метод деления отрезка пополам

1. Уточнение корней трансцендентного уравнения

Пусть дано уравнение f(x) = 0,
где f(x) – непрерывная функция.

ξ

Требуется найти корень этого уравнения
с точностью до ε

$$a \le \xi \le b$$

✍ Погрешность этого приближения не превышает длины отрезка $b\text{-}a$

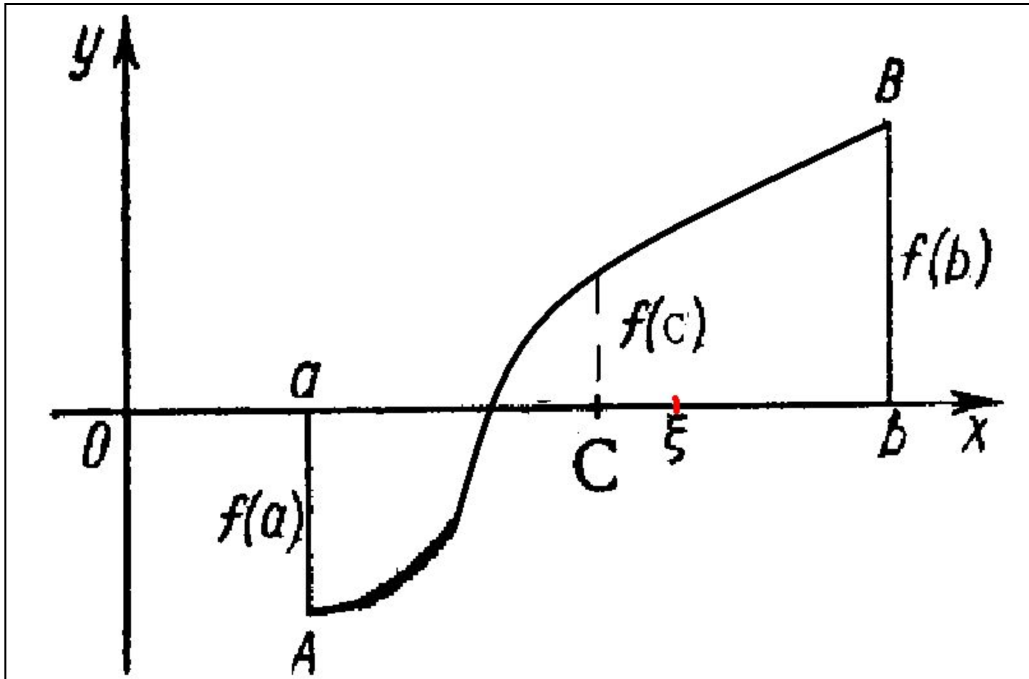
✍ Если $b\text{-}a \le \varepsilon$

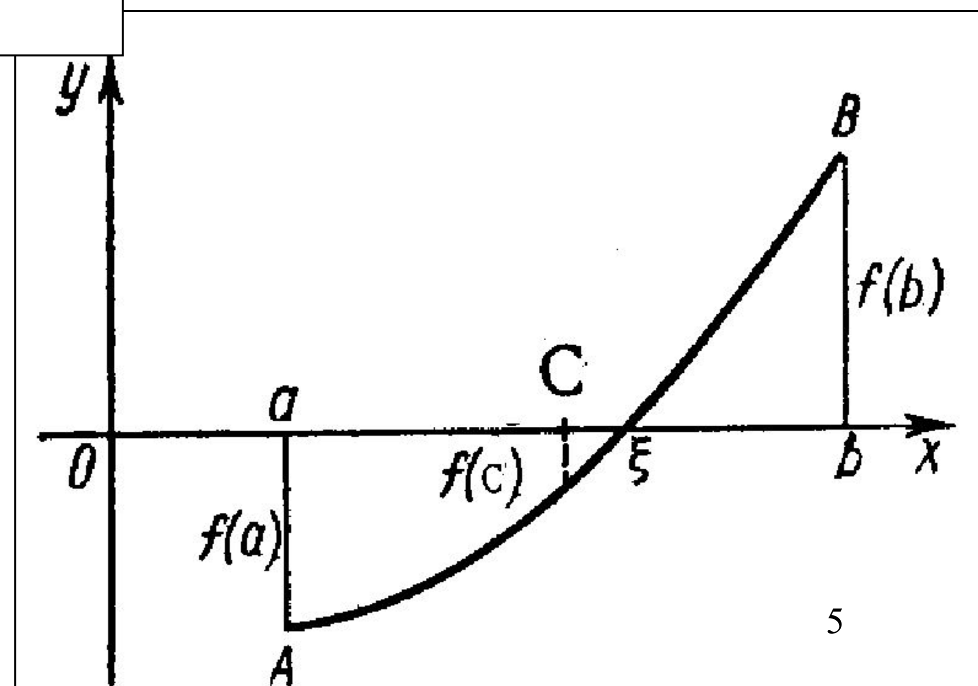
то необходимая точность вычислений достигнута и за приближенное значение корня ξ можно принять либо a, либо b.

Значение корня будет более точным, когда за приближенное значение корня приняты не концы отрезка a и b, а середина этого отрезка, то есть **c= (a + b)/2**

$$\varepsilon \leq \frac{b-a}{2}$$

2. Метод половинного деления





$$b_n - a_n = (b-a)/2^n \le \varepsilon$$

$$a_n \le \xi \le b_n$$

Тогда приближенное значение корня - $\xi = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

а погрешность не превышает $(b-a)/2^{n+1}$

Алгоритм определения корня:

1.представить решаемое уравнение в виде $f(x) = 0$

2.выбрать такие a, b, что $f(a)*f(b)< 0$

3. вычислить $c = (a + b)/2$

4. если $f(a)*f(c)< 0$, то $b = c$ наче $a = c$

5. если критерий сходимости не выполнен, то перейти к пункту 3

6. напечатать корень $c = (a + b)/2$

Пример 1. Найти корни уравнения $\lg x - 3x + 5 = 0$ на отрезке [1, 2] методом половинного деления с точностью до 0,1.

Решение

ШАГ 1

Пусть $f(x)= \lg x - 3x + 5$

$f(1)= 2$; $f(2) \approx -0.307$; $f(1) * f(2) < 0$.

$f'(x)=1/x - 3 <0$ на отрезке [1, 2] .

Разделим отрезок [1, 2] пополам точкой

$c=(1+2)/2=1,5$

$f(1)= \lg 1 – 3*1 + 5=0-3+5=2>0$

$f(1,5)= \lg 1,5 – 3*1,5 + 5>0$

$f(1)* f(1,5)>0$, то есть $f(a)* f(c)>0$

Следовательно, корень лежит в отрезке [c, b]

Погрешность вычислений равна $(2-1)/2=0,5$

ШАГ 2

Разделим отрезок [1,5; 2] пополам точкой

$c=(1,5+2)/2=1,75$

$f(1,5)= \lg 1,5 – 3*1,5 + 5>0$

$f(1,75)= \lg 1,75 – 3*1,75 + 5<0$

$f(1,5)* f(1,75)<0$, то есть $f(a)* f(c)<0$

Следовательно, корень лежит в отрезке [a, c]

Погрешность вычислений равна

$(1,75-1,5)/2=0,125$

ШАГ 3

Разделим отрезок [1,5; 1,75] пополам точкой

c=1,625

f(1,5)= lg 1,5 – 3*1,5 + 5>0

f(1,625)= lg 1,75 – 3*1,75 + 5>0

f(1,5)* f(1,75)>0, то есть f(a)* f(c)>0

Следовательно, корень лежит в отрезке [c, b]

Погрешность вычислений равна

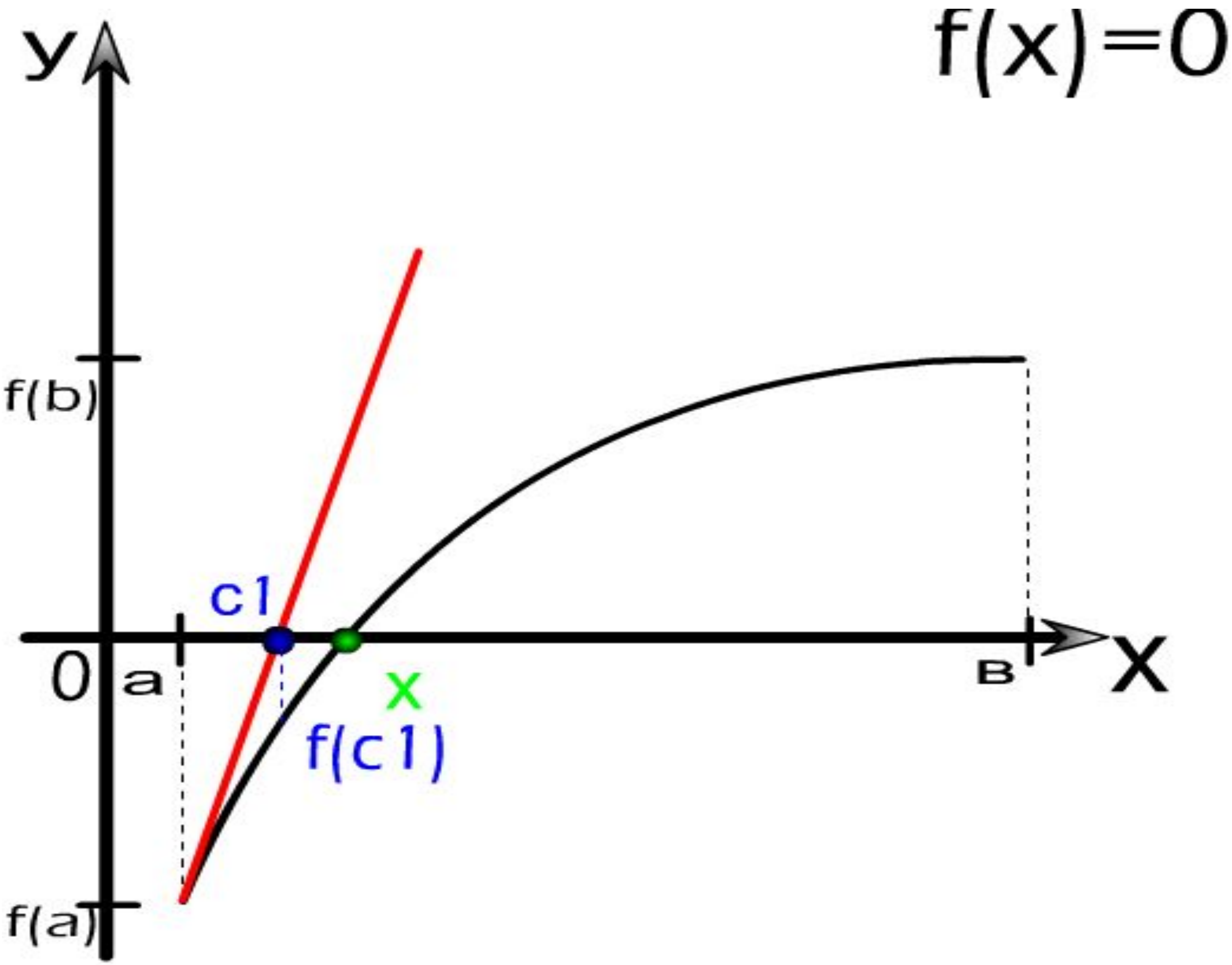
(1,625-1,5)/2=0,0625≈ 0,06

Требуемая точность достигнута

x = (a + b)/2,

то есть x=(1,625+1,5)/2=1,5625≈1,56

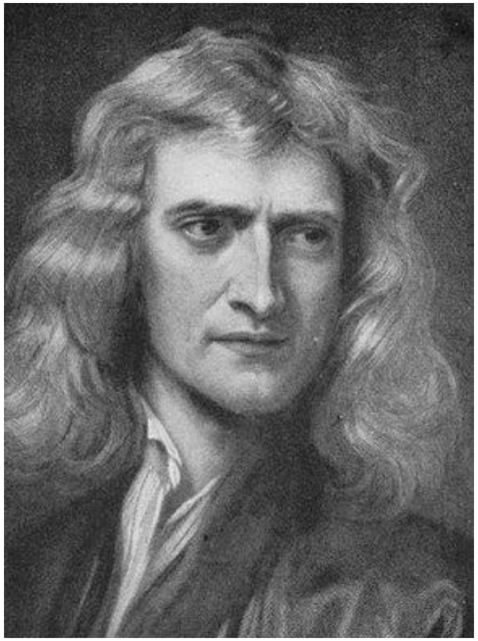
Метод Ньютона
(метод касательных)



Историческая справка

Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном, под именем которого и обрёл свою известность.

Впервые метод был опубликован в трактате *Алгебра* Джона Валлиса в 1685 году, по просьбе которого он был кратко описан самим Ньютоном.



Исаак Ньютон 1643-1727

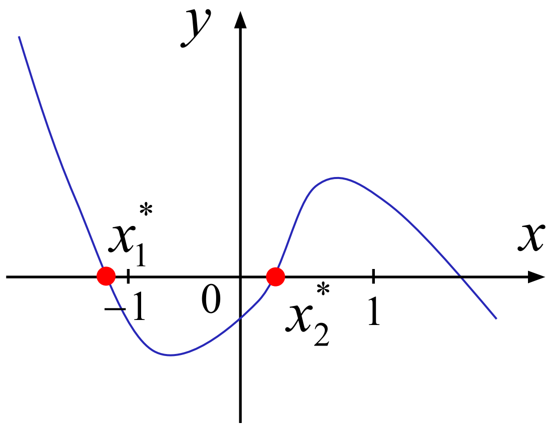
Постановка задачи

Решить нелинейное уравнение,

$$f(x) = 0$$

Графически корень – это координата x точки пересечения графика функции f(x) с осью OX

Графическая иллюстрация



Возможные преобразования

$X^2 = 5\cos x$ → $X^2 - 5\cos x = 0$ → $\mathbf{f(x) = x^2 - 5\cos x}$

Исходные данные и результаты

Исходные данные

- Функция $f(x)$
- Точность вычисления $\varepsilon>0$
- Начальное приближение к корню x_0

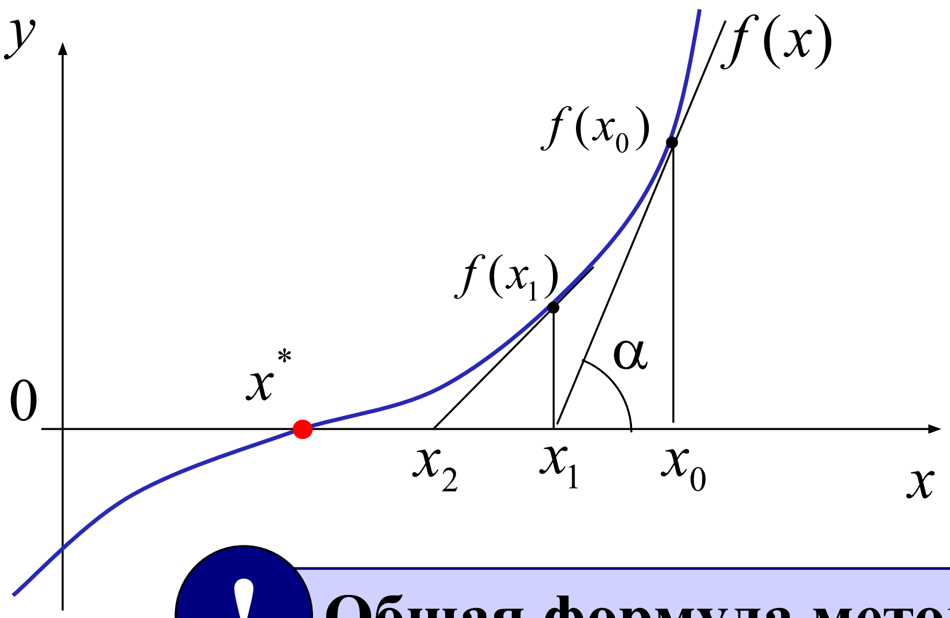
Результаты вычислений

- Корень уравнения x^*
- Количество шагов метода k

Основная идея метода

Метод Ньютона основан на замене исходной функции f(x), на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью X дает очередное приближение к корню.

Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

! Общая формула метода Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Предполагается, что на отрезке [a; b] отделен корень уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b], а на интервале (a; b) существуют отличные от нуля производные f' и f'', сохраняющие свои знаки в интервале.

За x_0 берется тот конец отрезка [a;b], для которого выполняется условие $f'(x_0) * f(x_0) > 0$. При этом все последовательные приближения x_k принадлежат интервалу (a;b).

Для оценки приближения используется общая формула:

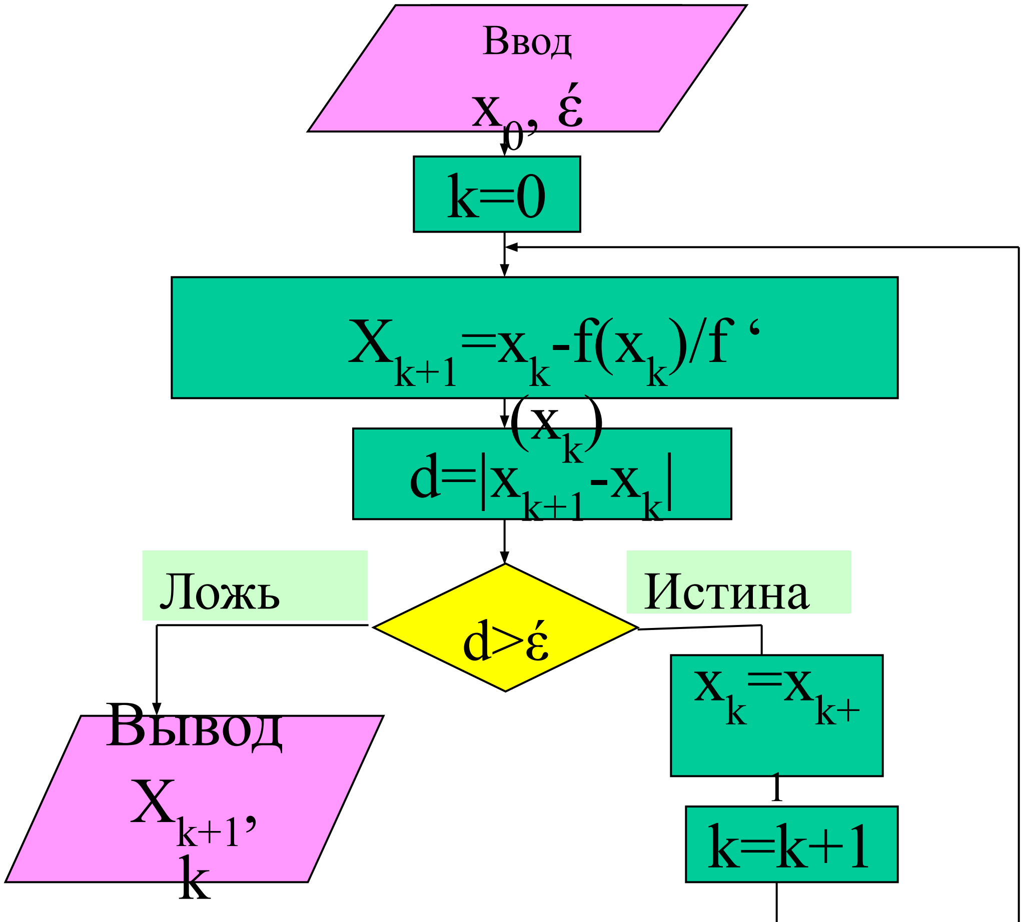
$|x^*-x_{k-1}| \le |f(x_{k+1})/m|$, где $m = \min f'(x)$ на отрезке [a; b].

На практике используют условие

$|x_{k+1}-x_k| \le \varepsilon$

.

Блок-схема метода Ньютона



Преимущества и недостатки метода

- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на *k*-ом шаге обратно пропорциональна k^2
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функция нескольких переменных

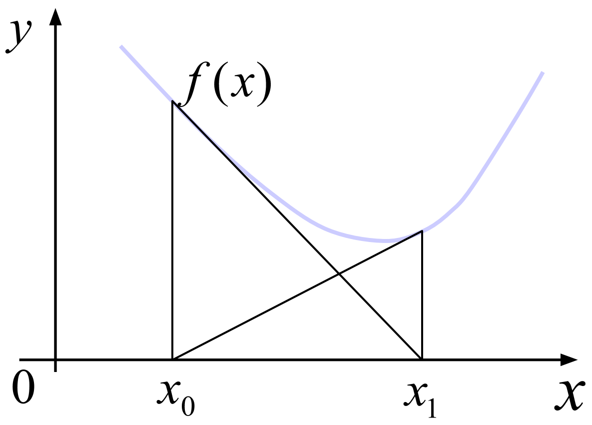
- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

- может зацикливаться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$



Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение $f(x)=0$ равносильным уравнением:

$$\boxed{x=\varphi(x)}$$

x_0 – нулевое приближение корня ξ

$x_1=\varphi(x_0)$ – первое приближение корня

$x_2=\varphi(x_1)$ – второе приближение корня

...

$x_n=\varphi(x_{n-1})$ – n-е приближение корня

$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ - итерационная последовательность

Теорема 1: Пусть уравнение $x=\varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$

выполнены условия:
$n \geq 1$

1) φ (x) определена и дифференцируема на $[a;b]$;

2) существует такое вещественное q, что $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для всех $x \in [a;b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n=\varphi(x_{n-1})$ $(n=1,2,...)$ сходится при любом нача.

члене $x_0 \in [a;b]$.

Оценка погрешности:

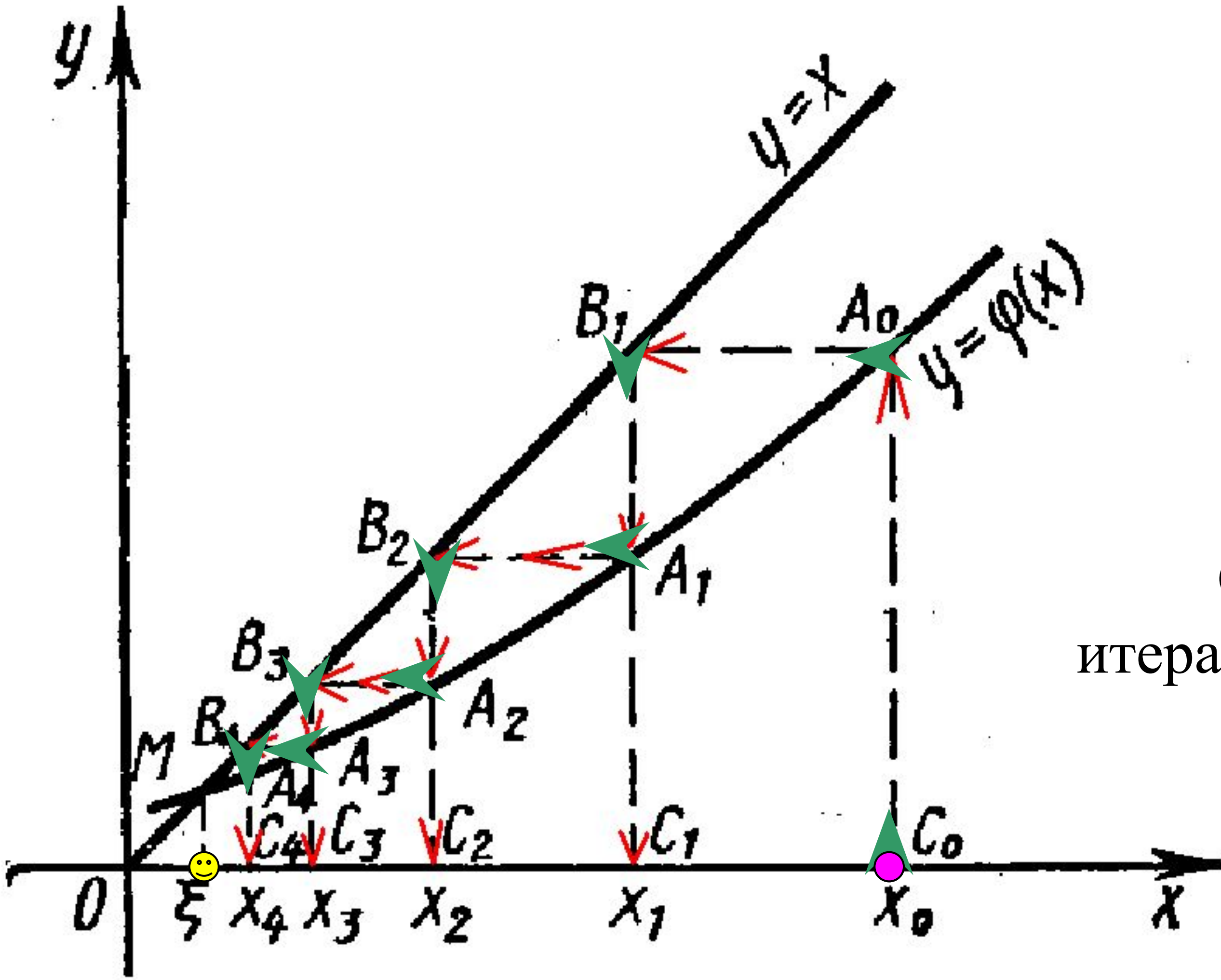
$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq \frac{q}{1-q}\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right|$$

Критерий окончания итерационного процесса

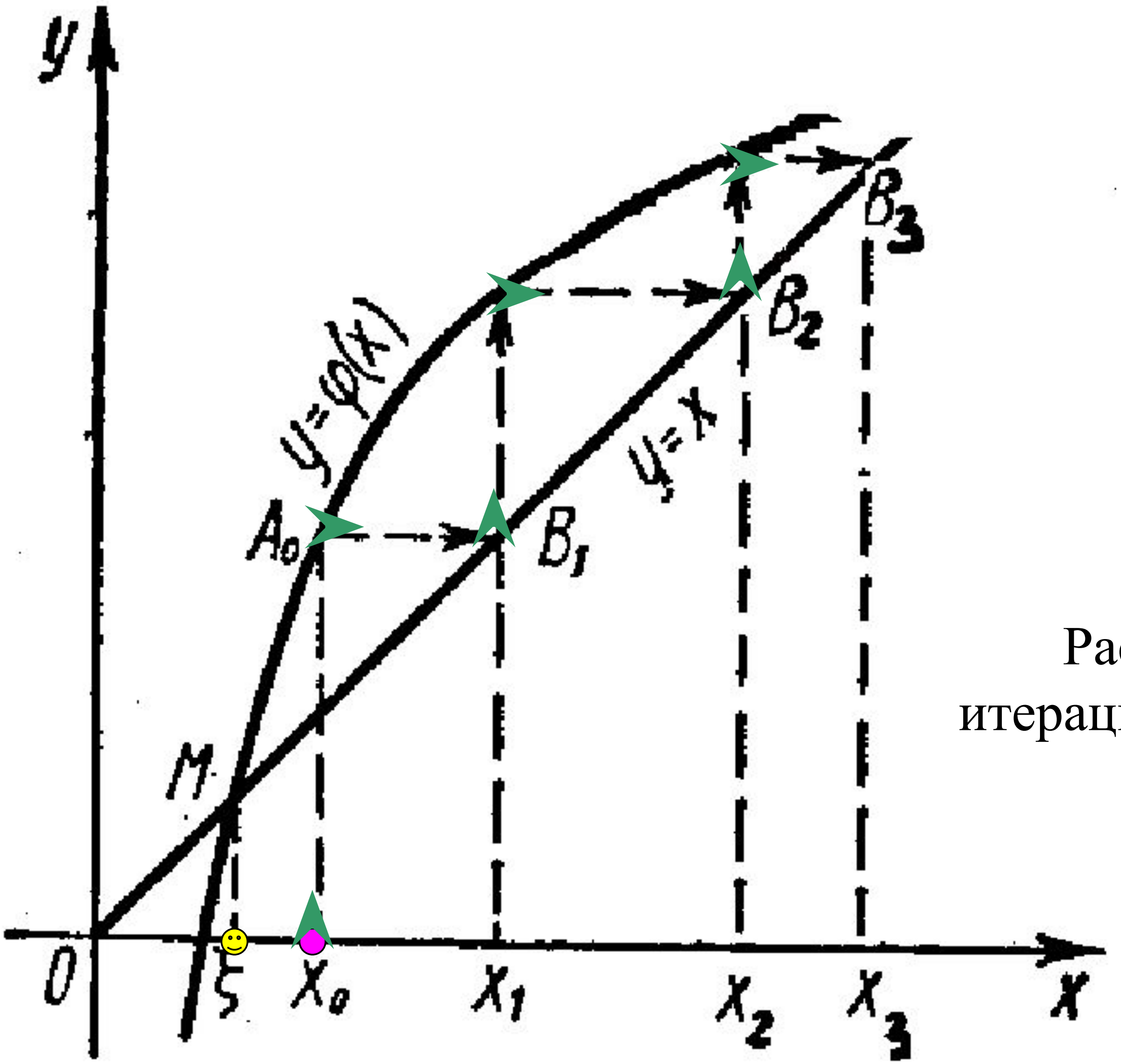
$$\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Если 0<q<0.5, то $\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < \varepsilon$

Геометрическая интерпретация метода итерации



Сходящийся итерационный процесс



Расходящийся итерационный процесс

Преобразование уравнения к итерационному виду

а) Уравнение $f(x)=0$ преобразуем к виду $x=x-m*f(x)$, где m-отличная от нуля константа

б) Вместо функции $y=\varphi(x)$ рассмотрим обратную ей функцию x=q(y)

Пример: Привести уравнение 5x3-20x+3=0 к итерационному виду для уточнения корня на отрезке [0, 1].

Решение

$x=\varphi(x)$, чтобы $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

1) $x=x+(5x^3-20x+3)$, тогда $\varphi(x)= 5x^3-19x+3$, тогда

$|\varphi'(x)| = |15x^2-19| > 1$ на заданном отрезке [0, 1]

2) x= $\sqrt[3]{\frac{20x-3}{5}}$, тогда $\varphi(x) = \sqrt[3]{\frac{20x-3}{5}}$, тогда

$$|\varphi'(x)| = \frac{20}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{5}{20x-3}\right)^2} > 1$$

3) x= $\frac{5x^3+3}{20}$, тогда $\varphi(x) = \frac{5x^3+3}{20}$, тогда

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{15x^2}{20}\right| = 0{,}75x^2 < 1$$