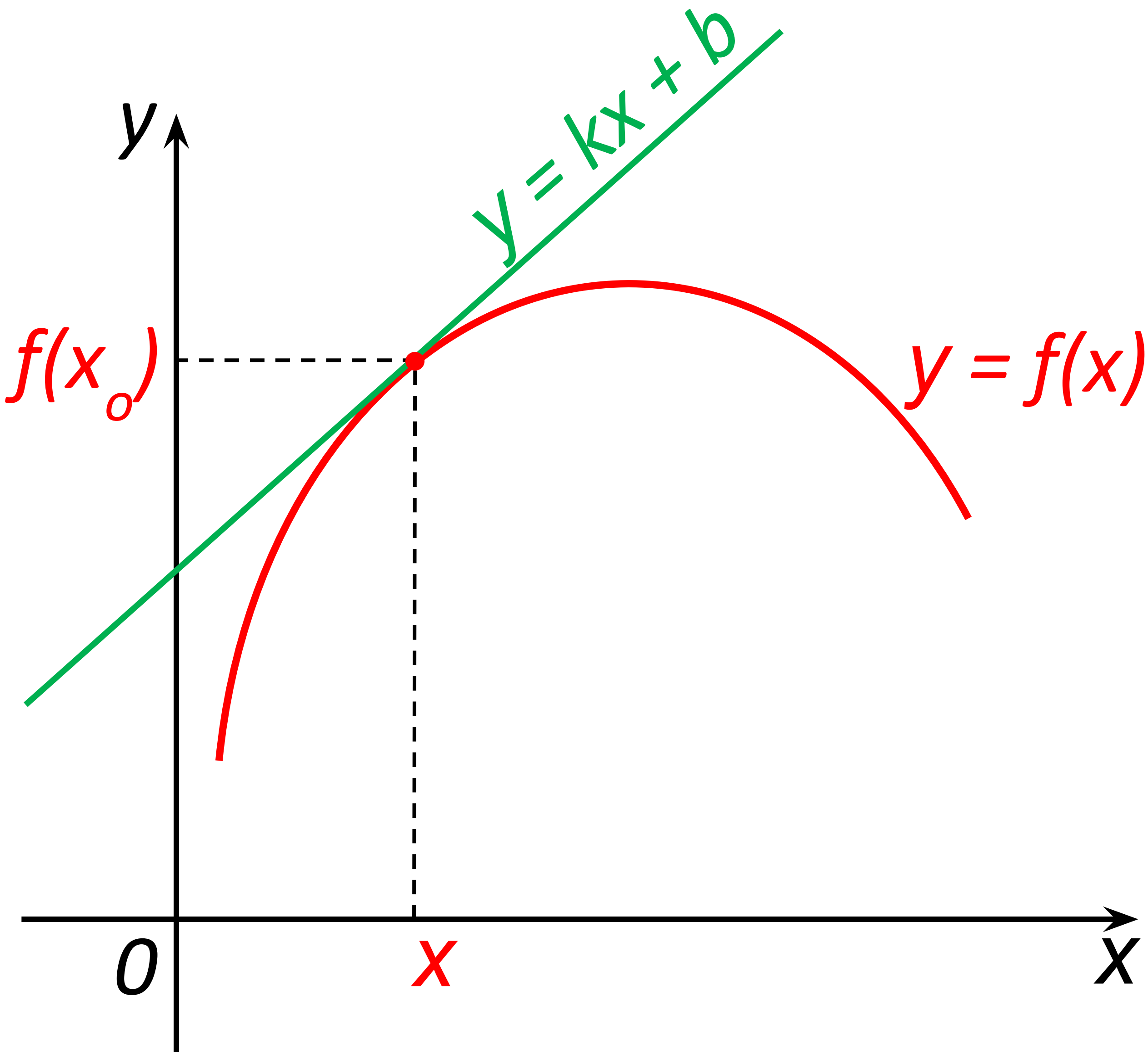
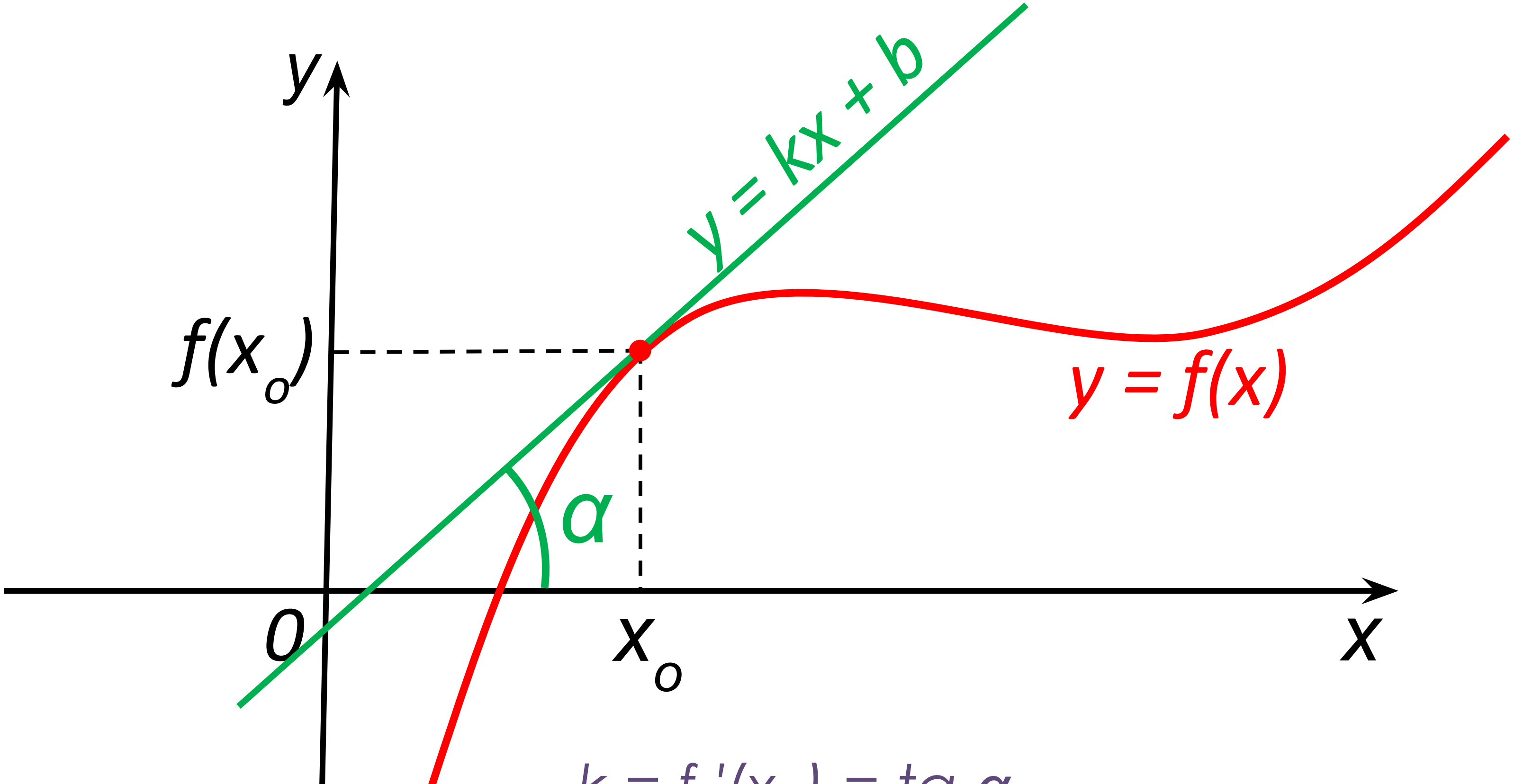
~~Е~~
Н
~~А~~
А
я

Касательная к графику функции



Касательная

к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.



$k = f'(x_o) = tg\ \alpha$ –
это угловой коэффициент касательной.

Общий вид уравнения касательной

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

Алгоритм составления уравнения касательной

1) Находим значение функции в точке x_o: $f(x_o)$.
2) Дифференцируем функцию: $f'(x)$.
3) Находим значение производной в точке x_o: $f'(x_o)$.
4) Подставляем эти данные в общее уравнение касательной: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

Общий вид уравнения касательной

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

Пример:

Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 4x + 5$, в точке $x_o = 1$.

1) $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 4$

2) $f'(x) = 6x - 4$

3) $f'(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2$

4) $y = 2(x - 1) + 4$

Ответ: $y = 2x + 2$.

Прямая $y = 4x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$.
Найдите абсциссу точки касания.

<u>Решение:</u>
Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (назовем ее x_o), то ее угловой коэффициент (в нашем случае $k = 4$ из уравнения $y = 4x + 11$) равен значению производной функции в точке x_o:
$k = f\,'(x_o) = 4$
Производная функции
$f\,'(x) = (x^2 + 8x + 6)' = 2x + 8$.
Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы $2x_o + 8 = 4$,
откуда $x_o = -2$.

Ответ: – 2.

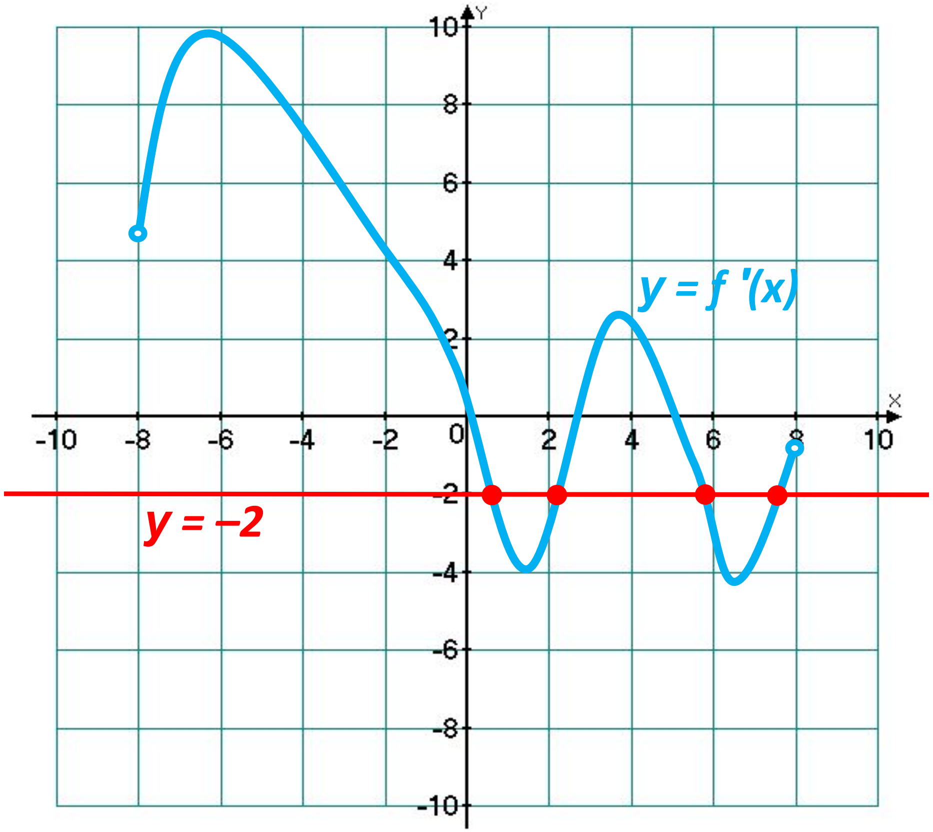
Прямая $y = 3x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$.
Найдите абсциссу точки касания.

Решение:
Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент $(k = 3)$ должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2 - 6x - 6 = 3$, то есть $3x^2 - 6x - 9 = 0$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: -1 и 3. Таким образом есть две точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ имеет угловой коэффициент, равный 3.
Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = 3x + 11$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной.
Значение функции в точке -1 равно $y(-1) = -1 - 3 + 6 + 6 = 8$,
а значение в точке 3 равно $y(3) = 27 - 27 - 18 + 6 = -12$. Заметим, что точка с координатами $(-1; 8)$ удовлетворяет уравнению касательной, так как $8 = -3 + 11$. А вот точка $(3; -12)$ уравнению касательной не удовлетворяет, так как $-12 \neq 9 + 11$.
Значит, искомая абсцисса точки касания равна -1.

Ответ: -1.

3

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(–8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = –2x + 2$ или совпадает с ней.

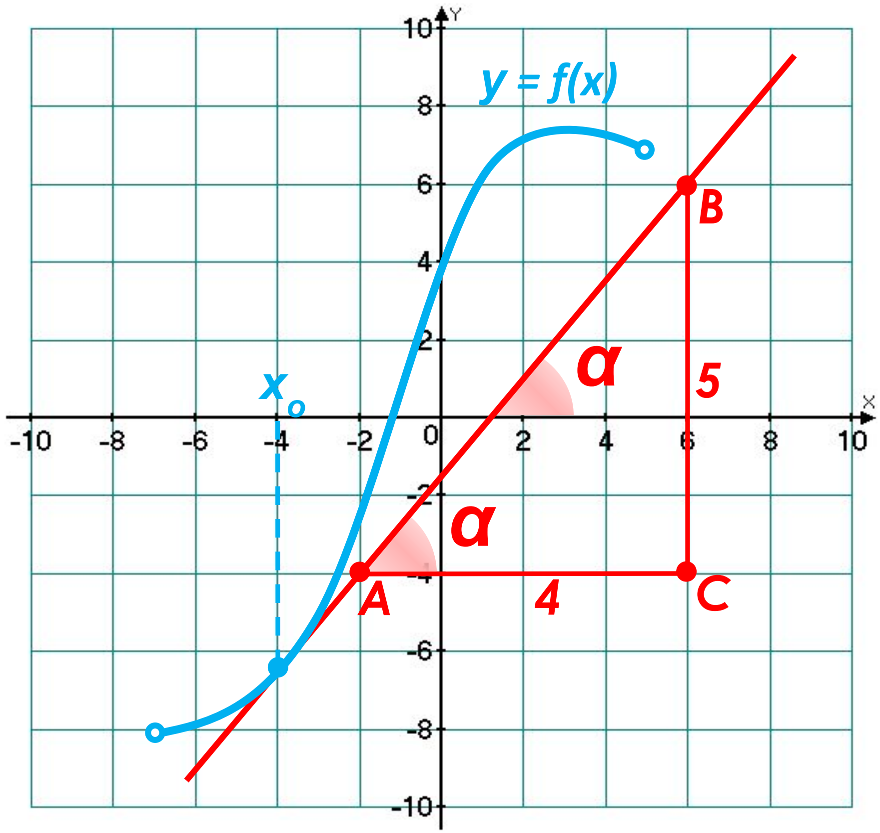


Решение:

Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = –2x + 2$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент $k = –2$, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f'(x) = –2$. Для этого на графике производной проведем прямую $y = –2$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. Таких точек 4.

Ответ: 4.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_o. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_o.



Решение:

Значение производной функции $f'(x_o) = tg\ a = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

В нашем случае $k > 0$, так как a – острый угол ($tg\ a > 0$).

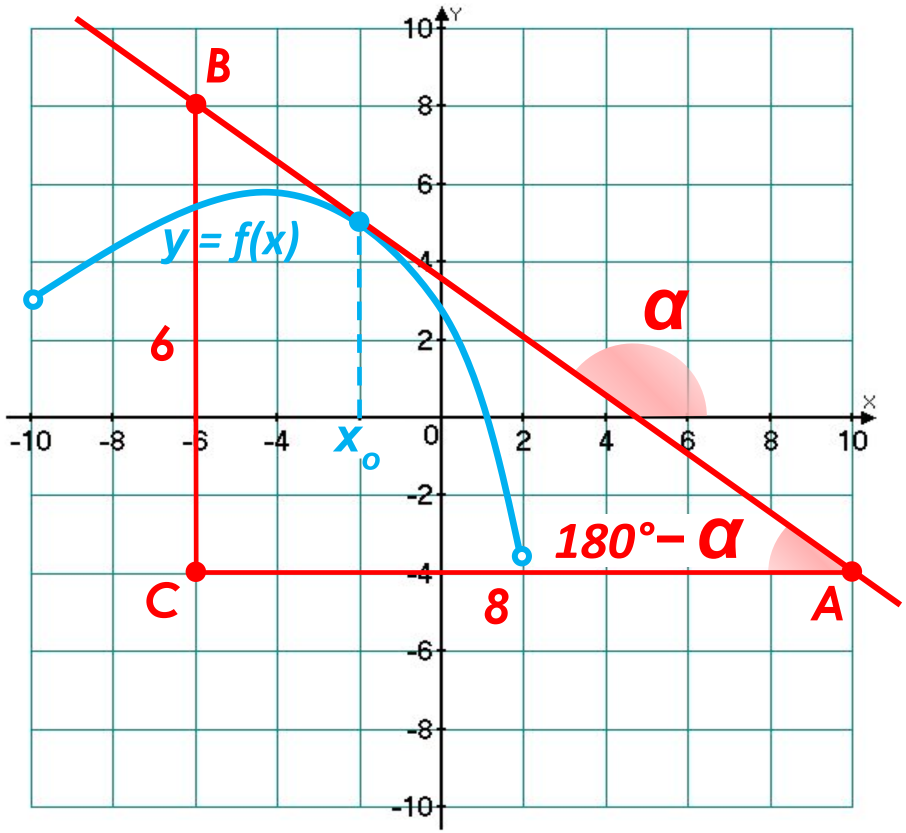
Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

$tg\ a = BC : AC = 5 : 4 = 1,25$

Ответ: 1,25.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_o. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_o.



<u>Решение:</u>

Значение производной функции $f'(x_o) = tg\ a = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

В нашем случае $k < 0$, так как a – тупой угол $(tg\ a < 0)$.

Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

$tg(180° - a) = BC : AC = 6 : 8 = 0{,}75$

$tg\ a = -tg\ (180° - a) = -0{,}75$

Ответ: –0,75.

6

Прямая $y = 4x - 4$ является касательной к графику функции $ax^2 + 34x + 11$. Найдите a.

<u>Решение:</u>

Производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой. Откуда, если за x_o принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_o + 34 = 4$. То есть $ax_o = -15$.

Найдем значение исходной функции в точке касания:

$ax_o^2 + 34x_o + 11 = -15x_o + 34x_o + 11 = 19x_o + 11$.

Так как прямая $y = 4x - 4$ – касательная, имеем:

$19x_o + 11 = 4x_o - 4$, откуда $x_o = -1$.

А значит $a = 15$.

Ответ: 15.

7

Прямая $y = -4x - 5$ является касательной к графику функции $9x^2 + bx + 20$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

<u>Решение.</u>

Если x_o – абсцисса точки касания, то $18x_o + b = -4$, откуда $b = -4 - 18x_o$.

Аналогично задаче <u>№12</u> найдем x_o:

$9x_o^2 + (-4 - 18x_o)\, x_o + 20 = -4x_o - 5,$

$9x_o^2 - 4x_o - 18x_o^2 + 20 + 4x_o + 5 = 0,$

$-9x_o^2 + 25 = 0,$

$x_o^2 = 25/9.$

Откуда $x_o = 5/3$ или $x_o = -5/3$.

Условию задачи соответствует только положительный корень, значит $x_o = 5/3$, следовательно $b = -4 - 18 \cdot 5/3$, имеем $b = -34$.

Ответ: –34.

8 **Прямая $y = 2x - 6$ является касательной к графику функции $x^2 + 12x + c$. Найдите c.**

Решение.
Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_o и приравняем значение производной функции в точке x_o угловому коэффициенту касательной.

$2x_o + 12 = 2$, откуда $x_o = -5$.

Значение исходной функции в точке -5 равно:

$25 - 60 + c = c - 35$, значит $c - 35 = 2\cdot(-5) - 6$, откуда $c = 19$.

Ответ: 19.

Монотонность функций

1) Если $f'(x) > 0$ внутри промежутка X, то функция f **возрастает** на этом промежутке.
2) Если $f'(x) < 0$ внутри промежутка X, то функция f **убывает** на этом промежутке.
3) Если $f'(x) = 0$ внутри промежутка X, то функция f **постоянна** на этом промежутке.

Примеры

1° $f(x) = 3x^3 + 4x$:

$f'(x) = 9x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает при $x \in R$

2° $f(x) = -2x^5 - 6x$

$f'(x) = -10x^4 - 6 < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает при $x \in R$

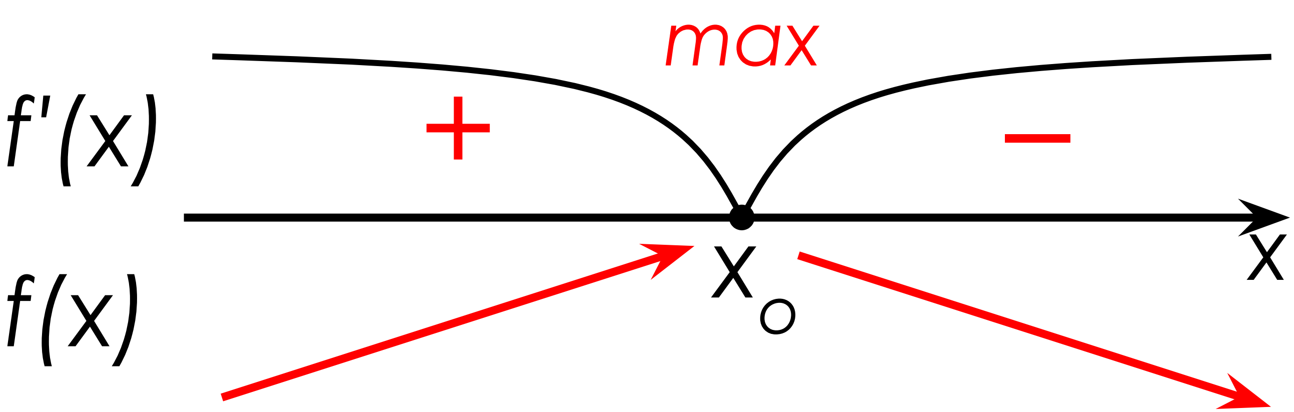
3° $f(x) = 12\pi$

$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ постоянна при $x \in R$

Максимум функции

Точка x_o называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Если в точке x_o производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_o – точка локального **максимума** функции $f(x)$.

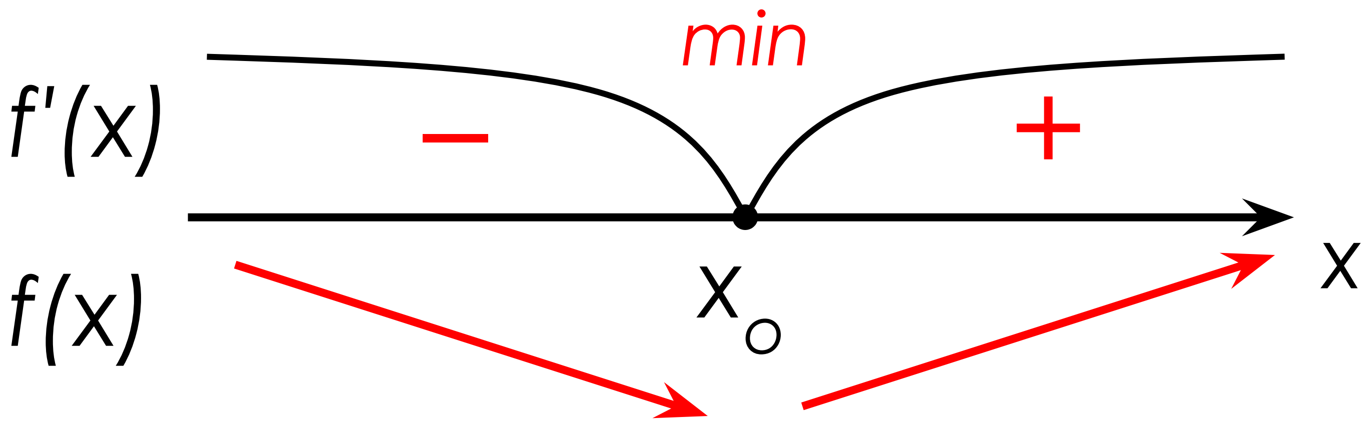


$f(x_o)$ – максимум функции

Минимум функции

Точка x_o называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

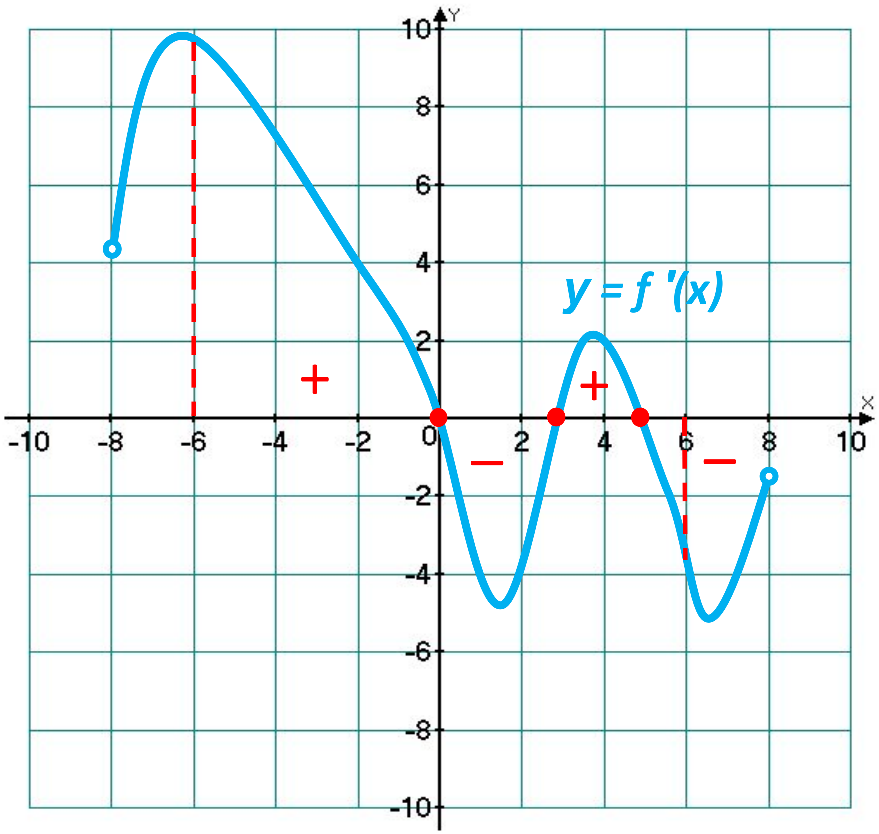
Если в точке x_o производная функции $f(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_o – точка локального минимума функции $f(x)$.



$f(x_o)$ – минимум функции

9

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 6]$.



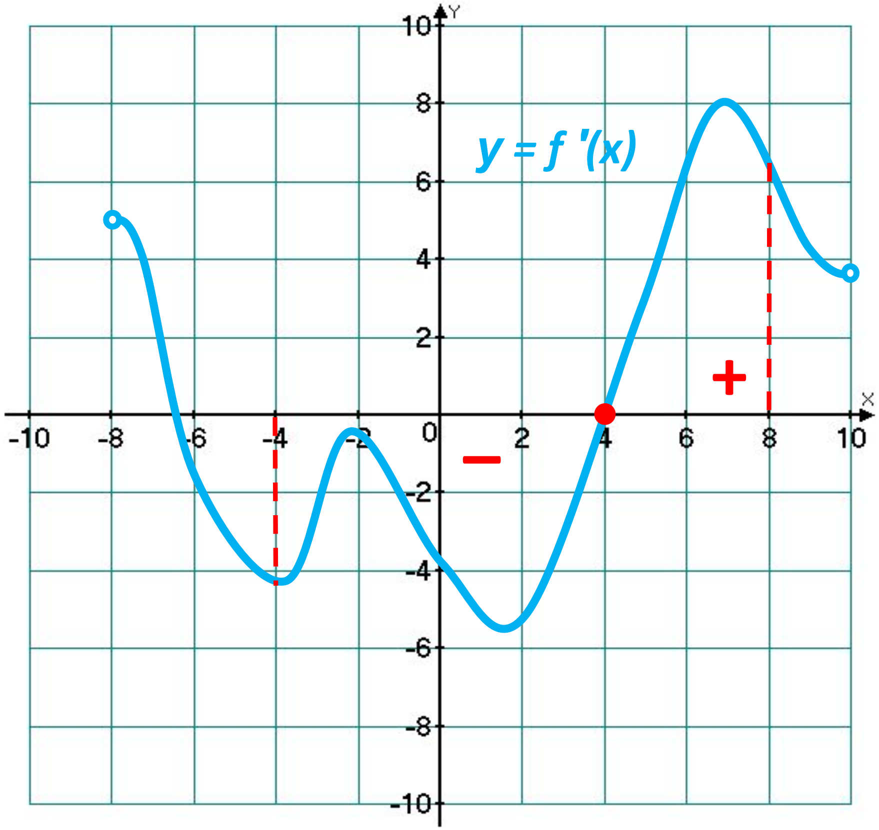
<u>Решение:</u>

В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует.

Видно, что таких точек принадлежащих отрезку [–6; 6] три. При этом в каждой точке производная меняет знак либо с «+» на «–», либо с «–» на «+».

Ответ: 3.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–8; 10). Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале (– 4; 8).



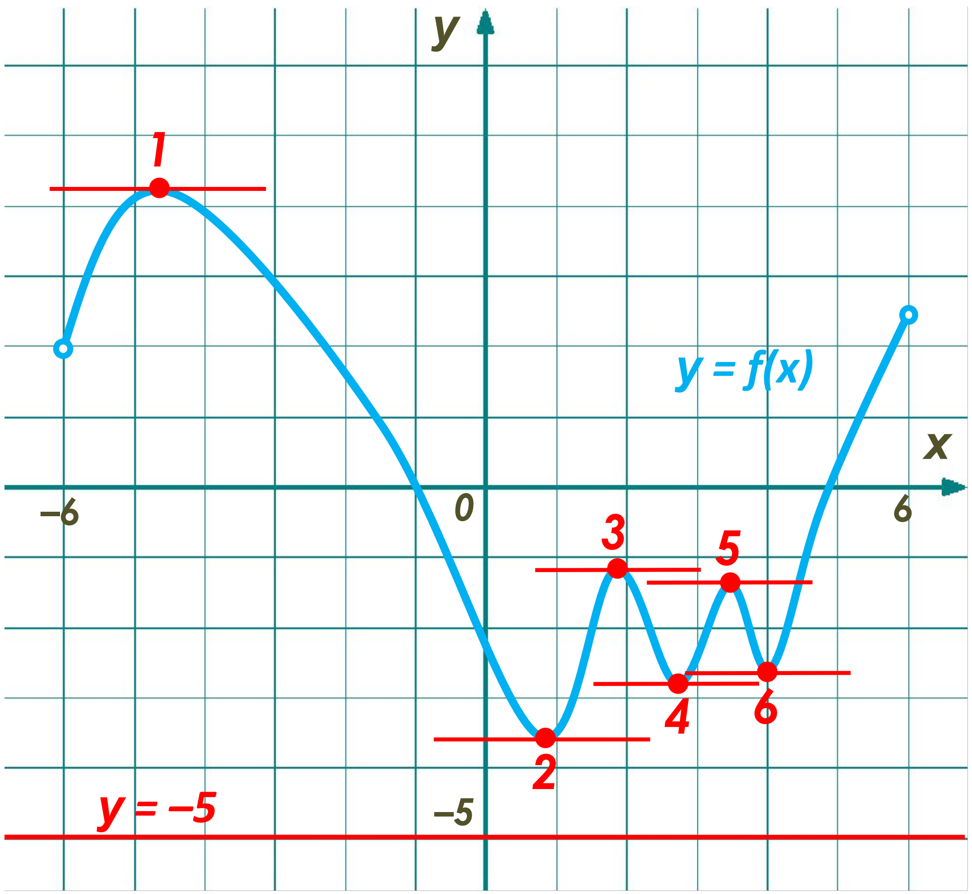
Решение:

Заметим, что на интервале (–4; 8) производная в точке $x_o = 4$ обращается в 0 и при переходе через эту точку меняет знак производной с «–» на «+», точка 4 и есть искомая точка экстремума функции на заданном интервале.

Ответ: 4.

11

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;\ 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -5$.

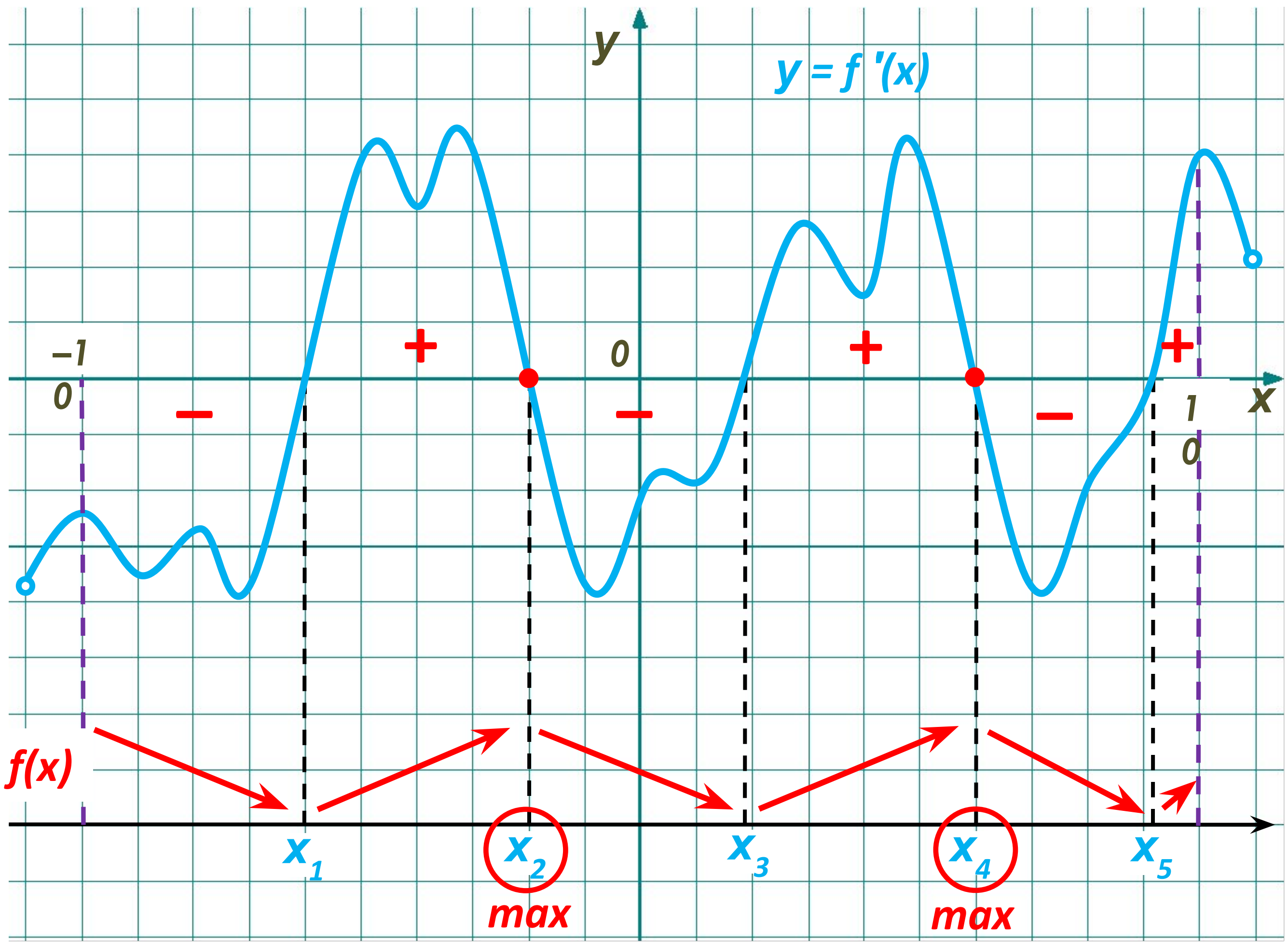


Решение:
Прямая $y = -5$ горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна.
Следовательно, угловой коэффициент в искомых точках $k = f'(x) = 0$.
В нашем случае – это точки экстремума.
Таких точек 6.

Ответ: 6.

12

На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ –функции $f(x)$, определенной на интервале $(–11; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[−10; 10]$.



Решение:

В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек принадлежащих отрезку $[−10; 10]$ пять. В точках x_2 и x_4 производная меняет знак с «+» на «−» – это точки максимума.

Ответ: 2.

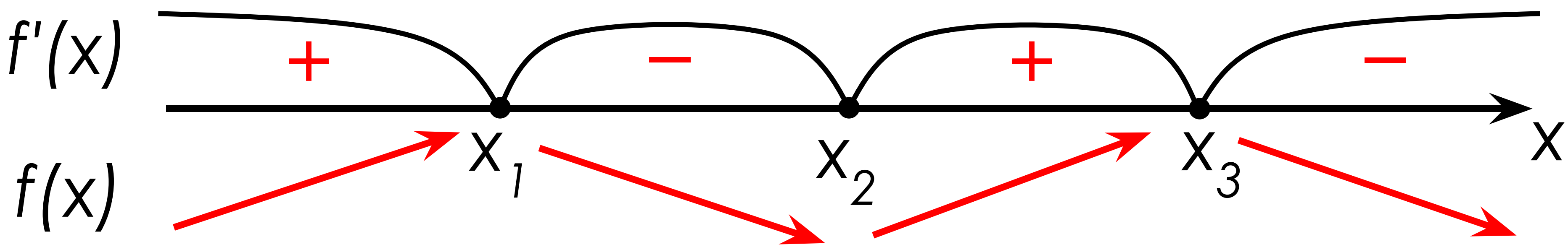
Алгоритм исследования функции на монотонность

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$.

б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

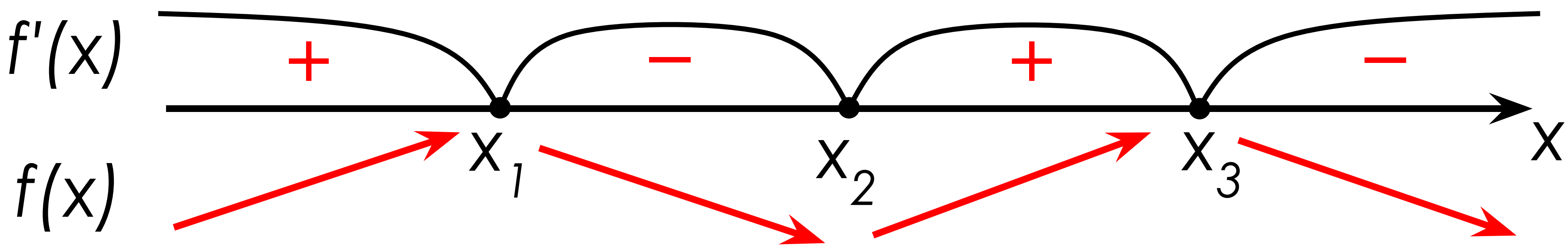
Алгоритм исследования функции на экстремумы

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) x_1; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

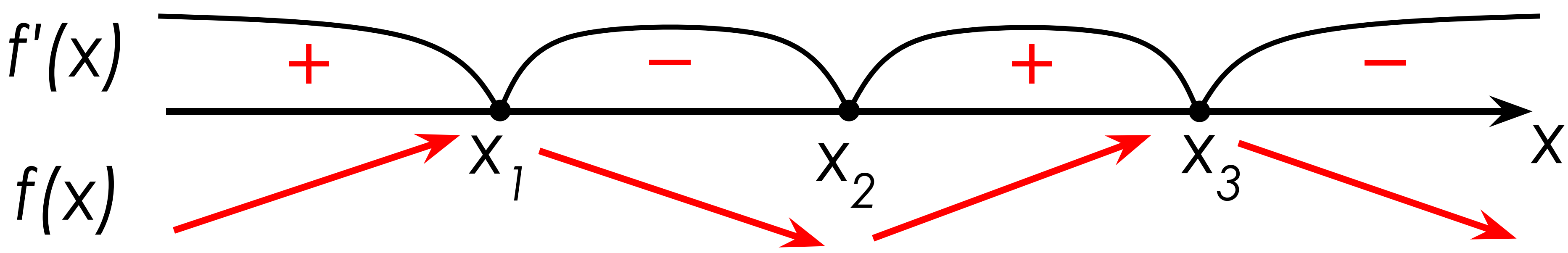
Полное исследование функции, построение графика

1. Находим область определения функции $D(f)$ и множество ее значений $E(f)$.
2. Определяем четность (нечетность), периодичность функции.
3. Находим точки пересечения с осями координат из условий: $(0; f(0))$ и $f(x) = 0$.

   Пусть это: x_{01}; x_{02}; x_{03}; …
4. Находим промежутки знакопостоянства, решая неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.
5. Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

Полное исследование функции, построение графика

7. Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
8. Полученные данные изображаем на схеме:



9. Указываем промежутки монотонности функции

а) промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$;

б) промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

Полное исследование функции, построение графика

0. *Определяем точки экстремума и сами экстремумы функции:*

а) x_1; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

1. *Изображаем все полученные данные в системе координат, строим график функции $y = f(x)$.*

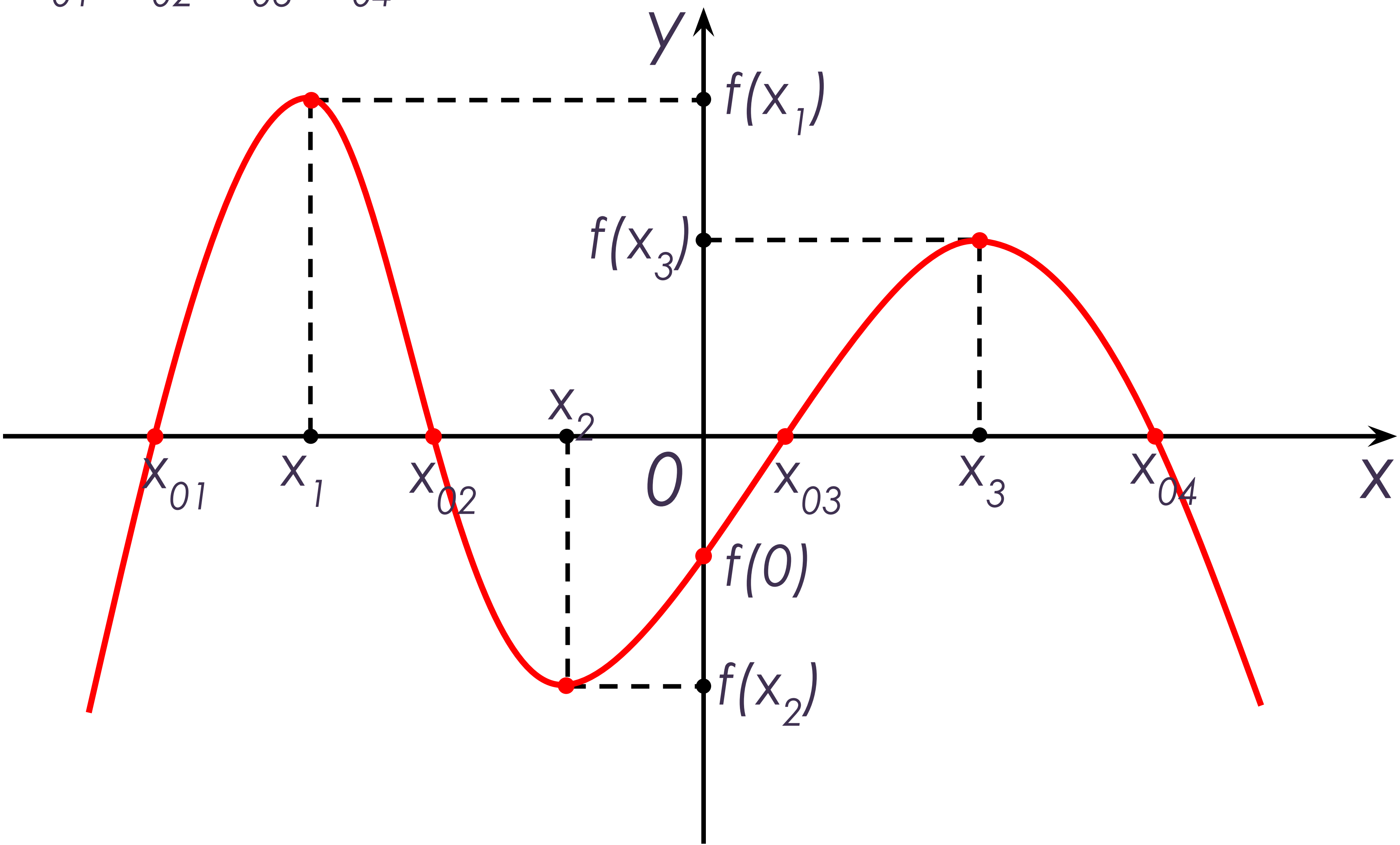
Построение графика

$x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}$

$(x_1; f(x_1)); (x_2; f(x_2)); (x_3; f(x_3))$ – точки экстремумов

$(0; f(0))$ –

Через данные точки проводим плавную кривую



Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном отрезке

1° Выясняем существование функции на данном отрезке $[a; b]$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

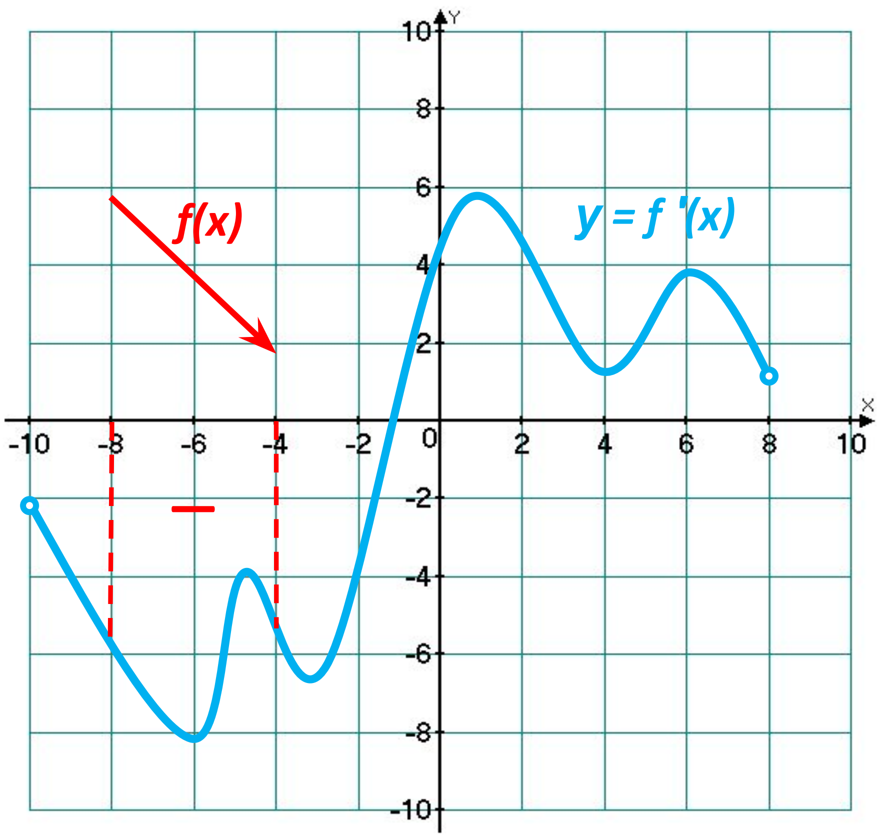
3° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

4° Отбираем те точки, которые принадлежат заданному промежутку $[a; b]$.

5° Находим значение функции в этих точках и на концах промежутка: $f(a)$; $f(b)$; $f(x_1)$; $f(x_2)$; и т. д.

6° Выбираем среди полученных значений наибольшее или наименьшее.

На рисунке изображен график $y = f\,'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–10; 8). В какой точке отрезка [–8; –4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

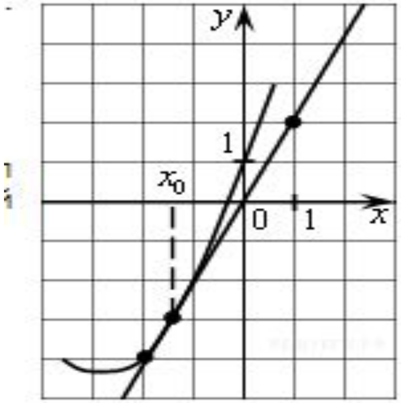


Решение: *Заметим, что на отрезке [–8; –4] производная функции отрицательна, значит, сама функция убывает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке –4.*

Ответ: –4.

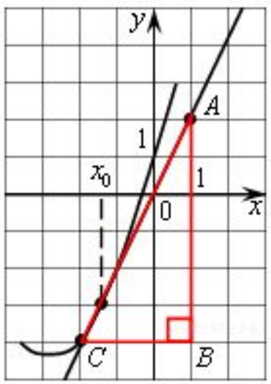
Используемые материалы

- *Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008*
- *ЕГЭ 2012. Математика. Задача В8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. 3-е изд. стереотип. − М.: МЦНМО, 2012. − 88 с.*
- *http://mathege.ru/or/ege/Main − Материалы открытого банка заданий по математике 2012 года*



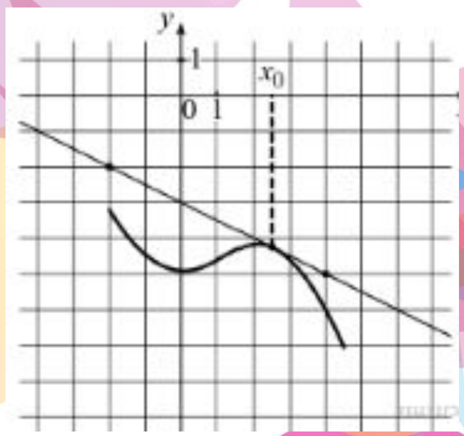
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:



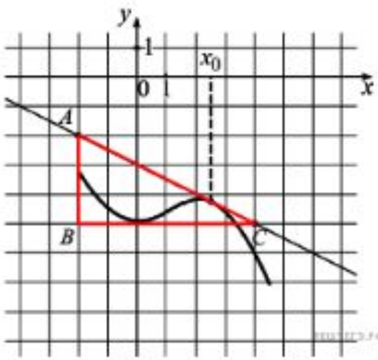
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −2), B (−2; −5), C (4; −5). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:



$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{3}{6} = -0,5.$$

Ответ: −0,5.