ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 2

Елементи інтегрального числення

1.Первісна и невизначений інтеграл

2. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.

3.Основні прийоми знаходження невизначеного інтеграла.

3. Визначений інтеграл.

4. Формула Ньютона-Лейбніца.

5. Властивості визначеного інтеграла.

6.Невласні інтеграли.

ЛЕКЦІЯ 2.1
Невизначений інтеграл, його властивості і обчислення

Первісна і невизначений інтеграл

Визначення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$, якщо її похідна або диференціал задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Первісна і невизначений інтеграл

Кожна неперервна функція, що інтегрується, має нескінченну безліч первісних, що відрізняються на *сталу C*:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

Знаходження цих первісних називається ***інтегруванням.***

Сукупність усіх первісних для функції називається ***невизначеним інтегралом:***

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (2)$$

Властивості невизначеного інтегралу

Похідна невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, а його диференціал - підінтегральному виразу. Дійсно:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Властивості інтегралу, які витікають із визначення

Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференціюємої функції дорівнює самій цій функції

3. $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$

так як $\varphi(x)$ є первісною для $\varphi'(x)$.

Властивості інтегралу

Сформулюємо далі наступні властивості невизначеного інтегралу:

4.Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні, то функція $f_1(x)+f_2(x)$ також має первісну, при цьому:

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx ;$$

5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблиця невизначених інтегралів

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$

Методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування

- ***Приклад.*** Обчислити $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$
- ***Рішення.*** Так як під знаком інтегралу знаходиться сума чотирьох доданків, то розкладуємо інтеграл на суму чотирьох інтегралів:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

2. Метод заміни змінної (спосіб підстановки).

Застосовується наступна формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,, \qquad (4)$$

де $x = \varphi(t)$ - диференційована функція ,

а t - нова змінна.

Приклади

- ***Приклад 1 .*** Обчислити :

$$\int \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} 2x = t \\ d(2x) = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Приклади

***Приклад 2*.** Обчислити : $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Рішення. Преобразімо x^2+4x+5,

виділяючи повний квадрат по формулі $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тоді отримаємо :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1=(x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2)+C.$$

Приклади

Приклад 3 . Обчислити :

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2} 2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \left| \begin{matrix} 1+t^2 = z, \\ 2tdt = dz, tdt = \frac{1}{2}dz \end{matrix} \right| = \int \frac{dz}{z} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$\ln|z| + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = = \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C = \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами

Цей метод засновано на формулі $\int udv = uv - \int vdu$ (3)

Методом інтегрування частинами беруть такі інтеграли:

а) $\int x^n \sin xdx$, де $n = 1,2..k$;

б) $\int x^n e^x dx$, де $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, де $n = 0,\pm1,\pm2,\dots\pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, де $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При обчисленні інтегралів а) и б) вводять позначення: $x^n = u$, тоді $du = nx^{n-1}dx$, а, наприклад $\sin xdx = dv$, тоді $v = -\cos x$.

При обчисленні інтегралів в), г) позначають за u функцію $arctgx$, $\ln x$, а за dv беруть $x^n dx$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\int x\cos x dx$.

Рішення.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C\ .$$

Приклади

Приклад 2. Обчислити

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$