ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- Определение поверхности второго порядка
- Цилиндрические поверхности
- Сфера
- Трехосный эллипсоид
- Эллиптический параболоид
- Однополостный гиперболоид
- Двуполостный гиперболоид
- Конус второго порядка
- Гиперболический параболоид

Определение поверхности второго порядка

- Поверхность, определяемая уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Ez^2 + Fyz + Px + Qy + Rz + H = 0$$

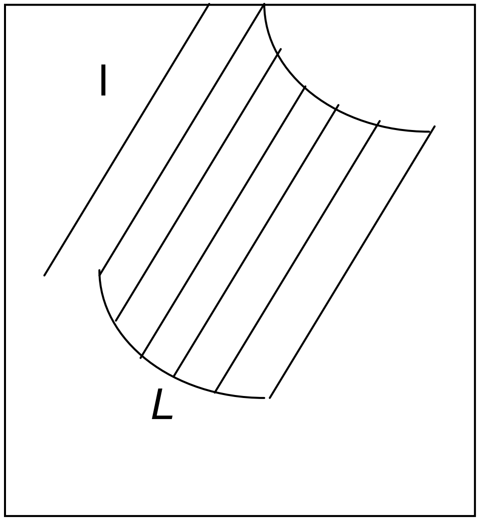
где A,B, … H - действительные числа, причем старшие коэффициенты A, B, … F не равны нулю одновременно, называется ***поверхностью второго порядка.***

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Определение цилиндрической поверхности
- Уравнение цилиндрической поверхности
- Эллиптический цилиндр
- Гиперболический цилиндр
- Параболический цилиндр

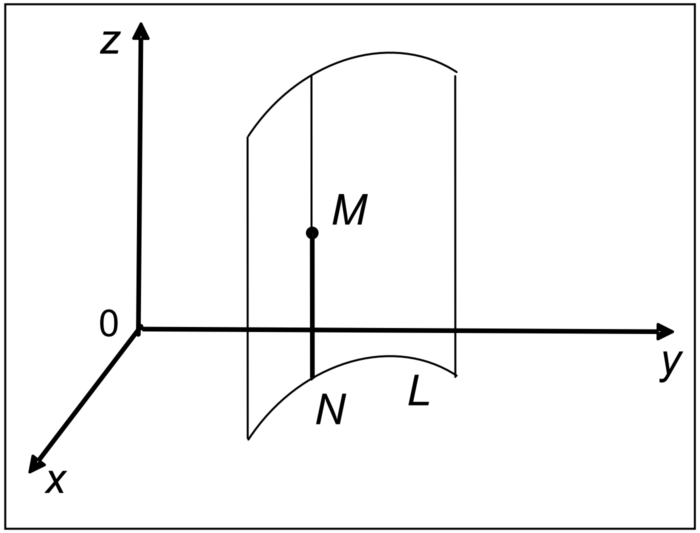
Определение цилиндрической поверхности

- Поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими параллельно данной прямой l через точки линии L, называется ***<u>цилиндрической поверхностью</u>***
- При этом линия L называется ***<u>направляющей</u>***, а прямые, проходящие через точки кривой L параллельно прямой l, называется ее ***<u>образующими.</u>***

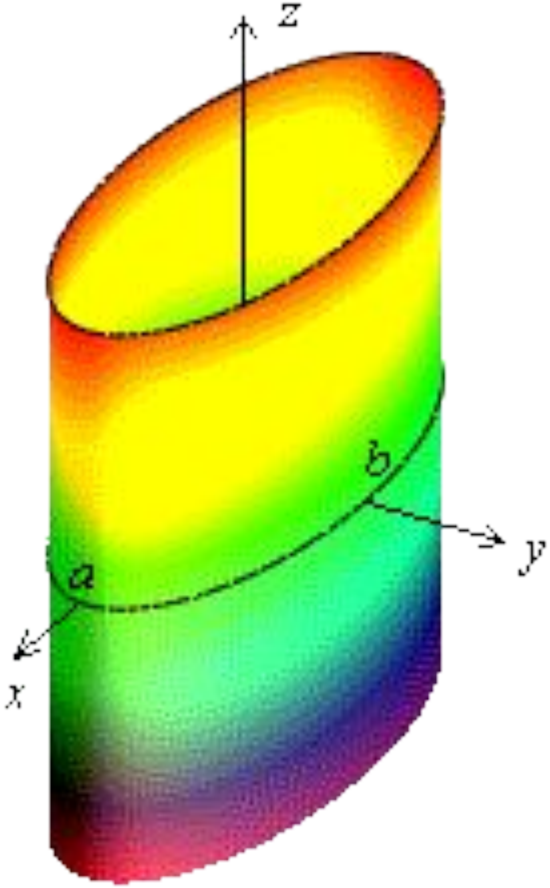


Уравнение цилиндрической поверхности, с образующими параллельными оси OZ

- Пусть на плоскости $X0Y$ дана своим уравнением $F(x, y) = 0$ некоторая линия L.
- Проведем через каждую точку кривой L прямую параллельно оси $0Z$. Тогда получим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными этой оси. Уравнение $F(x, y) = 0$ - уравнение этой поверхности.

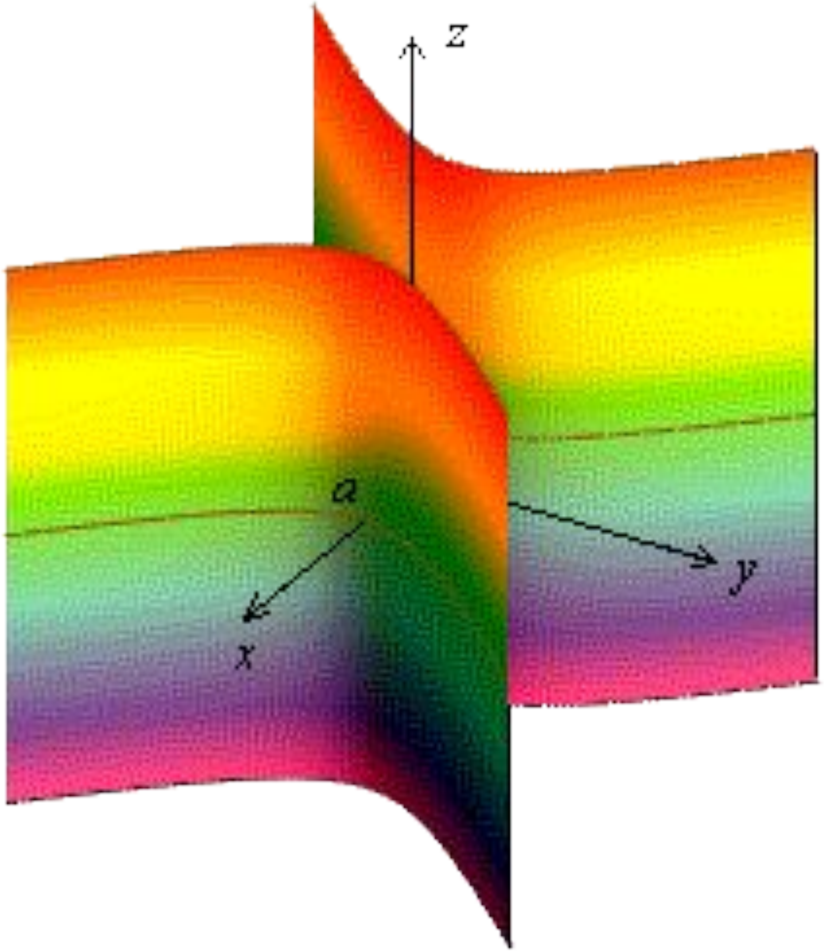


Эллиптический цилиндр



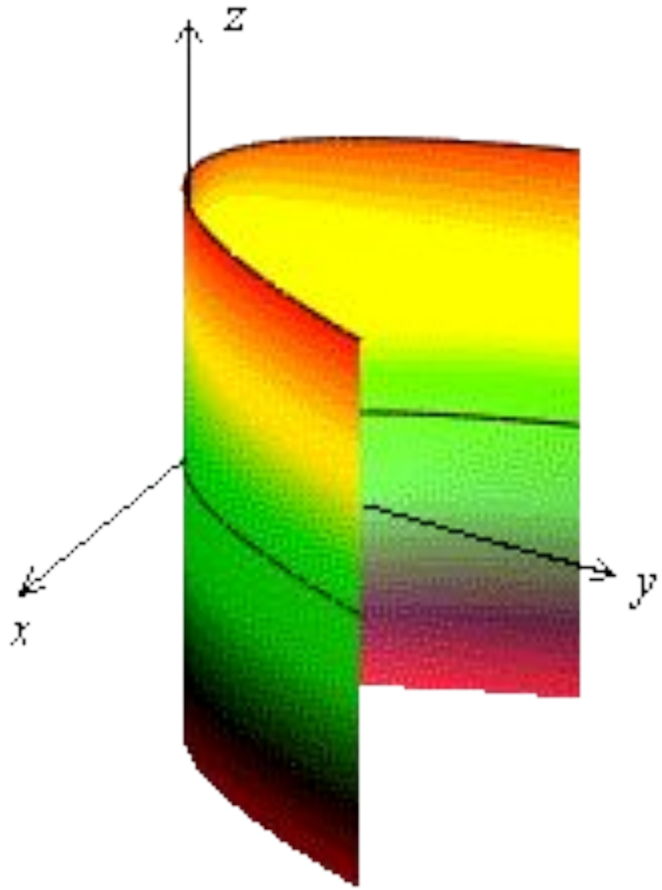
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гиперболический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параболический цилиндр



$$y^2 = 2px$$

Эллиптический цилиндр, с образующими, параллельными оси OY

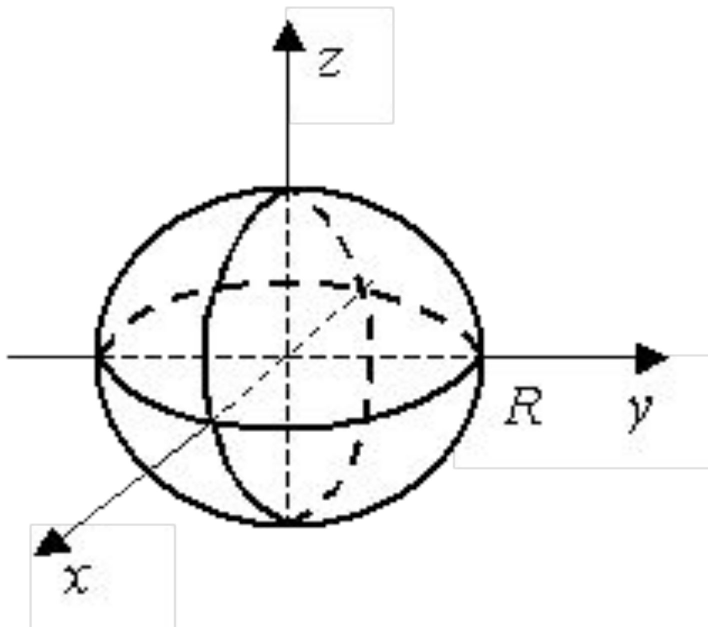
- Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

  определяет эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси $0Y$

Гиперболический цилиндр, с образующими, параллельными оси OX

- уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяет гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси $0X$.

Сфера



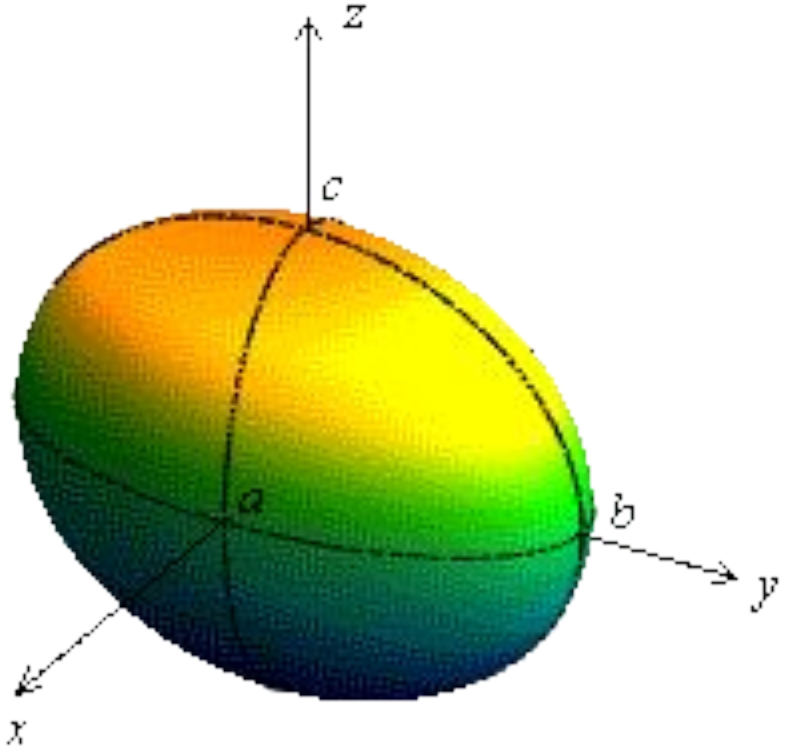
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- Множество точек пространства R^3, равноудаленных от одной фиксированной ее точки $M_0(x_0; y_0 z_0,)$ называется **сферой**. Её уравнение имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) = R^2;$$

где точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - центр сферы, $R > 0$ - её радиус

Трехосный эллипсоид



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Сечение эллипсоида плоскостями z=h

- Рассмотрим вначале линии пересечения этой поверхности с горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$. В сечении, в общем случае, образуется кривая, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Сечение эллипсоида плоскостями z=h, при lhl>c

- Горизонтальные плоскости $z = h$, где $|h| > c$, не пересекают данной поверхности (в сечении образуются мнимые кривые).

Сечение эллипсоида плоскостями z=h, при lhl=c

Рассмотрим сечение

Горизонтальной

плоскостью $z = h$,

где $|h| = c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} = 0$

Следовательно, в сечениях $z = h = c$ и

$z = h = -c$ получим

точки $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$.

Сечение эллипсоида плоскостью z=h,при lhl<c

- Если $|h| < c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$. Тогда в сечении горизонтальной плоскостью $z = h$, где $-c < h < c$, получим линию
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1$$
где $a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$
Уравнение на плоскости $X0Y$ определяет эллипс с полуосями a^* и b^*

Сечение эллипсоида плоскостями x=h и y=h

- Так как уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

  обладает симметрией относительно переменных x, y и z , то в сечениях вертикальными плоскостями $x = h$ где $|h| \le a$ и $y = h$, где $|h| \le b$, так же образуются эллипсы или точки.

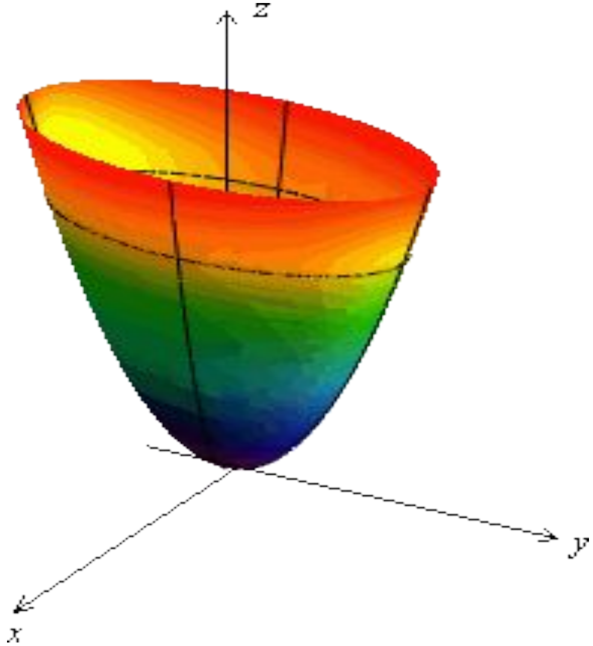
Эллиптический параболоид

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{p}+\frac{(y-y_0)^2}{q}=2(z-z_0)^2$$, где $p, q > 0$

При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение называется каноническим уравнением эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$



Сечение эллиптического параболоида плоскостями z=h

- Рассмотрим сечения поверхности горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$. В сечении, в общем случае, получим линию:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Сечение эллиптического параболоида плоскостями z=h, при h<0

Так как по условию p

и $q > 0$, то $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \geq 0$

при любых значениях x
и y. Следовательно,
при $h < 0$
горизонтальные
плоскости $z = h$ не
пересекают
поверхность.

Сечение эллиптического параболоида плоскостями z=h, при h=0 и h>0

- При $h = 0$, то есть на плоскости $X0Y$, получим точку $(0;0;0)$.
- При $h > 0$ на плоскости $z = h$ получим линию

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \Leftrightarrow \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1$$, где $a^* = \sqrt{2ph},\ b^* = \sqrt{2qh}$ (*)

- Уравнение (*) на плоскости $X0Y$ определяет эллипс с полуосями a^* и b^*

Сечение эллиптического параболоида плоскостями y=h

Рассмотрим сечение вертикальной плоскостью $y = h$, где $h \in R$. В сечении получим линию:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{h^2}{q} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h \end{cases}$$

Уравнение $x^2 = 2p\left(z - \dfrac{h^2}{2q}\right)$ на плоскости $X0Z$

определяет параболу с осью симметрии $0Z$, параметром p и вершиной, находящейся в точке $\left(0; \dfrac{h^2}{2q}\right)$

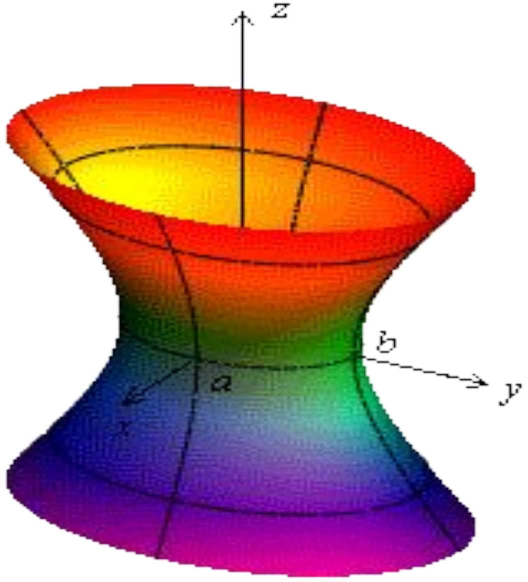
Параболоид вращения

- Если в уравнении $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $p = q$, то в сечениях горизонтальными плоскостями образуются окружности. Следовательно, уравнение
$$x^2 + y^2 = 2pz$$
определяет ***<u>параболоид вращения</u>*** с осью симметрии $0Z$.

Однополостный гиперболоид

- ***Однополостным гиперболоидом*** называется поверхность, определяемая уравнением

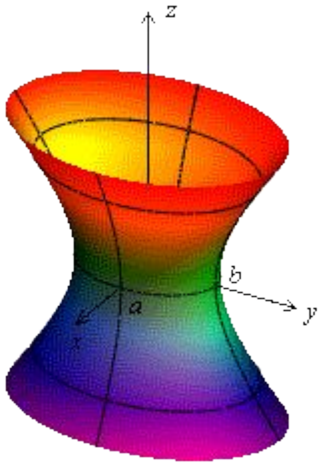
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Сечение однополостного гиперболоида плоскостями z=h

- В сечениях горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$, получим линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h \end{cases}$$



где $a^{*2} = a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)$, $b^{*2} = b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)$.

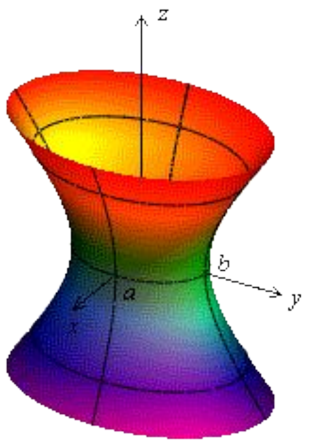
Таким образом, в сечениях плоскостями $z = h$ образуются эллипсы с полуосями a^* и b^*

Сечение однополостного гиперболоида плоскостями y=h, при |h|<b

- Пусть $y = h$, где $h \in R$
- В сечениях образуются линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

Если $|h| < b$, то $1 - \dfrac{h^2}{b^2} > 0$



- Тогда на плоскости $y = h$ получим

гиперболу $\dfrac{x^2}{a^{*2}} - \dfrac{z^2}{c^{*2}} = 1$, где

$$a^{*2} = a^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right), \quad c^{*2} = c^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)$$

с действительной полуосью a^* и мнимой c^*.

Сечение однополостного гиперболоида плоскостями y=h, при lhl>b

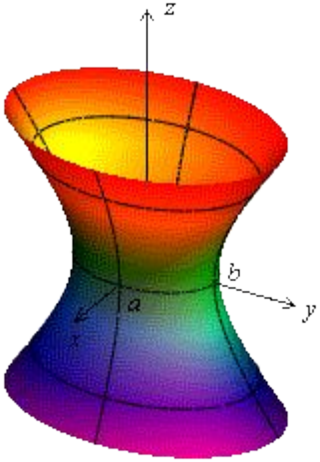
- Если $|h| > b$, то $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$. Тогда

на плоскости $y = h$ получим

гиперболу $\frac{z^2}{c^{*2}} - \frac{x^2}{a^{*2}} = 1$, где

$c^{*2} = c^2\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right), \ a^{*2} = a^2\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)$

с действительной полуосью a^*
и мнимой c^*.



Сечение однополостного гиперболоида плоскостями y=h, при lhl=b

- Если $|h| = b$, то $1 - \frac{h^2}{b^2} = 0$. Тогда

  из уравнения $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$

  получим $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow z = \pm\frac{c}{a}x$

  пару пересекающихся прямых.

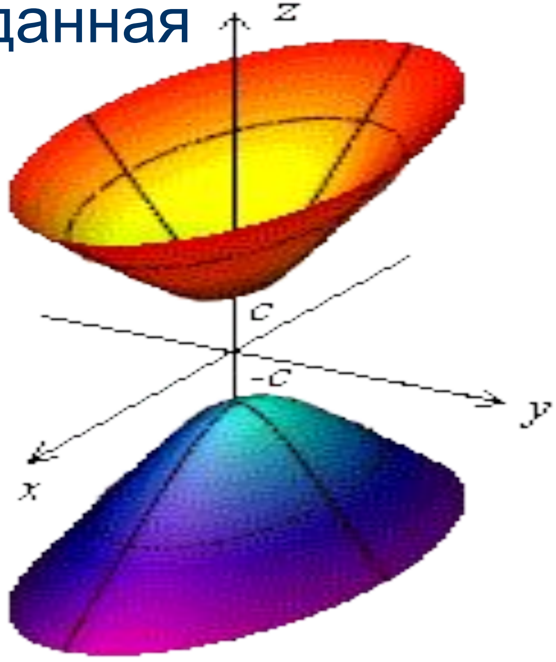
Сечение однополостного гиперболоида плоскостями x=h

- В сечениях вертикальными плоскостями $x = h$, где $h \in R$, образуются так же, как и в сечениях $y = h$, либо гиперболы, либо пара пересекающихся прямых (исследовать самостоятельно).

Двуполостный гиперболоид

- ***Двуполостным гиперболоидом*** называется поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Сечение двуполостного гиперболоида плоскостями z=h, при lhl<c

- Рассмотрим сечения горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$. В сечениях образуются линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 0$ при любых значениях x и y, то при $|h| < c$ первое уравнение не выполняется ни при каких x и y. Следовательно, плоскости $z = h$, где $-c < h < c$, не пересекают данную поверхность.

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостями z=h, при lhl=c

- Если $|h| = c$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \iff x = y = 0$$

Следовательно, в сечениях плоскостями $z = -c$ и $z = c$ образуется пара точек с координатами $(0;0;-c)$ и $(0;0;c)$.

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостями z=h, при |h|>c

- Если $|h| > c$, то $\frac{h^2}{c^2} - 1 > 0$.

Следовательно, первое уравнение

из $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$

можно записать в форме $\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1$

где $a^{*2} = a^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right), \; b^{*2} = b^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)$

Уравнение $\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1$ является уравнением эллипса с полуосями a^* и b^*.

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостями y=h

- Пусть $y = h$, где $h \in R$. Тогда в сечениях, получим линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = h. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

Следовательно, на плоскости $y = h$ при любых значениях h образуется гипербола

$$\frac{z^2}{c^{*2}} - \frac{x^2}{a^{*2}} = 1$$

где $c^{*2} = c^2\left(1 + \dfrac{h^2}{b^2}\right), \ a^{*2} = a^2\left(1 + \dfrac{h^2}{b^2}\right)$

с действительной полуосью c^* и мнимой полуосью a^*, ориентированная вдоль оси $0Z$

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостями x=h

- В сечениях вертикальными плоскостями $x = h$, где $h \in R$, так же образуются гиперболы, ориентированные вдоль оси $0Z$ (исследовать самостоятельно).

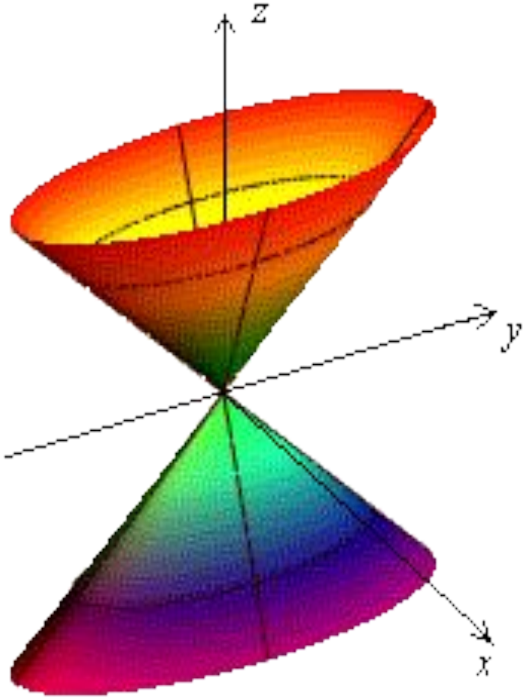
Конус второго порядка

- **Конусом** называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

- При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение называется каноническим уравнением конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



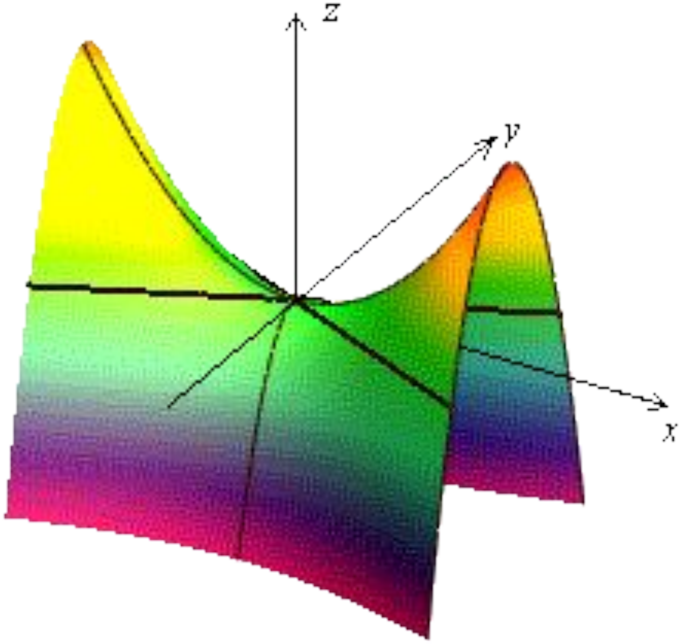
Конусы второго порядка с осями симметрии OX и OY

- Конусы с осями симметрии Ox и Oy соответственно задаются уравнениями

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Гиперболический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$