей.**


$$z_1 = z_2, \text{ если } a_1 = a_2, b_1 = b_2$$



***КЧ равно нулю если  
равны нулю его  
действительная  
часть и коэффициент  
мнимой части.***

***$z=0$  , если  $a=0$  ,  $b=0$***

***$z=0+0j$***



**Модулем комплексного  
числа называется  
квадратный корень из  
суммы квадратов его  
действительной и  
коэффициента мнимой  
части.**

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

# Найдите модуль $z$ :

●  $z_1 = 3 + 4j$

○

$$\rho_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \textcircled{5}$$

●  $z_2 = 2 - 7j$

$$\rho_2 = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$$


●  $z_3 = 3 - 4j$

○

$$\rho_3 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = \textcircled{5}$$

●  $z_4 = -2 - 3j$

$$\rho_4 = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$



***КЧ называются сопряженными, если они различаются только знаком коэффициента мнимой части.***

$$z = a + bj \quad \bar{z} = a - bj$$

***Модули сопряженных чисел равны.***

# Являются ли числа сопряженными?

*нет*

●  $7+3j$  и  $-7+3j$

*да*

●  $2-5j$  и  $2+5j$

*да*

●  $2,4j+11$  и  $-2,4j+11$

*нет*

*нет*

*нет*

●  $8+6j$  и  $-8-6j$

*да*

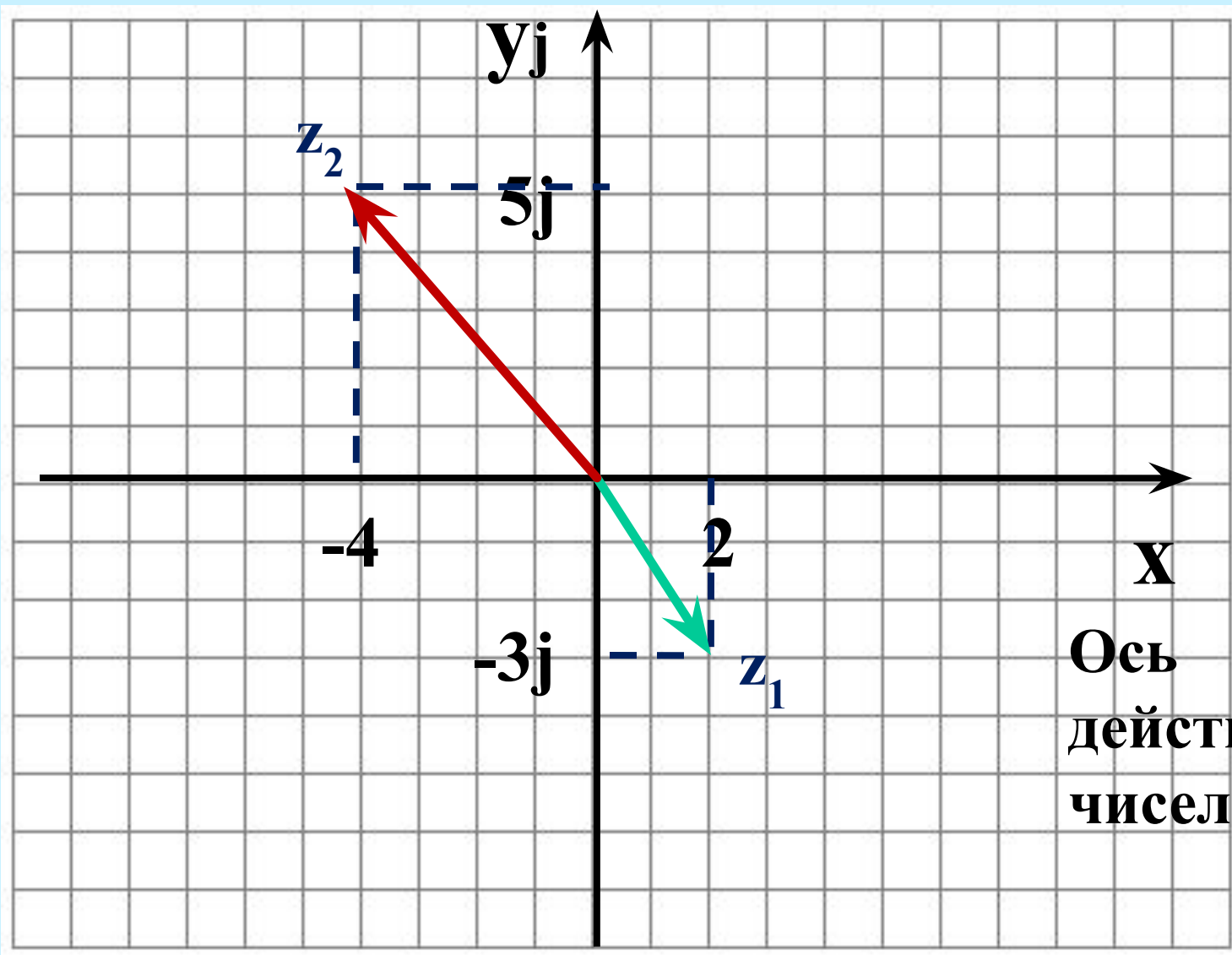
●  $-7+5j$  и  $7-5j$





**Каждому комплексному числу в комплексной плоскости ставится в соответствие одна, и только одна точка; или один, и только один вектор с началом в начале координат и концом в точке с координатами  $(a; b)$ .**

# Ось мнимых чисел



$$z_1 = 2 - 3j$$

$$x = a = 2$$

$$y = b = -3$$

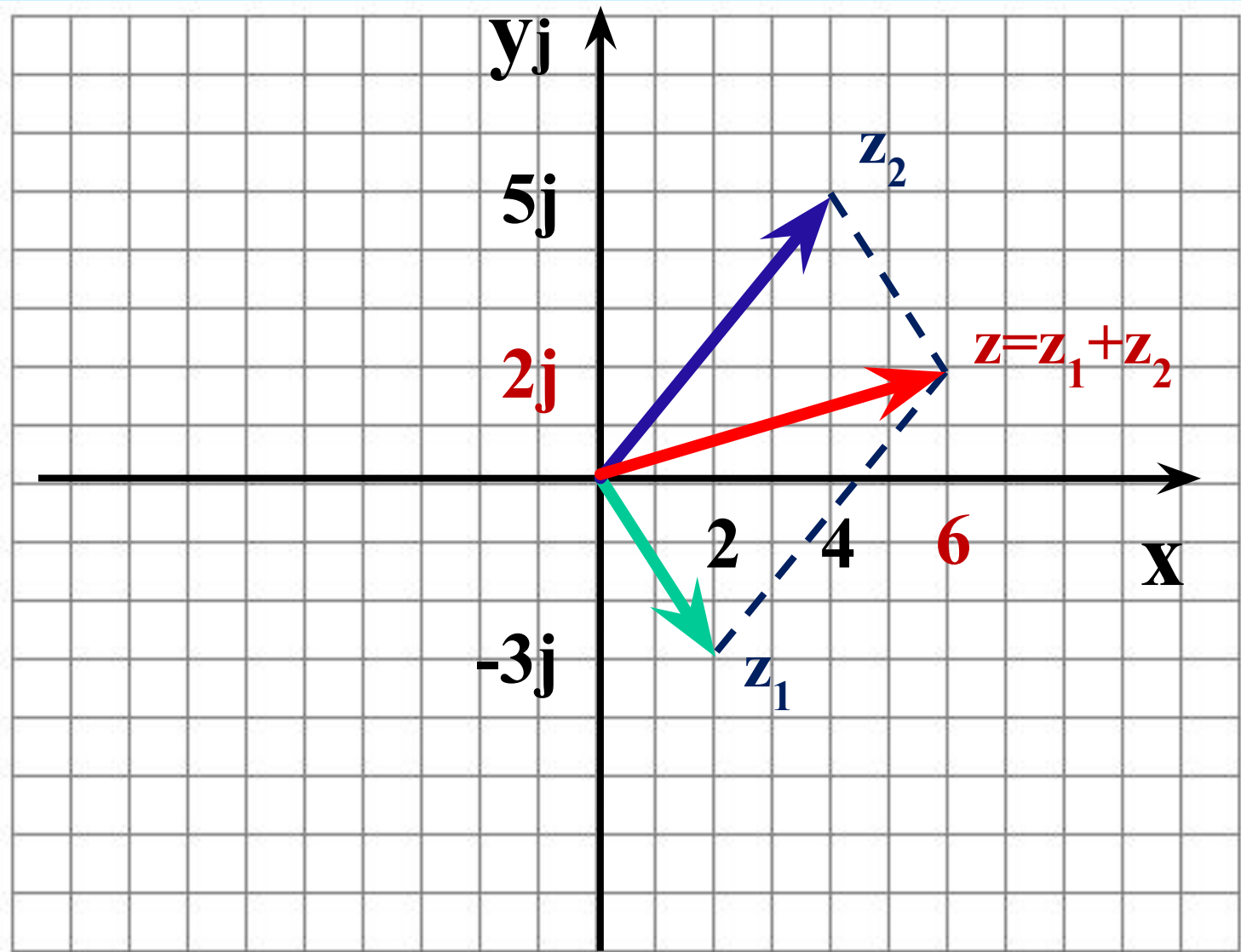
$$z_2 = -4 + 5j$$

$$x = -4$$

$$y = 5$$

Ось  
действительных  
чисел

# Геометрическая сумма комплексных чисел



$$z_1 = 2 - 3j$$

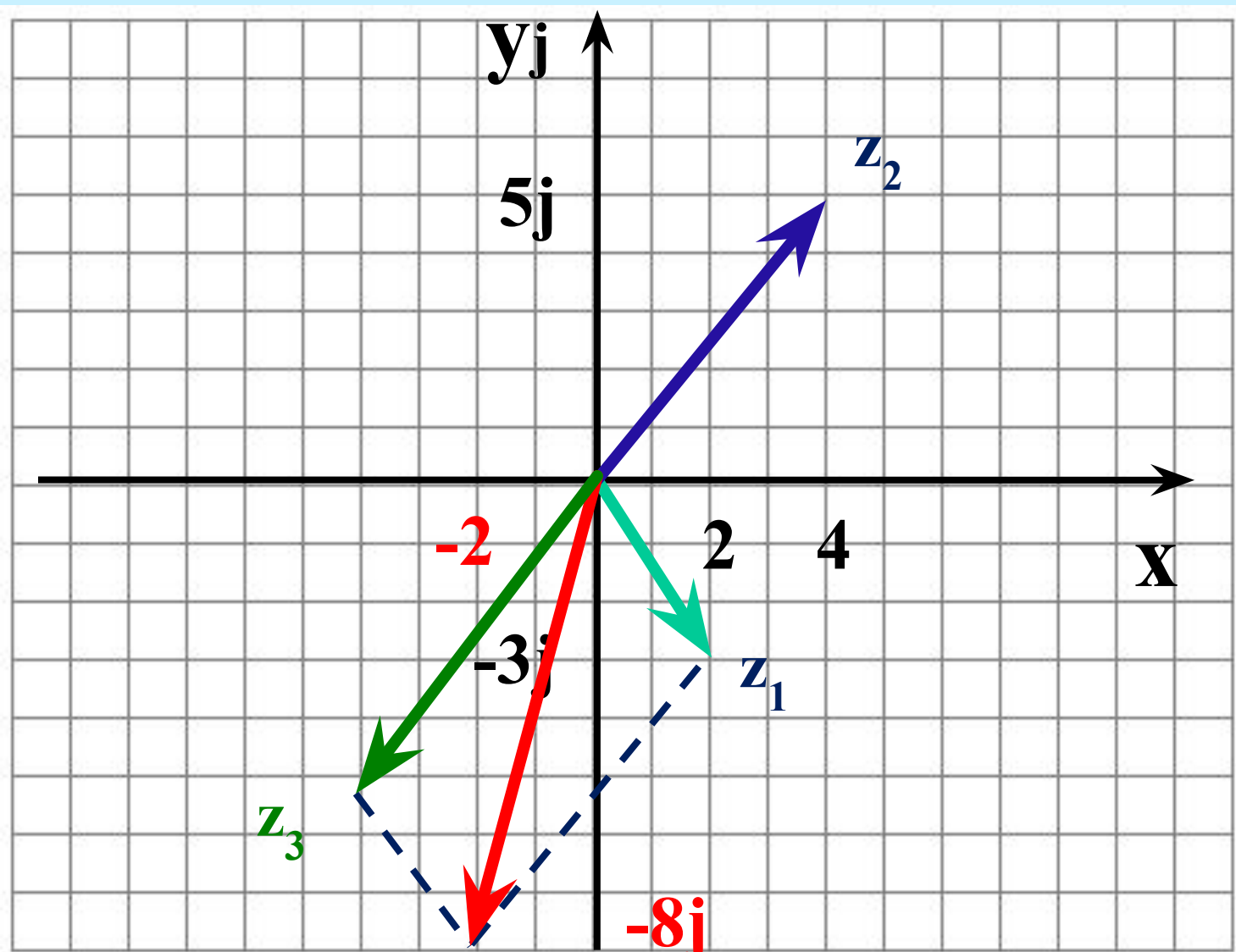
$$z_2 = 4 + 5j$$

$$z = z_1 + z_2$$

По правилу  
параллелограмма

$$z = 6 + 2j$$

# Геометрическая разность комплексных чисел



$$z_1 = 2 - 3j$$

$$z_2 = 4 + 5j$$

$$Z = z_1 - z_2$$

$$z_3 = -z_2$$

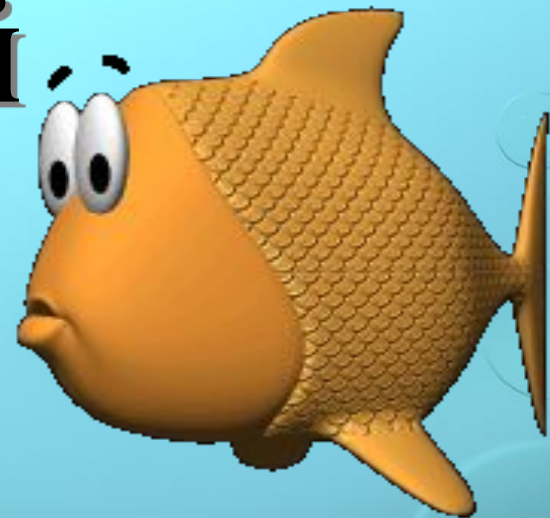
$$Z = z_1 + z_3$$

$$Z = z_1 + (-z_2)$$

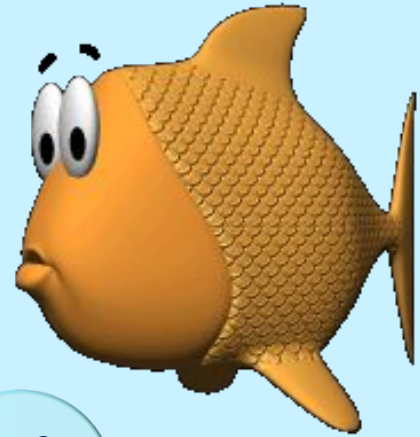
$$Z = z_1 - z_2$$

$$Z = -2 - 8j$$

**Действия над  
комплексными  
числами в  
алгебраической  
форме**



**Складывать и  
вычитать КЧ можно  
*только* в  
алгебраической форме.  
Извлечения корня в  
алгебраической форме  
не делают.**



$$z_1 = a_1 + b_1 j \quad z_2 = a_2 + b_2 j$$


### 1) Сумма кч

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 j) + (a_2 + b_2 j) = \underline{a_1} + \underline{b_1 j} + \underline{a_2} + \underline{b_2 j} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

### 2) Разность кч

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 j) - (a_2 + b_2 j) = \underline{a_1} + \underline{b_1 j} - \underline{a_2} - \underline{b_2 j} = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j$$

### 3) Произведение кч

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 + a_1 b_2 j + a_2 b_1 j + b_1 b_2 j^2 = \\ &= \underline{a_1 a_2} + \underline{a_1 b_2 j} + \underline{a_2 b_1 j} - \underline{b_1 b_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)j \end{aligned}$$


$$z_1 = 3 + 5j \quad z_2 = 2 - 6j$$

1) Сумма

$$z_1 + z_2 = (3 + 5j) + (2 - 6j) = 3 + 5j + 2 - 6j = (3 + 2) + (5 - 6)j = 5 - j$$

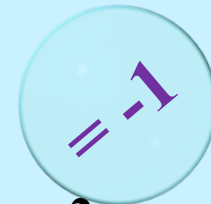
2) Разность

$$z_1 - z_2 = (3 + 5j) - (2 - 6j) = (3 - 2) + (5 + 6)j = 1 + 11j$$

3) Произведение

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 5j) \cdot (2 - 6j) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-6)j + 2 \cdot 5j + 5 \cdot (-6)j^2 =$$

$$= 6 - 18j + 10j + 30 = (6 + 30) + (-18 + 10)j = 36 - 8j$$





$$z_1 = a_1 + b_1 j \quad z_2 = a_2 + b_2 j$$

4) Деление кч **Д**омножаем числитель и знаменатель на число сопряженное знаменателю

$$\begin{aligned}
 z_1 : z_2 &= \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} = \frac{(a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 - b_2 j)}{(a_2 + b_2 j)(a_2 - b_2 j)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 j + a_2 b_1 j - b_1 b_2 j^2}{a_2 a_2 - \cancel{a_2 b_2 j} + \cancel{a_2 b_2 j} - b_2 b_2 j^2} = \\
 &= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 j + a_2 b_1 j + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) j}{a_2^2 + b_2^2} = \\
 &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} j
 \end{aligned}$$

5) Возведение в степень производится по формулам сокращенного умножения

$$z_1 = 3 + 5j \quad z_2 = 2 - 6j$$

Домножаем числитель и знаменатель на число сопряженное знаменателю

4) Деление

$$\begin{aligned}
 z_1 : z_2 &= \frac{3+5j}{2-6j} = \frac{(3+5j) \cdot (2+6j)}{(2-6j) \cdot (2+6j)} = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 6j + 2 \cdot 5j + 5 \cdot 6j^2}{2^2 - 6^2j^2} = \\
 &= \frac{6 + 18j + 10j + 30(-1)}{4 + 36} = \frac{(6-30) + (18+10)j}{40} = \\
 &= \frac{-24}{40} + \frac{28}{40}j = \frac{3}{5} + \frac{7}{10}j = \underline{\underline{-0,6 + 0,7j}}
 \end{aligned}$$



$$5) \sqrt{-121} = \sqrt{121j^2} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{j^2} = \pm 11j$$

$$x_1 = \underline{11j} \quad x_2 = \underline{-11j}$$

$\cdot (-j)$

$$6) \frac{10}{2j} = \frac{5}{j} = \frac{-5j}{-j \cdot j} = \frac{-5j}{-j^2} = \frac{-5j}{-(-1)} = -5j$$

$$7) \quad z_1 = 3 \quad z_2 = 5j \quad z_1 + z_2 = 3 + 5j$$

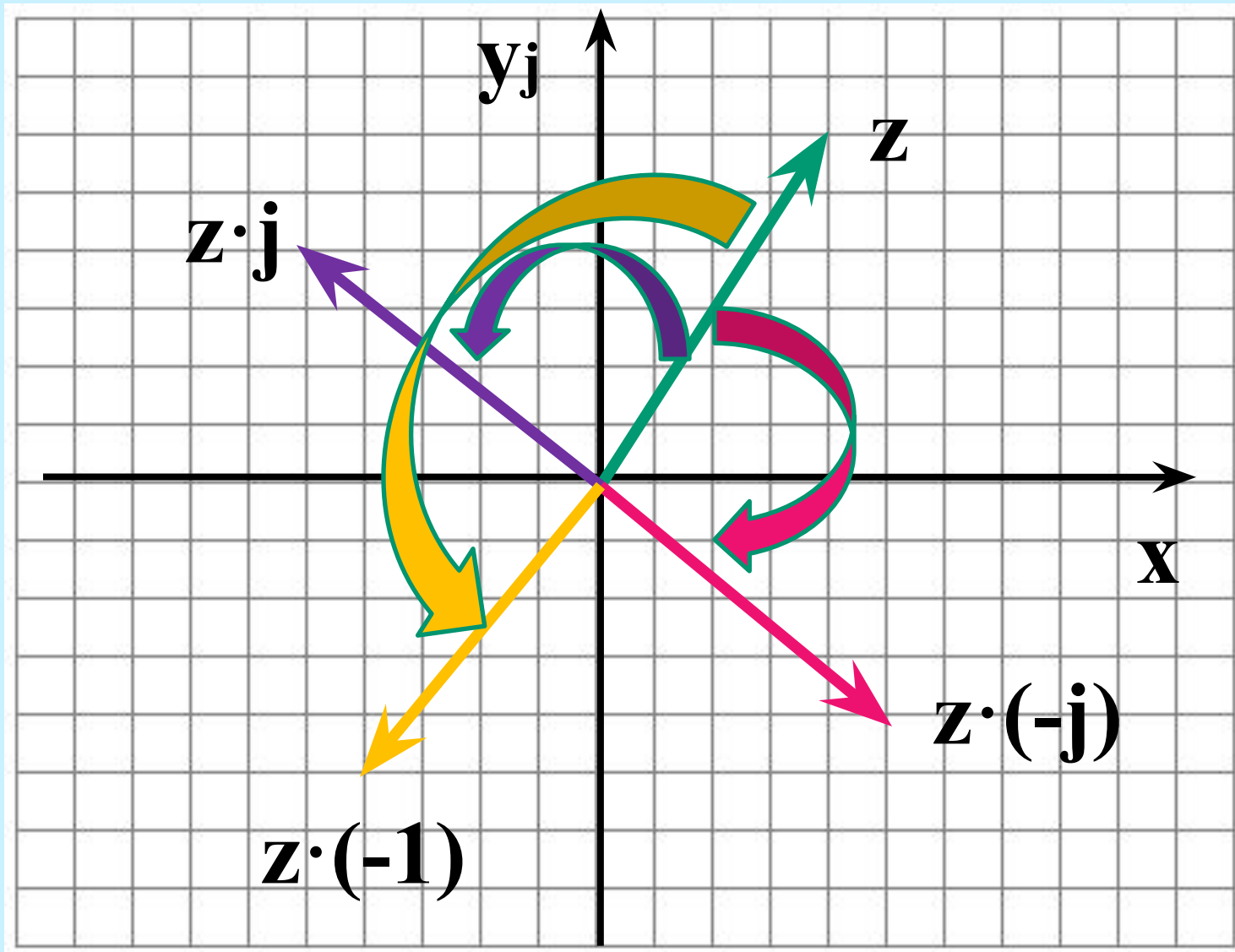
$$z_1 = 6 \quad z_2 = -2j \quad z_1 + z_2 = 6 - 2j$$

# **Свойства сопряженных чисел.**

доказать самостоятельно

- **Сумма двух сопряженных чисел есть число, равное  $2a$ .**
- **Разность двух сопряженных чисел есть мнимое число, равное  $2bj$ .**
- **Произведение сопряженных чисел есть квадрат их общего модуля.**

# Геометрическое умножение на $\pm j$ и на $-1$



# Геометрическое умножение на $\pm j$ и на $-1$

- Умножению числа на  $j$  ( $-j$ ) соответствует поворот вектора на  $90^\circ$  в положительном (отрицательном) направлении (против часовой стрелки).
- Умножению числа на  $-1$  соответствует поворот вектора на  $180^\circ$ .