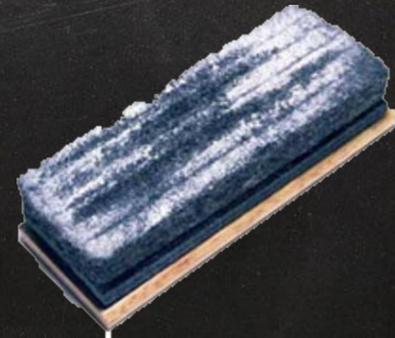


среда, 13 мая 2020 г.

Геометрические преобразования пространства



Цель занятия

Расширение представления обучающихся о пространстве, формирование понятий: подобие фигур, осевая и центральная симметрия, гомотетия, применение полученных знаний для решения задач.

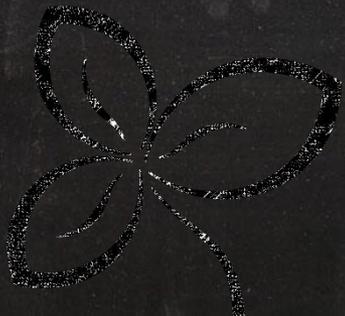


Задачи занятия

Обучающая: научить решать простейшие задачи на построение подобия и симметрии, гомотетии, использовать при этом чертежные принадлежности, выполнять рисунки размером не менее $\frac{1}{2}$ страницы чётко и аккуратно.

Воспитательная: воспитывать ответственность за выполняемую работу, выполнять её точно, аккуратно и вовремя.

Развивающая: развивать умение самостоятельной работы с учебной литературой, с электронными носителями, добиваться выполнения качественных рисунков.



Информационно-справочное оснащение

Основная литература:

1. Геометрия. Учебник. 10-11 классы Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.

Просвещение, 2012 г.

2. Башмаков М.И. Математика. М., «Академия», 2012

Дополнительная литература:

1. Геометрия. Учебник. 10-11 классы. И.Ф.Шарыгин, Дрофа, 2009 г.

2. А.А. Заславский, «Геометрические преобразования», М., МЦНМО, 2003, 2004.

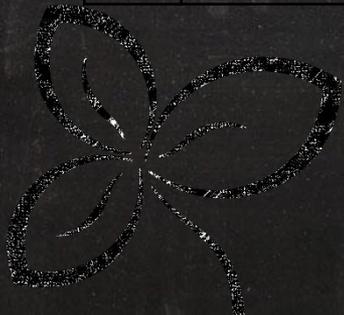
3. Математика. Наглядный справочник с примерами. Л.Э.Генденштейн, А. П.Ершова, А.С.Ершова,

ИЛЕКСА, 2015 г.



Интернет-ресурсы

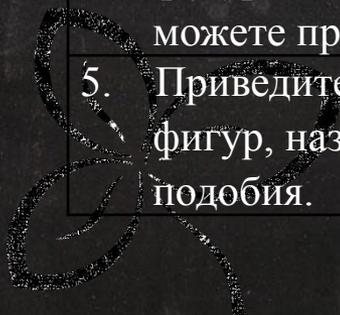
1	Всем, кто учится	А. Васильев, Санкт-Петербург	http://www.alleng.ru/edu/math.htm
2	Сайт ЕГЭ	Минобрнауки РФ	http://ege.ru
3	Math.ru	Учредитель РАН	http://www.math.ru/
4	Задачи	МЦНМО	http://www.problems.ru/
5	Годоза	GODOZA	http://www.godoza.ru



1.АКТУАЛИЗАЦИЯ РАНЕЕ ИЗУЧЕННОГО МАТЕРИАЛА УЧЕБНОГО КУРСА

(ответить на вопросы (тестовые задания) и провести самооценку усвоенного материала)

Вопрос (тестовое задание)	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Постройте равные геометрические фигуры.		
2. Начертите подобные геометрические фигуры с коэффициентом подобия 2.		
3. Приведите пример задачи с применением теоремы об отношении площадей подобных фигур.		
4. Какие примеры симметричных фигур из окружающей жизни вы можете привести?		
5. Приведите примеры подобных фигур, назовите коэффициент подобия.		



ИЗУЧАЕМЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

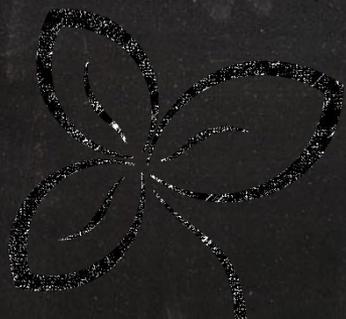
1. Движение и подобие

1. Параллельный перенос

1. Поворот.

1. Симметрия.

5. Определение и свойства подобия.



Вопрос 1. Движение и подобие

1.1. Определение и примеры движений.

Определение: *Движением* называется преобразование (т. е. взаимно однозначное отображение плоскости на себя), при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

Из определения сразу вытекают *свойства движений*.

1. Движение переводит любую прямую в прямую.

Доказательство. Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда $AB+BC=AC$. Из определения движения следует, что образы A', B', C' точек A, B, C удовлетворяют условию $A'B'+B'C'=A'C'$, т. е. точки A', B', C' также лежат на одной прямой.

2. Движение переводит любой угол в равный угол.

Доказательство. Из предыдущего свойства следует, что $\angle AOB$ переходит при движении в $\angle A'O'B'$, где A', O', B' — образы точек A, O, B . Но треугольники AOB и $A'O'B'$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

3. **Композиция** (последовательное применение) двух движений есть движение.

4. **Преобразование**, обратное движению, есть движение.

5. **Тождественное преобразование** (преобразование, оставляющее каждую точку на месте) есть движение.

Доказательства свойств 3–5 очевидны. Совокупность преобразований, удовлетворяющая свойствам 3–5, называется группой. Таким образом, движения плоскости образуют группу.

Контрольные задания по Вопросу 1

Контрольное задание (тестовое задание)	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Определить движение точки треугольника при повороте на 90 градусов относительно одной из его вершин.		
2. Покажите на примере определение подобия.		
3. Дайте примеры на свойства движения и подобия.		



Вопрос 2. Параллельный перенос

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x; y; z)$ фигуры переходит в точку $(x + a; y + b; z + c)$, где числа a, b, c одни и те же для всех точек $(x; y; z)$. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

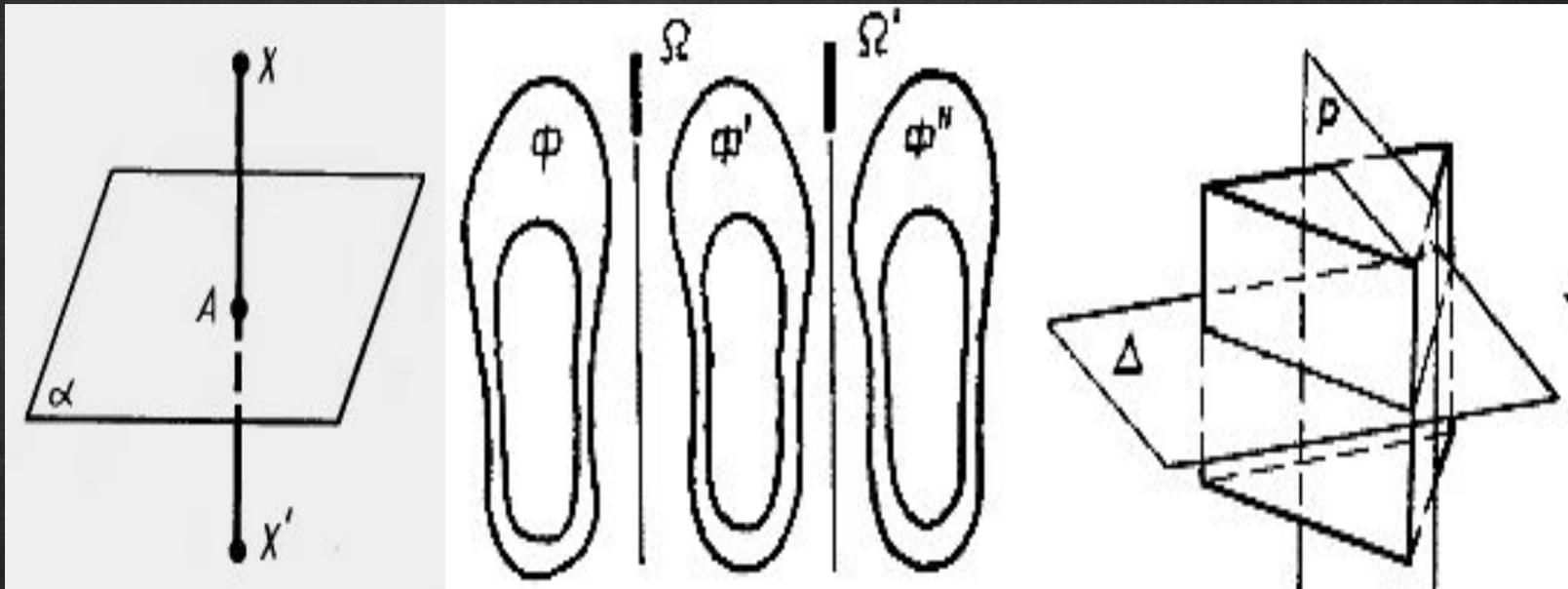
$$x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c,$$

Параллельный перенос в пространстве обладает следующими свойствами:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя.
4. Каковы бы ни были точки A и A' , существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A' .
5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Симметрия относительно плоскости - это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону плоскости, всегда будет соответствовать точка, расположенная по другую сторону плоскости, а отрезки, соединяющие эти точки, будут перпендикулярны плоскости симметрии и делаться ею пополам.

Вопрос 2. Параллельный перенос



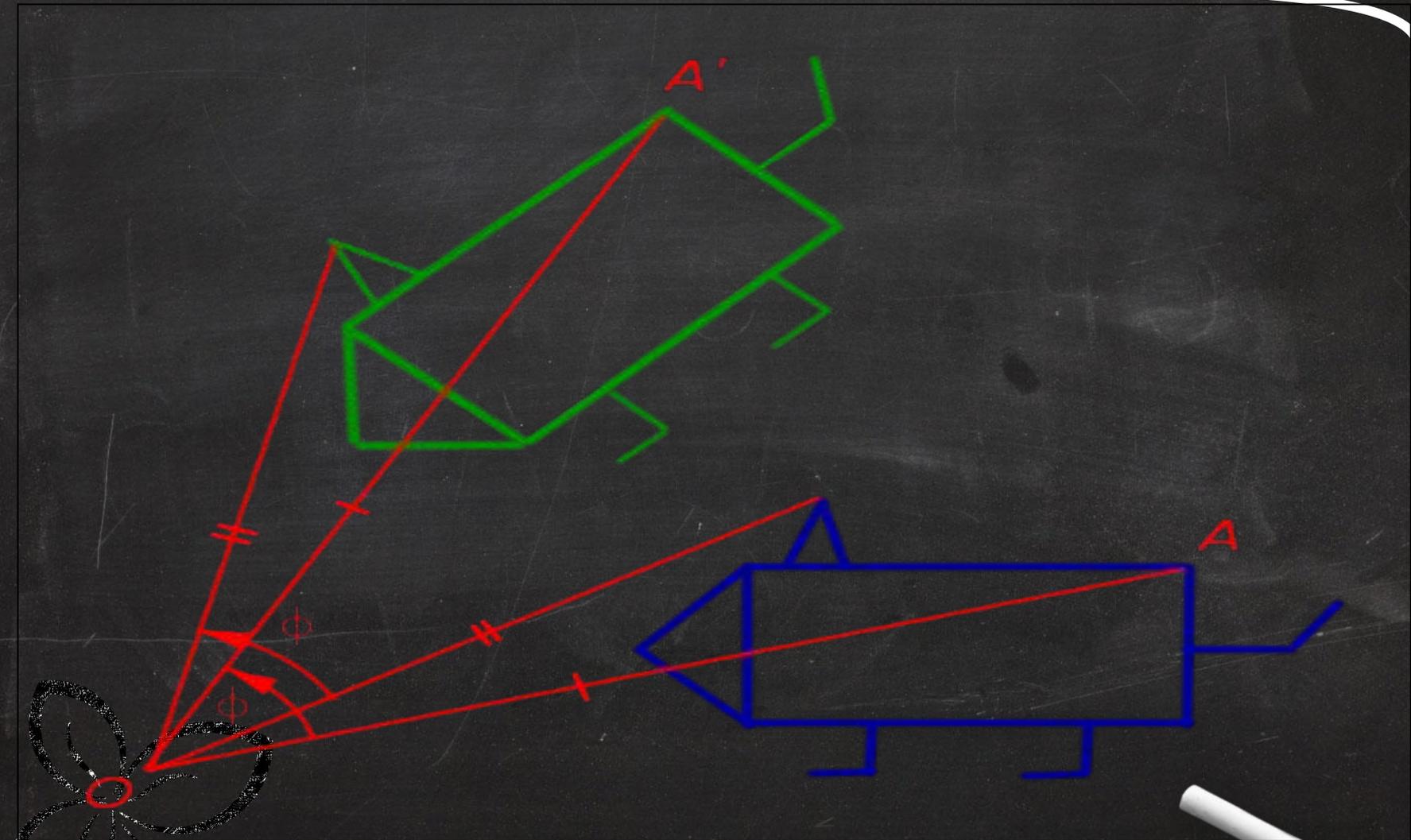
Решение задач

1. Даны точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.
 2. Даны точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.
 3. Найдите значения a , b , c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка $A(1; 0; 2)$ переходит в точку $A'(2; 1; 0)$.
 4. При параллельном переносе точка $A(2; 1; -1)$ переходит в точку $A'(1; -1; 0)$. В какую точку переходит начало координат?
 5. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B , а точка C — в точку D , если:
 - 1) $A(2; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(3; -2; 1)$, $D(2; -3; 0)$;
 - 2) $A(-2; 3; 5)$, $B(1; 2; 4)$, $C(4; -3; 6)$, $D(7; -2; 5)$;
 - 3) $A(0; 1; 2)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(3; -2; 2)$, $D(2; -3; 1)$;
 - 4) $A(1; 1; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(-2; 2; 1)$, $D(1; 1; 1)$?
 6. Выберите произвольный отрезок AB и вектор. Постройте отрезок $A'B'$ переносом на выбранный вектор.
 7. Выберите вектор и перенесите произвольный треугольник на этот вектор.
 8. Нарисуйте фигуру, которая получится в результате 4-х кратного параллельного переноса равнобедренного треугольника на вектор его высоты, проведенной из вершины к основанию.
 9. $MABCV$ — правильная пирамида. Постройте фигуру, симметричную относительно плоскости основания 10 .
- Дана правильная призма. Постройте фигуру, симметричную относительно плоскости основания.

Контрольные задания по Вопросу

Контрольное задание (тестовое задание)	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Приведите пример параллельного переноса из жизни		
2. Приведите примеры и начертите фигуры, основываясь на свойствах параллельного переноса.		
3. Выполните параллельный перенос прямоугольного треугольника ABC на вектор a .		

Вопрос 3. Поворот



Вопрос 3. Поворот

Определение. Поворотом вокруг точки O на угол ϕ называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A' , что $OA=OA'$ и угол между лучами OA и OA' (т. е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча OA к лучу OA') равен ϕ .

Утверждение. Поворот является движением.

Доказательство. Пусть точки A, B переходят соответственно в точки A', B' . Так как $\angle AOA' = \angle BOB'$, мы заключаем, что $\angle AOB = \angle A'O'B'$. Поэтому треугольники AOB и $A'O'B'$ равны по двум сторонам и углу между ними, и, значит, $AB = A'B'$. Очевидно, что поворот на угол 2π является тождественным преобразованием. Поэтому всегда можно считать, что $0 < \phi < 2\pi$.



Свойства поворота

1. Если прямая a при повороте на угол ϕ переходит в прямую a' , то один из углов между a и a' равен ϕ при $0 \leq \phi < \pi$ и $\phi - \pi$ при $\pi \leq \phi < 2\pi$.

Доказательство. Если прямая a проходит через центр поворота O , утверждение очевидно. В противном случае опустим на a перпендикуляр OA и построим образ A' точки A . Так как движения сохраняют величины углов, образом прямой a будет прямая a' , проходящая через A' и перпендикулярная OA' . Из свойств углов с перпендикулярными сторонами вытекает искомое свойство.

2. Композиция поворотов вокруг точки O на углы α и β есть поворот вокруг O на угол $\alpha + \beta$ (или $\alpha + \beta - 2\pi$).

3. Преобразование, обратное к повороту вокруг точки O на угол ϕ , есть поворот вокруг O на угол $2\pi - \phi$.

Свойства 2–3 непосредственно следуют из определения поворота. Они означают, что все повороты с данным центром образуют группу. Поворот на угол π называется центральной симметрией. Из свойства 1 вытекает, что центральная симметрия переводит любую прямую в параллельную.

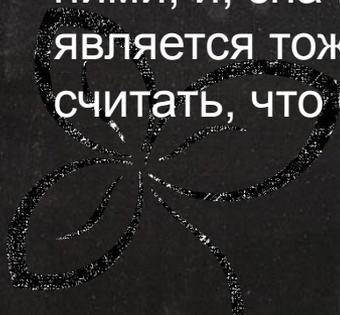
Свойства поворота

Задача . Дан угол и точка O внутри него. Провести через O прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый на ней сторонами угла, делился точкой O пополам.

Решение. Пусть AB искомый отрезок. При центральной симметрии с центром O точка A переходит в B . Следовательно, точка B является пересечением одной стороны угла образом другой при центральной симметрии относительно O . Задача всегда имеет единственное решение что $OA=OB$ и угол между лучами OA и OB (т. е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча OA к лучу OB) равен ϕ .

Утверждение. Поворот является движением.

Доказательство. Пусть точки A, B переходят соответственно в точки A', B' . Так как $\angle AOA' = \angle BOB'$, мы заключаем, что $\angle AOB = \angle A'OB'$. Поэтому треугольники AOB и $A'OB'$ равны по двум сторонам и углу между ними, и, значит, $AB = A'B'$. Очевидно, что поворот на угол 2ϕ является тождественным преобразованием. Поэтому всегда можно считать, что $0 < \phi < \pi$. Отметим свойства поворота.



Контрольные задания по Вопросу 3

Контрольное задание (тестовое задание)	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Приведите пример поворота, используя его определение и сделайте чертеж.		
2. Используя свойства поворота привести пример поворота фигур: треугольника, квадрата.		
3. Выполните поворот трапеции АВСЕ на угол, равный 45 градусам.		

Вопрос 4. Симметрия

Определение: Симметрией относительно прямой l называется преобразование, переводящее каждую точку A в такую точку A' , что прямая l перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину.

Утверждение. Симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A, B переходят в A', B' . Рассмотрим три случая.

1. Отрезок AB параллелен прямой l . Тогда $AB = A'B'$, так как $ABB'A'$ прямоугольник.
2. Отрезок AB перпендикулярен прямой l .

Искомое равенство получается непосредственным вычислением. 3. Отрезок AB не параллелен и не перпендикулярен прямой l . Опустим на прямую BB' перпендикуляры AC и $A'C'$. Нетрудно убедиться, что точки C и C' симметричны относительно l . Из рассмотрения двух первых случаев следует, что $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Поэтому $AB = A'B'$ как гипотенузы равных треугольников ABC и $A'B'C'$. Отметим важное отличие симметрии от движений, рассмотренных выше. Пусть в треугольнике ABC вершины A, B, C следуют друг за другом при обходе треугольника против часовой стрелки. Поворот и параллельный перенос переводят ABC в треугольник $A'B'C'$ с тем же порядком вершин, при симметрии же вершины A', B', C' следуют друг за другом при об-

ходе по часовой стрелке. Преобразования, сохраняющие порядок вершин треугольника, называются преобразованиями, сохраняющими ориентацию, или собственными, не сохраняющие меняющими ориентацию или несобственными. Второе название объясняется тем, что перевести фигуру в симметричную, не выводя ее из плоскости, невозможно. Таким образом, поворот и параллельный перенос являются собственными движениями, а симметрия несобственным. Нетрудно убедиться, что композиция двух собственных или двух несобственных движений является собственным движением, а композиция собственного и несобственного движений несобственным.

Преобразование, обратное к собственному или несобственному, является преобразованием того же типа. Следовательно, собственные движения образуют группу. Рассмотрим задачи, связанные с понятием симметрии.

Вопрос 4. Симметрия

1.3. Определение и свойства подобия.

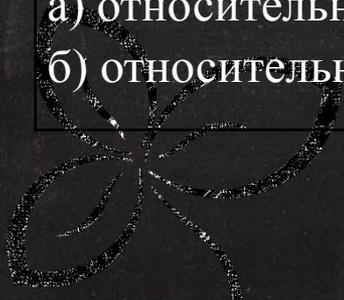
Как было отмечено выше, важность понятия «движение» для геометрии вызвана тем фактом, что фигуры, переводимые друг в друга движениями, с геометрической точки зрения неразличимы. Однако практически во всех теоремах и задачах геометрии изучаются свойства фигур, зависящие лишь от их формы, но не от размера. Собственно, само понятие размера приобретает смысл лишь после выбора определенных единиц измерения длины, площади и т. д., а выбор этих единиц, естественно, не должен влиять на геометрические выводы. В связи с этим имеет смысл рассматривать преобразования следующего вида.

О п р е д е л е н и е. Подобием называется преобразование, при котором для любых двух точек A и B отношение расстояний между их образами A' и B' к расстоянию между самими точками равно одному и тому же числу: $A'B' = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется коэффициентом подобия. Из определения сразу следует, что подобия образуют группу. Действительно, композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 будет подобием с коэффициентом $k_1 k_2$, а преобразование, обратное подобию с коэффициентом k , — подобием с коэффициентом $1/k$. Важным частным случаем подобия является гомотетия.



Вопрос 4. Симметрия

Контрольное задание (тестовое задание)	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Приведите пример, сделайте чертеж симметрии произвольного многоугольника.		
2. Приведите примеры различных видов симметрии.		
3. Нарисуйте параллелограмм, симметричный данному ABCD а) относительно точки C, б) относительно прямой BC.		



Вопрос 5. (Дополнительный) Определение и свойства подобия

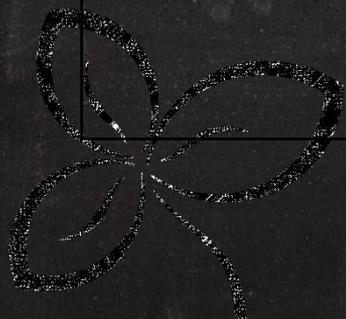
Определение: Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k , отличным от нуля, называется преобразование, переводящее каждую точку A в точку A' , лежащую на прямой OA и удовлетворяющую условию $OA' = k \cdot OA$. При $k > 0$ точки A и A' лежат по одну сторону от точки O , при $k < 0$ по разные. Отметим, что гомотетия с коэффициентом $k = -1$ является центральной симметрией. То, что гомотетия является подобием, почти очевидно. Действительно, если точки A, B переходят в точки A', B' , то треугольники OAB и $OA'B'$ подобны и, значит, $A'B' = k \cdot AB$.

С другой стороны, если дано произвольное подобие с коэффициентом k , то композиция этого подобия и гомотетии с произвольным центром и коэффициентом $1/k$ будет движением. Поэтому данное подобие можно представить как композицию этого движения и гомотетии с центром O и коэффициентом k . При этом за счет выбора центра гомотетии можно добиться того, что движение будет иметь достаточно простой вид. А именно, верны следующие утверждения.

Теорема. Любое подобие, сохраняющее ориентацию, с коэффициентом k , отличным от 1, является композицией гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и поворота вокруг точки O (иногда такое преобразование называется спиральным подобием).

Подведение итогов учебного занятия

Наименование изученного вопроса учебного занятия	Контрольное задание по изученному вопросу	Ответ	Самооценка (по 5-ти бальной шкале)
1. Движение и подобие	См. д/з. №1		
2. Параллельный перенос	См. д/з. №1		
3. Поворот	Выполнить поворот треугольника ABC на 90 градусов		
4. Симметрия	Выполнить аппликацию симметричных фигур		



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ НА СЛЕДУЮЩЕЕ

- ЗАНЯТИЕ**
1. Придумать и выполнить задание, аналогичное №3 к вопросам 1 и 2 (например, вместо треугольника взять окружность);
 2. Выполнить гомотетию квадрата ABC с коэффициентом гомотетии $k=2$.
 3. Выберите произвольный отрезок AB и вектор. Постройте отрезок A'B' переносом на выбранный вектор.

на «3» и «4»: 1 задание;
на «5»: 2 задание.

