

Методы решения
неравенств
рассматриваемые в
Алгебре 9 класса.



Для решения линейных и квадратных
неравенств в 9 классе
рассматриваются следующие
приемы решения данных
неравенств, данные приемы
вводятся виде правил для
учащихся:



1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).



Например. Решить неравенство

$$3x + 5 < x^2$$



- Неравенство $3x + 5 < x^2$ равносильно
- неравенству $-x^2 + 3x + 5 < 0$
- член x^2 перенесли из правой части неравенства в левую с противоположным знаком.



2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже положительное число, не меняя при этом знака неравенства.



Например. Решить неравенство

$$8x - 4 > 12x^2$$



- Неравенство $8x - 4 > 12x^2$ равносильно
- Неравенству $-12x^2 + 8x - 4 > 0$
- обе части первого неравенства
разделили на положительное число 4



3. Обе части неравенства можно умножить и разделить на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный ($<$ на $>$, \leq на \geq).



Например. Решить неравенство

$$-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$$



• Неравенство $-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ равносильно

• Неравенству

$$2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

• обе части первого неравенства умножили на отрицательное число -1 , изменив при этом знак неравенства на противоположный



Рассмотренные правила 2 и 3 допускают обобщения (соответствующие утверждения представляют собой теоремы)

Теорема 1. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и тоже выражение $p(x)$, отрицательное при всех значениях x , и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство равносильное данному.



Например. Решить неравенство

$$\frac{5x-7}{-3x^2-8} < 0$$

неравенство $\frac{5x-7}{-3x^2-8} < 0$ равносильно

неравенству $5x-7 > 0$

(обе части исходного

неравенства умножили на выражение

$(-3x-8)$,

отрицательное при любых значениях x ;

при этом знак исходного неравенства

изменили на противоположный).



Теорема 2. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x , и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.



Например. Решить неравенство

$$(x^2 + 1)(x + 7) > 0$$

неравенство $(x^2 + 1)(x + 7) > 0$ равносильно неравенству $x + 7 > 0$ (обе части исходного неравенства разделили на выражение, положительное при любых значениях x ; при этом знак исходного неравенства оставили без изменения).



Рациональные неравенства.

При решении рациональных неравенств используются те приемы, которые были рассмотрены выше.

С помощью этих приемов преобразуют заданное рациональное неравенство к виду $f(x) > 0$, где $f(x)$ – алгебраическая функция.

Затем числитель и знаменатель дроби $f(x)$ разлагают на множители вида $(ax-b)$ и применяется **метод интервалов**.



Метод интервалов

Сущность метода интервалов заключается в следующем:

- ввести функцию;
- найти область определения;
- найти нули функции;
- выделить промежутки знакопостоянства;
- определить знак на каждом из промежутков;
- выбирается необходимый промежуток;
- записывается ответ.



Например. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} > 0$$



1. Ввели функцию

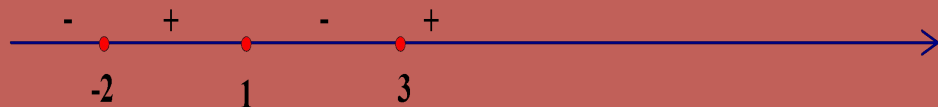
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-3}$$

2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

3. Нули функции:

$$x=1; x=-2$$

4-5.



$$6. f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$$

7. Ответ: $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$

Система неравенств

Задача. Задумано натуральное число. Известно, что если к квадрату задуманного числа прибавить 13, то сумма будет больше произведения задуманного числа и числа 14. Если же к квадрату задуманного числа прибавить 45, то сумма будет меньше произведения задуманного числа и числа 18. Какое число задумано?



- **Решение.**
- **Первый этап.** Составление математической модели.

Пусть x – задуманное число. По первому условию сумма чисел и 13 больше $14x$; это значит, что должно выполняться неравенство . По второму условию сумма чисел и 45 меньше числа $18x$; это значит, что должно выполняться неравенство . Так как указанные неравенства должны выполняться одновременно, следовательно, нужно решить систему уравнений из этих неравенств



$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x \\ x^2 + 45 < 18x \end{cases}$$



Второй этап. Работа с составленной моделью.

Преобразуем первое неравенство к виду: $x^2 - 14x + 13 > 0$

Найдем корни трехчлена

$$x^2 - 14x + 13 : x_1 = 1, x_2 = 13$$

С помощью параболы $y = x^2 - 14x + 13$ делаем вывод, что интересующее нас неравенство выполняется при

$$x < 1 \quad \text{или} \quad x > 13$$



Преобразуем, второе неравенство системы и приведем к виду $x^2 - 18x + 45 < 0$

Найдем корни трехчлена $x^2 - 18x + 45 : x_1 = 3, x_2 = 15$

С помощью параболы $y = x^2 - 18x + 45$ делаем вывод, что интересующее нас неравенство выполняется если $3 < x < 15$
Пересечением найденных решений служит интервал $(3, 15)$.



Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

- Нас интересует натуральное число, принадлежащее интервалу $(13, 15)$. Таким числом является число 14.
- Ответ: задумано число 14.



Метод парабол

- неравенство преобразуется к виду

$$ax^2 + bx + c > 0 (<, \leq, \geq)$$

- находятся корни квадратного трехчлена x_1, x_2 ;
- парабола, служащая графиком функции пересекает ось x в точках x_1, x_2 , а ветви направлены вниз, если $a < 0$ вверх, если $a > 0$
- делаем вывод: $y > 0$, следовательно, график расположен выше оси x (если $y < 0$, то график расположен ниже оси).



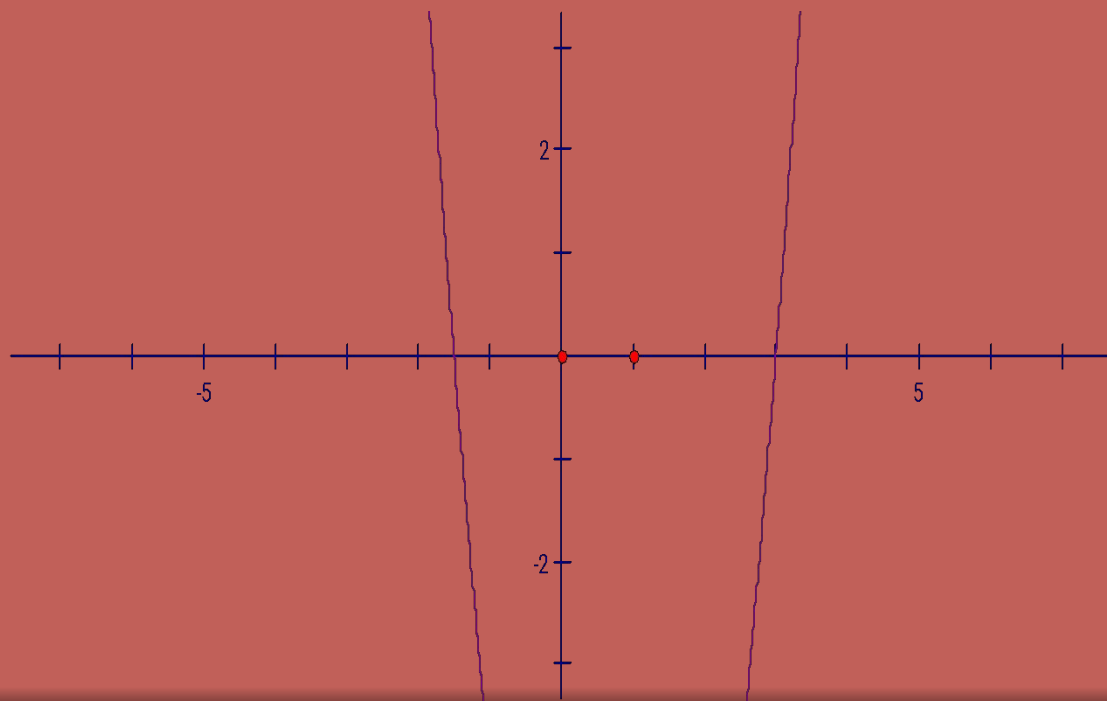
Например. Решить неравенство

$$3x + 9 < 2x^2$$

1. $-2x^2 + 3x + 9 < 0$

2. $-2x^2 + 3x + 9 = 0 : x_1 = 3, x_2 = 1,5.$

3.



4. $y < 0$, при $x \in (-\infty; 1,5) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 1,5) \cup (3; +\infty)$



Системы уравнений

- Метод подстановки
- Суть данного метода заключается в следующем:
 - выражается y через x из одного уравнения системы;
 - подставляется полученное выражение вместо y в другое уравнение системы;
 - решается полученное уравнение относительно x ;
 - подставляется поочередно каждый найденный член на третьем шаге корней уравнения вместо x в выражение y через x , полученное на первом шаге;
 - записывается ответ в виде пар значений $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.



Система уравнений

- Метод алгебраического сложения.
- Суть метода решения данного уравнения учащиеся рассматривается в 7 классе, где данный метод применялся для решения системы линейных уравнений.



Система уравнений

- Метод введения новых переменных
 - С данным методом учащиеся сталкивались в 8 классе при решении рациональных уравнений.
- Суть данного метода при решении системы уравнений та же самая, но с технической точки зрения имеются некоторые особенности. Метод введения новых переменных при решении системы двух уравнений применяется в двух вариантах.
- Первый вариант: вводится одна переменная и используется только в одном уравнении системы.
- Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются в одновременно в обоих уравнениях системы.

