CURS 1. MULŢIMI

Ţîcău Vitalie,
Lector superior universitar

1.1. Definiția mulțimii

O ***mulțime*** este o colecție *neordonată* de obiecte oarecare bine determinate și distincte.

Obiectele colecției se numesc *elemente* ale mulțimii.

De obicei pentru a descrie o mulțime folosim simbolurile „{„,”}” și „,”. Exemple:

- $\{0, 1\}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$;
- $\{a, b, \{a, b\}, ab\}$

Mulțimile se notează prin majuscule, iar elementele acestora prin minusculele alfabetului latin sau grecesc. De exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sau $\Omega = \{\alpha, \beta, \chi, \}$.

1.1. Apartenența elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii

Faptul că *un obiect este element al unei mulțimi* se notează prin „∈” sau „∋” (simbolul relației de apartenență). De exemplu:

- $0 \in A$ (citim: „*0 este element a mulțimii A*” sau „*0 aparține A*”);
- $A \ni 1$ (citim: „*A conține 1*”);
- $2, 3, 4, 5, 6, 7 \in A$ (citim: „*2, 3, 4, 5, 6 și 7 aparțin A*”).

Faptul că *un obiect nu este element al unei mulțimi* se notează prin „∉”. De exemplu: $\alpha \notin A$.

Faptul că *două mulțimi au [exact] aceleași elemente* se notează prin „=” altfel „≠”. De exemplu:

- $\{0, 1\} = \{1, 0\}$;
- $\{0, 1\} \neq \{\{0\}, \{1\}\}$.

Numărul de elemente a mulțimii se numește ***cardinalul*** acesteia.

Dacă am notat mulțimea prin de exemplu *A* atunci cardinalul este $|A|$. De exemplu:

- $|\{0, 1\}| = 2$;
- $|\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}| = 16$;

1.2. Modalități de descriere/definire a mulțimilor

1. *Prin enumerarea elementelor mulțimii*: {*0, 1, 2*}; {*0, 1, 2, ...*}; {*...,−2,−1, 0, 1, 2, ...*};
2. *Prin specificarea unei proprietăți caracteristice doar elementelor mulțimii*: {*a: a ≡ 3(mod2)*}; {*a: a este un număr par*}; {x: $x^2 - 1 = 0$}.
3. *Metoda recursivă*. De exemplu definiția recursivă a mulțimii numerelor naturale, *N*:
   - *Baza*: $0 \in N$;
   - *Pas constructiv*: Dacă $n \in N$ atunci $n+1 \in N$;
   - Nimic altceva nu mai este în *N*.

1.2. Mulțimi remarcabile

- *N* – mulțimea numerelor naturale;
- *Z* – mulțimea numerelor întregi;
- *Q* – mulțimea numerelor raționale;
- *I* – mulțimea numerelor iraționale;
- *R* – mulțimea numerelor reale;
- *C* – mulțimea numerelor complexe.

1.2. Modalități de descriere/definire a mulțimilor

Exemple. Enumerați elementele mulțimilor următoare:

- $\{x \in N : x^2 < 25\}$
- $\{x \in N$: *x este par și* $2 < x < 11\}$
- {*x : x este unul dintre primii trei cosmonauţi sovietici*}
- $\{x \in R : x^2 = -1\}$
- {*x : x este unul dintre municipiile Republicii Moldova*}
- $\{x \in Z : |x| < 4\}$

1.3. Mulțimea vidă

Mulțimea care nu conține nici un element se numește ***mulțimea vidă*** şi se notează prin $\varnothing$ sau simplu {}. Mulțimea vidă este unică. De exemplu:

- $\{x \in R: x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$;
- $\{x \in C: x^2 + 1 = 0\} \neq \varnothing$;
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

1.3. Mulțimea putere

Fie A o mulțime arbitrară. Familia tuturor submulțimilor din A se numește ***mulțimea putere*** a lui A.

Se notează $P(A)$ sau $P(A)$ sau 2^A. Cardinalul mulțimii putere se calculează după formula $2^{|A|}$. De exemplu:

- Dacă $A = \{0, 1\}$ atunci $2^A = \{\{0\}, \{1\}, A, \varnothing\}$ (și $|2^A|=4=2^2$)
- Dacă $A = \{0, 1, 2\}$ atunci $2^A = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A, \varnothing\}$ (și $|2^A| = 8 = 2^3$)
- Dacă A = $\varnothing$; atunci $2^A = \{\varnothing\}$ (și $|2^A| = 1 = 2^0$)
- <u>Exercițiu.</u>
- Determinați 2^A dacă $A = \{\varnothing\}$
- Determinați 2^A dacă $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \varnothing\}\}$

1.4. Relații între mulțimi

Spunem că o mulțime A este ***inclusă*** în altă mulțime B dacă orice element din A este şi element al mulțimii B.

Expresia „*A este inclusă în B*" are următoarele sinonime: „*A este o submulțime a lui B*" şi „*A este o parte a lui B*".

Din definiție reiese că pentru orice mulțime A: $\varnothing \subseteq A$; $A \subseteq A$.

Pentru relația de incluziune se folosesc două categorii de simboluri:

- Simbolurile „$\subseteq$" sau „$\supseteq$". Scriem $A \subseteq B$ dacă şi numai dacă A este o submulțime a lui B. De exemplu: $\{0, 1\} \subseteq \{0, 1\}$ sau $\{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$; $\{0, 1, 2\} \supseteq \{0, 1\}$.
- Simbolurile „$\subset$" sau „$\supset$" (***incluziunea strictă***). Scriem $A \subset B$ dacă şi numai dacă se îndeplinește condiția: A este o submulțime a lui B şi $A \neq B$. De exemplu: $\{0\} \subset \{0, 1\}$; $\{0, 1\} \not\subset \{0, 1\}$.
- Fie A o mulțime oarecare. Submulțimile lui A diferite de A şi $\varnothing$ se numesc ***submulțimi proprii***, iar A şi $\varnothing$ – ***submulțimi improprii*** ale lui A.

1.4. Relații între mulțimi

O mulțime B este o ***submulțime proprie*** a lui A dacă orice element al lui B este în A şi în plus există cel puțin un element din A care nu este în B.

<u>Exerciții</u>.

Fie $A = \{2, 5, 17, 27\}$. Care din afirmaţiile următoare sunt adevărate? Argumentați.

- $5 \in A$
- $2 + 5 \in A$
- $\varnothing \in A$
- $A \in A$

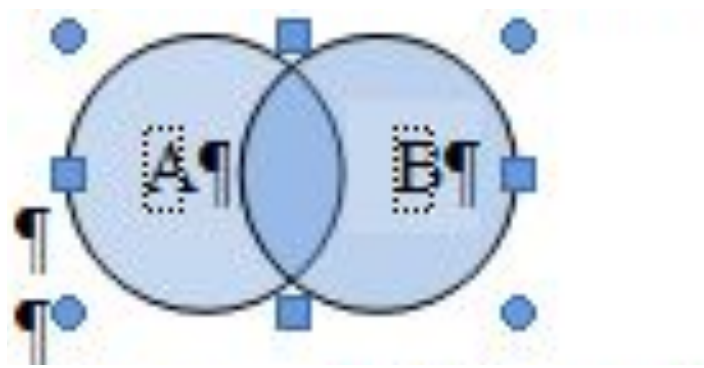
Fie $A = \{2, \{5, 17\}, 27\}$. Care din afirmaţiile următoare sunt adevărate? Argumentați.

- $5 \in A$
- $\{2, 27\} \subseteq A$
- $\{5, 17\} \subseteq A$
- $\{5, 17\} \in A$

1.5. Diagramele Venn

Diagramele Venn sunt modele vizuale pentru reprezentarea relațiilor dintre mulțimi. Caracteristic pentru acestea este că în aceeași diagramă pot fi reprezentate orice combinație posibilă de relații între mulțimi.

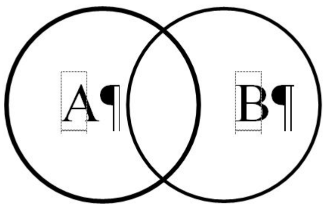
Zonele în care sunt elemente se haşurează, iar zonele în care nu-s elemente nu se haşurează. Exemple:



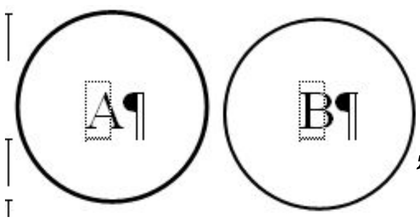
A = {0, 1, 2, 3}, *B* = {3, 4, 5, 6}.

1.5. Diagramele Euler

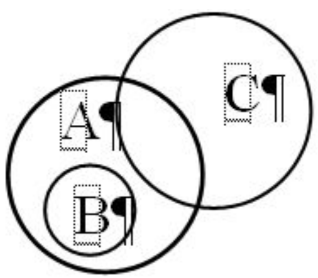
Diagramele Euler sînt modele vizuale pentru reprezentarea relațiilor dintre mulțimi. Caracteristic pentru acestea este că într-o diagramă poate reprezentată doar o combinație de relații între mulțimi.



2, 3}, B = {3, 4, 5, 6}.



, 3}, B = {4, 5, 6}.



3}, B = {0,1}, C = {2,3,4,5,6}.

1.6. Operații cu mulțimi

O ***operație*** * este ***bine definită*** dacă valoarea *a* * *b* există întotdeauna şi este unică.

De exemplu:

- $a \div b$ pe N nu este bine definită, deoarece $1 \div 2 \notin N$
- $a \div b$ pe R nu este bine definită, deoarece $a \div 0$ nu este unică
- $a \div b$ pe R^* este bine definită.

Pentru ca operațiile cu mulțimi să fie bine definite este nevoie de ***mulțimea universală*** sau ***universul discursului*** notată prin *U* sau U.

În cazurile când universul discursului nu este specificat toate mulțimile despre care se discută sunt considerate submulțimi ale unei mulțimi universale *U*.

1.6.1. Intersecția și reuniunea

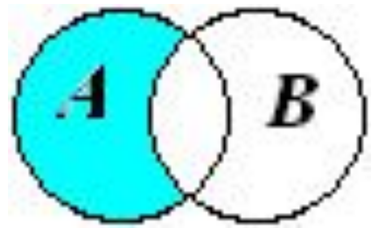
Intersecția : $A \cap B = \{a : a \in A \text{ şi } a \in B\}$

Reuniunea: $A \cup B = \{a : a \in A \text{ sau } a \in B\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1.6.2. Diferența. Diferența simetrică

Diferența: $A - B = \{a : a \in A \text{ şi } a \notin B\}$



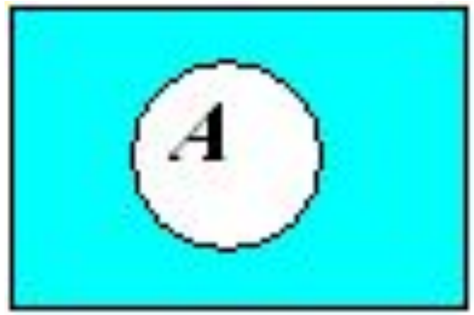
$|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Diferența simetrică: $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

$|A \,\Delta\, B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

1.6.3. Complementul. Produsul cartezian

***Complementul*: $A^c = U - A$**



$|Ac| = |U| - |A|$

Produsul cartezian: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B$

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

1.6. Operații cu mulțimi

Fie 3 submulțimi ale $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$:

$A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, t, v\}$, $C = \{p, s, t, u\}$

Determinați:

- $B \cap C$
- $A \cup C$
- C^c
- $A \cap B \cap C$
- $B - C$
- $(A \cup B)^c$
- $A \times B$ $(A \cup B) \cap C^c$

1.6. Generalizarea operațiilor cu mulțimi

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

1.7. Identități cu mulțimi

Comutativitatea	$A \cap B = B \cap A$
Asociativitatea	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivitatea	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorbția	$A \cap (A \cup B) = A$
Idempotența	$A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

1.7. Identități cu mulțimi

Comutativitatea	$A \cup B = B \cup A$
Asociativitatea	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivitatea	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Absorbția	$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotența	$A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$

Distributivitatea	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
Involuția	$A \setminus A = \varnothing$; $(A^c)^c = A$

1.8.1. Metoda tabelului de apartenență

În aplicații putem să ne ciocnim de necesitatea de a demonstra unele relații între mulțimi.

<u>Exemplu</u>. Demonstrați: $A \cap (B \cup A^c) = B \cap A$.

A	B	A^c	$B \cup A^c$	$A \cap (B \cup A^c)$	$B \cap A$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

1.8.2. Metoda incluziunilor duble

Exemplu. Să se demonstreze identitatea:

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Suficiența.

$x \in ((A \cup B) \setminus C) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ şi $x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ şi $x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in B$ şi $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A \setminus C)$ sau $(x \in B \setminus C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Necesitatea.

$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)x \Rightarrow (x \in A \setminus C)$ sau $(x \in B \setminus C)$

$\Rightarrow x \in A$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in B$ şi $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ şi $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ şi $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus C$

1.8.3. Metoda transformărilor echivalente

Exemplu. Să se demonstreze identitatea:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Demonstraţie.

$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c =$

$= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$