Основная теория по алгебре для подготовки к ОГЭ

ФОРМУЛЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного уравнения

Если D>0, то уравнение имеет два различных корня: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Если D=0, то уравнение имеет один корень: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Если D<0, то уравнение не имеет действительных корней.

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Для общего уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Для приведенного уравнения

$$1x^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

$(a - b)^2 = (b - a)^2$ – квадрат разности.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Существуют признаки делимости одного числа на другое. Эти признаки позволяют быстро выяснить, может ли одно натуральное число без остатка делиться на другое.

Признак делимости на	Формулировка	Пример
2	Число должно оканчиваться четной цифрой: **0 , 2 , 4 , 6 , 8**	1258
3	Сумма цифр числа должна делиться на **3**	745 , (7 + 4 + 5 = 15)
4	Число, образованное двумя последними цифрами, должно делиться на **4**	7924
5	Число должно оканчиваться цифрой **0** или **5**	835
6	Число должно делиться на **2** и на **3**	234 , (2 + 3 + 4 = 9)
7	На **7** должно делиться число, полученное вычитанием удвоенной последней цифры из исходного числа с отброшенной последней цифрой	3626 , (362 – 12 = 350)
8	Число, образованное тремя последними цифрами, должно делиться на **8**	63024
9	Сумма цифр должна делиться на **9**	2574 , (2 + 5 + 7 + 4 = 18)
10	Число должно оканчиваться **0**	1690
11	Сумма цифр, стоящих на четных местах, либо равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от нее на число, делящееся на **11**	1408 , (4 + 8 = 12 ; 1 + 0 = 1 ; 12 – 1 = 11)
13	На **13** должно делиться число, полученное добавлением учетверенной последней цифры к исходному числу с отброшенной последней цифрой	299 , (29 + 36 = 65)
25	Число должно оканчиваться на **00**, **25**, **50** или **75**	7975
50	Число должно оканчиваться на **00** или **50**	2957450

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятностью события А называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех равновозможных несовместимых событий, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения: $P(A) = \frac{m}{n}$

(Пусть k – количество бросков монеты, тогда количество всевозможных исходов: $n=2^k$.

Пусть k – количество бросков кубика, тогда количество всевозможных исходов: $n=6^k$).

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

Теорема сложения вероятностей совместных событий: P(A+B)=P(A)+P(B)–P(A·B).

Частота отличается от вероятности только тем, что она берётся за конкретный период времени.

$$\text{Частота} = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$$

Исходы при бросании монетки

Исходы бросания монеты дважды *(всего 4 исх.)*:	Исходы бросания монеты трижды *(всего 8 исх.)*:	Исходы бросания монеты 4 раза *(всего 16 исх.)*:	Исходы бросания монеты 5 раз *(всего 32 исх.)*:
OO OP PO PP	OOO POP OOP POO OPP PPO OPO PPP	OOOO POOP OOOP POOO OOPO POPP OOPP POPO OPOO PPOP OPOP PPOO OPPO PPPO OPPP PPPP	OOOOO OPOOO POOOO PPOOO OOOOP OPOOP POOOP PPOOP OOOPO OPOPO POOPO PPOPO OOOPP OPOPP POOPP PPOPP OOPOO OPPOO POPOO PPPOO OOPOP OPPOP POPOP PPPOP OOPPO OPPPO POPPO PPPPO OOPPP OPPPP POPPP PPPPP

Исходы при бросании кубика

Исходы бросания кубика 1 раз *(всего 6 исх.)*:		Исходы бросания кубика дважды *(всего 36 исх.)*:						
	1		11	21	31	41	51	61
	2		12	22	32	42	52	62
	3		13	23	33	43	53	63
	4		14	24	34	44	54	64
	5		15	25	35	45	55	65
	6		16	26	36	46	56	66

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

Прогрессия	Арифметическая	Геометрическая
Формула n-го члена, $n \in N$	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Характеристическое свойство	$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$	$b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b^2_n$, $b_n \neq 0$
Формула суммы n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$ $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$
Дополнительные формулы	$\frac{a_n - a_m}{n-m} = d$, $n \neq m$	$b_n : b_m = q^{n-m}$
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $0<\|q\|<1$, $S = \frac{b_1}{1-q}$ – формула суммы		

СВОЙСТВА КОРНЯ

Пример: $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4, \sqrt{25}=5$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
Пример:
$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
Пример:
$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{8}$

$(\sqrt{a})^2=a$
Пример:
$\sqrt{3}^2=3$

$\sqrt{a^2}=|a|$
Пример:
$\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
Пример:
$\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{3}{5}}$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

a^n – это степень, a – это основание, n – это показатель. *Пример:* $2^3=2\cdot2\cdot2=8$, $4^2=4\cdot4=16$

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
Пример:
$2^3\cdot2^5=2^8$

$a^n : a^m=a^{n-m}$
Пример:
$3^6 : 3^4=3^2$

$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
Пример:
$(4^3)^5=4^{15}$

$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$
Пример:
$3^2\cdot4^2=(12)^2$

$a^0=1$
Пример:
$5^0=1$

$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
Пример:
$\frac{8^3}{2^3}=4^3$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
Пример:
$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$
Пример:
$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^1$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМА

$\log_b a$ – логарифм a по основанию b. $\log_b a = c \iff a = b^c$. *Пример*: $\log_2 16 = x \Rightarrow x = 4$.

1. $a^{\log_a b}=b$
Пример:
$2^{\log_2 5}=5$

2. $\log_b a^k = k\cdot\log_b a$
Пример:
$\log_4 2^3 = 3\cdot\log_4 2$

3. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\cdot\log_b a$
Пример:
$\log_{4^3} 2 = \frac{1}{3}\cdot\log_4 2$

4. $\log_c a + \log_c b = \log_c(a\cdot b)$
Пример:
$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36$

5. $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$
Пример:
$\log_4 32 - \log_4 2 = \log_4 16$

6. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
Пример:
$\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$

7. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
Пример:
$\log_5 25 = \frac{\log_3 25}{\log_3 5}$

8. $\log_b a\cdot\log_d c = \log_d a\cdot\log_b c$
Пример:
$\log_3 4\cdot\log_2 9 = \log_2 4\cdot\log_3 9$

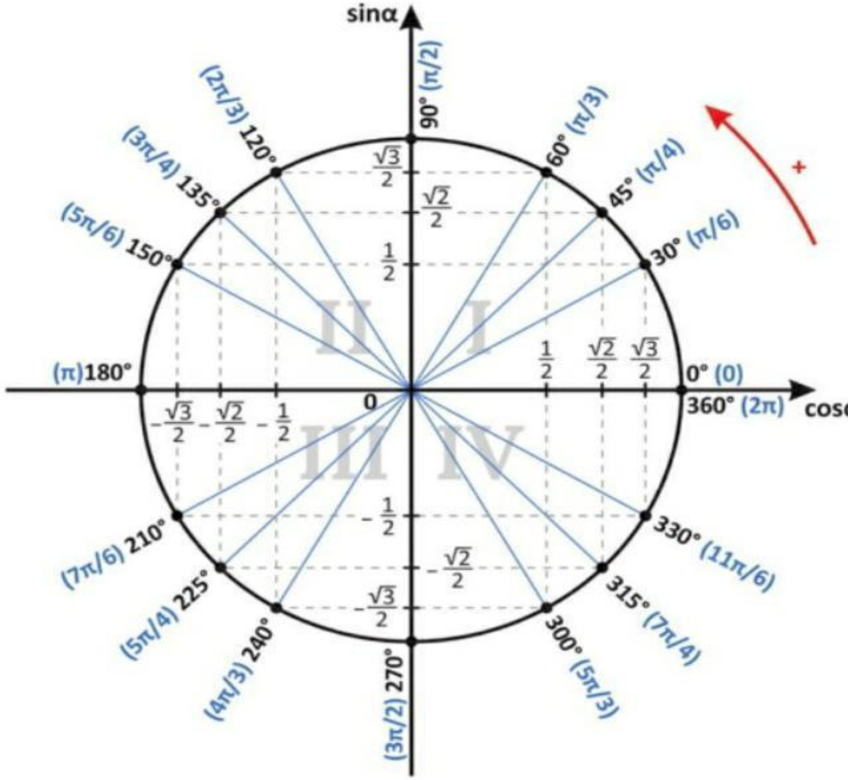
МОДУЛЬ ЧИСЛА

$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

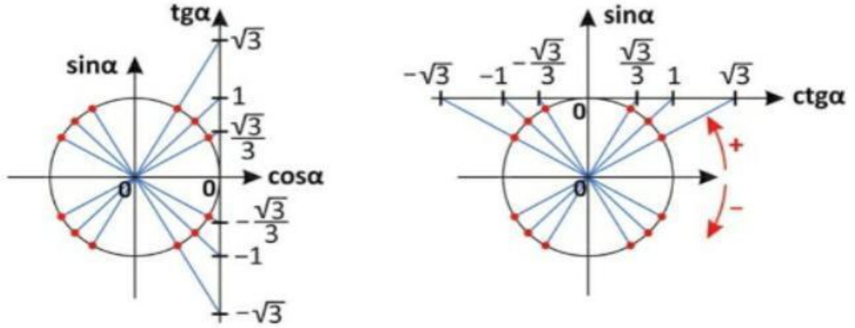
Свойство модуля

1. $|a-b| = |b-a|$
2. $\sqrt{a^2} = |a|$
3. $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$
4. $|a|^2 = a^2$
5. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, $a \geq 0$
6. $|x| \geq a \iff x \geq a$ или $x \leq -a$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ



ЗНАЧЕНИЯ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА НА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ КРУГЕ



СИНУС

$$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

КОСИНУС

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

ТАНГЕНС

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

КОТАНГЕНС

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Основное тригонометрическое тождество	Связь между тангенсом и косинусом	Связь между котангенсом и синусом	Связь между тангенсом и котангенсом
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Определяем, изменится ли функция на кофункцию

Если в аргументе есть $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ или $\frac{5\pi}{2}$ и т. д., то функция меняется на кофункцию

Пример: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\text{ctg}\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$

Если в аргументе есть π или 2π, или 3π и т. д., то функция не меняется на кофункцию

Пример: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

Определяем знак

Чтобы определить знак, необходимо понять, в какой четверти находится аргумент и смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся.

Пример: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ – это IV четверть, в ней синус имеет знак «–», поэтому: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

Пример: $\text{tg}(\pi + \alpha)$

$(\pi + \alpha)$ – это III четверть, в ней тангенс имеет знак «+», поэтому: $\text{tg}(\pi + \alpha) = +\text{tg}\,\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\sin t$	$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\text{ctg}\,t$	$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\text{tg}\,t$
$\sin(\pi \pm t) = \mp\sin t$	$\cos(\pi \pm t) = -\cos t$	$\text{tg}(\pi \pm t) = \pm\text{tg}\,t$	$\text{ctg}(\pi \pm t) = \pm\text{ctg}\,t$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm\sin t$	$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp\text{ctg}\,t$	$\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp\text{tg}\,t$
$\sin(2\pi \pm t) = \pm\sin t$	$\cos(2\pi \pm t) = \cos t$	$\text{tg}(2\pi \pm t) = \pm\text{tg}\,t$	$\text{ctg}(2\pi \pm t) = \pm\text{ctg}\,t$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

Синус двойного угла	Косинус двойного угла	Косинус двойного угла (через косинус)	Косинус двойного угла (через синус)
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		a = 0	a = 1	a = –1
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ *или* $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin a + 2\pi n \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$ *или* $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arccos a + 2\pi n \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi n \end{array}\right.$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$
$\text{tg}\,x = a$	$x = \text{arctg}\,a + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$
$\text{ctg}\,x = a$	$x = \text{arcctg}\,a + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
где $n \in$ Z (Z – множество целых чисел: ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4...)				

СВОЙСТВА ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\cos(-x) = \cos x$ – чётная

$\sin(-x) = -\sin x$ – нечётная

$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\,x$ – нечётная

$\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}\,x$ – нечётная

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}\,x$

$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}\,x$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$\arcsin a = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \sin t = a,\ a \in [-1; 1]$

$\arcsin(\sin t) = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin(\arcsin a) = a,\ a \in [-1; 1]$

$\arccos a = t,\ t \in [0; \pi],\ \cos t = a,\ a \in [-1; 1]$

$\arccos(\cos t) = t,\ t \in [0; \pi]$

$\cos(\arccos a) = a,\ a \in [-1; 1]$

$\text{arctg}\,a = t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),\ \text{tg}\,t = a,\ a \in R$

$\text{arctg}(\text{tg}\,t) = t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{tg}(\text{arctg}\,a) = a,\ a \in R$

$\text{arcctg}\,a = t,\ t \in (0; \pi),\ \text{ctg}\,t = a,\ a \in R$

$\text{arcctg}(\text{ctg}\,t) = t,\ t \in (0; \pi)$

$\text{ctg}(\text{arcctg}\,a) = a,\ a \in R$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$

$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$; $\text{ctg}\,2\alpha = \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{2\text{ctg}\,\alpha}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Производная элементарной функции	Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u)\cdot u'(x)$
$(c)' = 0$ $(x)' = 1$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x\ln a$	$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$* $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$ $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot u'$ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$ $(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$ $(e^u)' = e^u\cdot u'$ $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$ * $u = u(x)$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

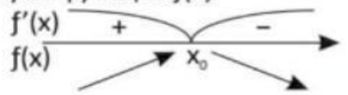
1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(Cu)' = C\cdot u'$
3. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
4. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Физический смысл производной состоит в том, что производная от координаты по времени есть мгновенная скорость: $v(t) = s'(t)$

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.



Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

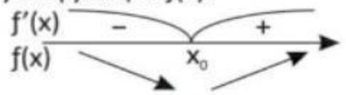


ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ

График обычной функции $y = x^3 - 3x$

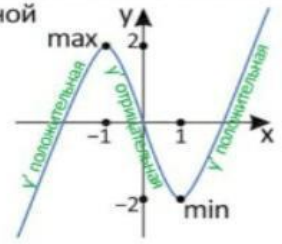
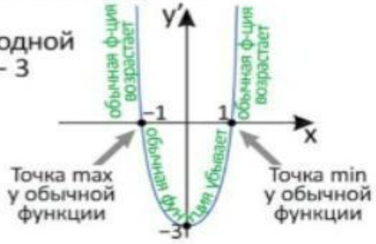


График производной $y' = 3x^2 - 3$



АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ИЛИ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ [a; b]

1. Найти область определения функции и вычислить значения функции (не производной!) в этих точках: $f(a)$, $f(b)$.
2. Найти производную функции и определить точки экстремума (те точки, в которых производная функции обращается в ноль, и точки, в которых не существует двухсторонней конечной производной).
3. Выбрать из точек экстремума, те, которые принадлежат данному отрезку **[a; b]** и области определения функции и найти значение функции от них.
4. Из всех найденных значений выбрать наибольшее или наименьшее, оно и будет искомым.

ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛ

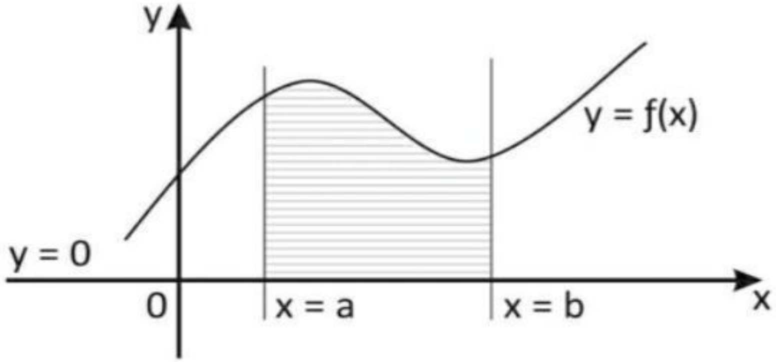
Функцию $F(x)$ называют *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на нем производная функции $F(x)$ равна $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.
Операцию, обратную *дифференцированию* называют *интегрированием*.

Три правила нахождения первообразных

1. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.
2. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$.
3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями: сверху ограниченной кривой $y = f(x)$, и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.



НЕРАВЕНСТВА

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств

Алгоритм действий во всех случаях одинаков.

1. Если неравенство содержит рациональные функции в обеих частях, то собираем все слагаемые в одной части (например, в левой).
2. Приводим все слагаемые к общему знаменателю. В левой части неравенства получаем дробь, знаменатель которой уже разложен на множители. В правой части стоит нуль.
3. Раскладываем числитель полученной дроби на множители. Тем самым неравенство приводится к виду, приспособленному для метода интервалов.
4. Отмечаем на числовой оси нули числителя и знаменателя. Нули знаменателя выколоты. Нули числителя выколоты, если неравенство строгое, и закрашены, если неравенство нестрогое.
5. Расставляем знаки на полученных интервалах. Если множитель $x - x_0$ стоит в нечётной степени, то при переходе через точку x_0 знак меняется. В случае чётной степени знак не меняется.
6. Если при переходе через закрашенную точку знак не меняется, то ставим в этой точке флажок.
7. Записываем ответ, не забывая про флажки. Если флажок оказался внутри промежутка решений, то он «поглощается» этим промежутком. Если флажок не находится внутри промежутка решений, он даёт изолированную точку-решение.

Метод сведения неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств

1. $$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

2. $$\sqrt[2n]{f(x)} \ge \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

3. $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

4. $$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^{2n}(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

5. $$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

6. $$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

7. $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$$

8. $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x)$$

где символ $\vee$ заменяет один из символов: >, <, ≥, ≤.

Некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств

1. $$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. $$(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \\ \varphi(x) = 1 \end{array} \right.$$

В частности:
Если число $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
Если число $0 > a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств

1. $$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

В частности:
Если число $a > 1$, то
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$
Если число $0 < a < 1$, то
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$

2. $$\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

В частности:
Если число $a > 1$, то
$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x) > 0$
Если число $0 < a < 1$, то
$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \ge f(x) > 0$

Некоторые стандартные схемы для решения неравенств, содержащих знак модуля

1. $$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

3. $$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array} \right.$$

2. $$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$$

4. $$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array} \right.$$

5. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$
6. $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow f^2(x) \ge g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \ge 0$

Метод расщепления неравенств

1. $$f(x) \cdot g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

3. $$f(x) \cdot g(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. $$\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

4. $$\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функции, правило знаков)

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

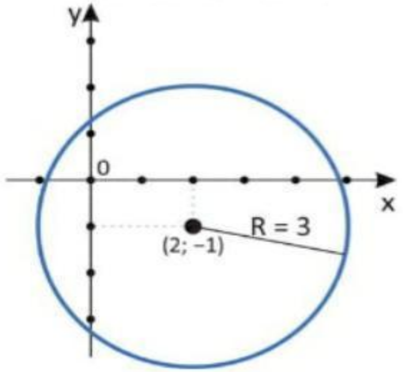
Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q – выражения с переменной x ($h > 0$; $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$), a – фиксированное число ($a > 0$; $a \neq 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
2	$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
3	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
4	$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
5	$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
6	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
7	$\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1$, $f \neq 1$)	$(f-1)(g-1)\cdot(h-1)(g-f)$
8	$\log_h f \cdot \log_p q$	$(h-1)(f-1)(p-1)(q-1)$
9	$\log_h f + \log_h g$	$(fg-1)(h-1)$
10	$h^f - h^g$ ($h > 0$)	$(h-1)(f-g)$
11	$h^f - 1$	$(h-1)f$
12	$f^h - g^h$ ($f > 0$; $g > 0$)	$(f-g)\cdot h$
13	$\dfrac{h^f - h^g}{h^p - h^q}$	$\dfrac{f-g}{p-q}$
14	$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$f - g$
15	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

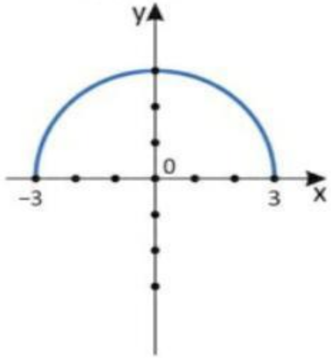
ПРИМЕРЫ ГРАФИКОВ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

График уравнения с двумя переменными – это множество всех точек плоскости, координаты которых *x, y* являются решениями уравнения.

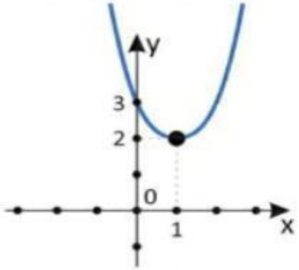
1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$



2. $y = \sqrt{3^2 - x^2}$



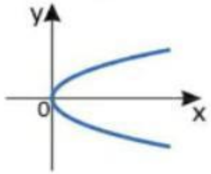
3. $y = x^2 - 2x + 3$



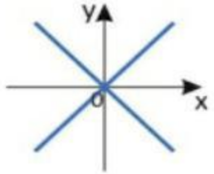
$$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_B = y(x_B) = 2$$

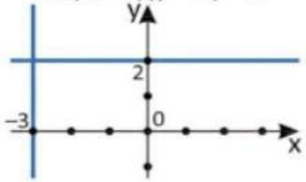
4. $y^2 = x$



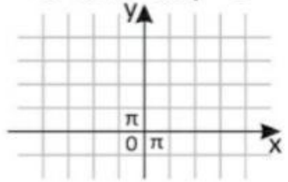
5. $y^2 = x^2$



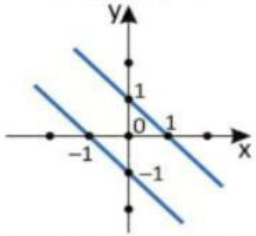
6. $(x+3)(y-2) = 0$



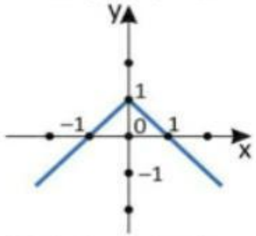
7. $\sin x \cdot \sin y = 0$



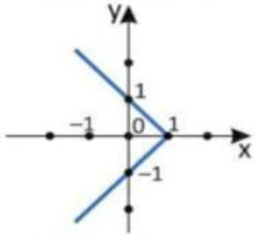
8. $|x + y| = 1$



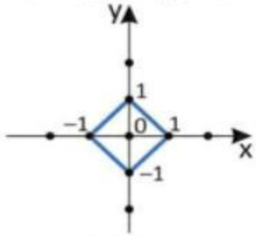
9. $|x| + y = 1$



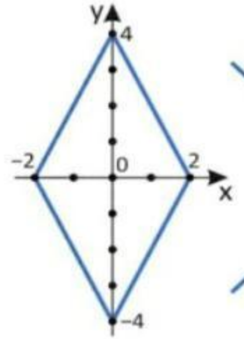
10. $x + |y| = 1$



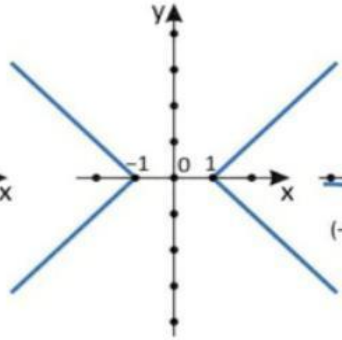
11. $|x| + |y| = 1$



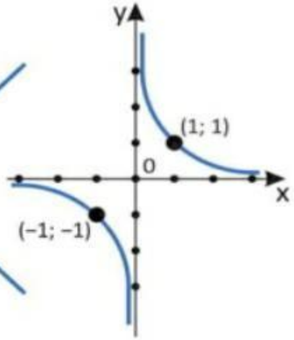
12. $4|x| + 2|y| = 8$



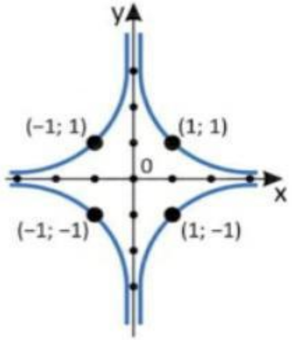
13. $|x| - |y| = 1$



14. $x \cdot y = 1$



15. $|x| \cdot |y| = 1$



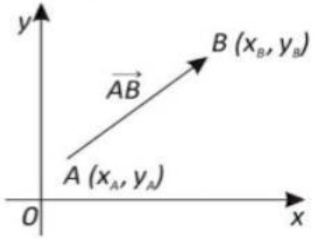
МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Для векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ имеют место действия:

1. сложение $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$;
2. вычитание $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$;
3. умножение на число $k \cdot \vec{a} = \{kx_1; ky_1\}$.

Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Пусть заданы точки A (x_A, y_A) и B (x_B, y_B), тогда

Координаты вектора: $\vec{AB}\ \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$.

***Координаты середины отрезка** AB:* $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

***Расстояние между точками** A и B* (длина вектора $\vec{AB}$): $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$