КИНЕМАТИКА –

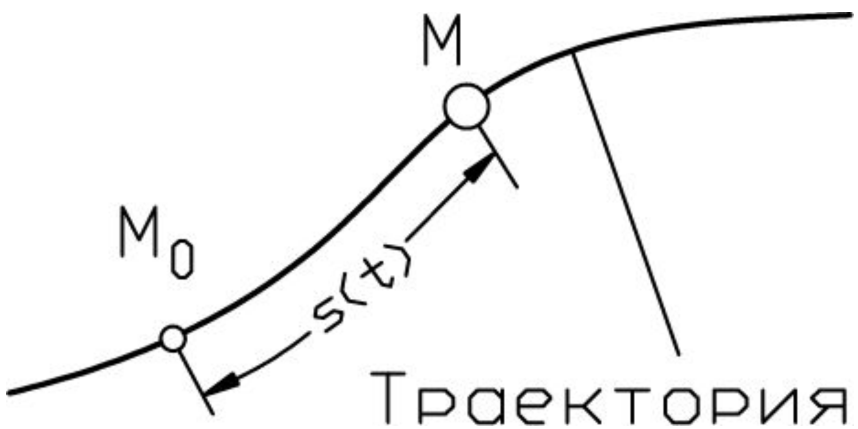
раздел механики,
изучающий
геометрические свойства
движения тел
без учета их масс
и действующих на них сил.

ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ –

геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета

По виду траектории все движения точки делятся на ***прямолинейные*** и ***криволинейные***

Естественный способ задания движения точки



Движение точки определено, если известны:

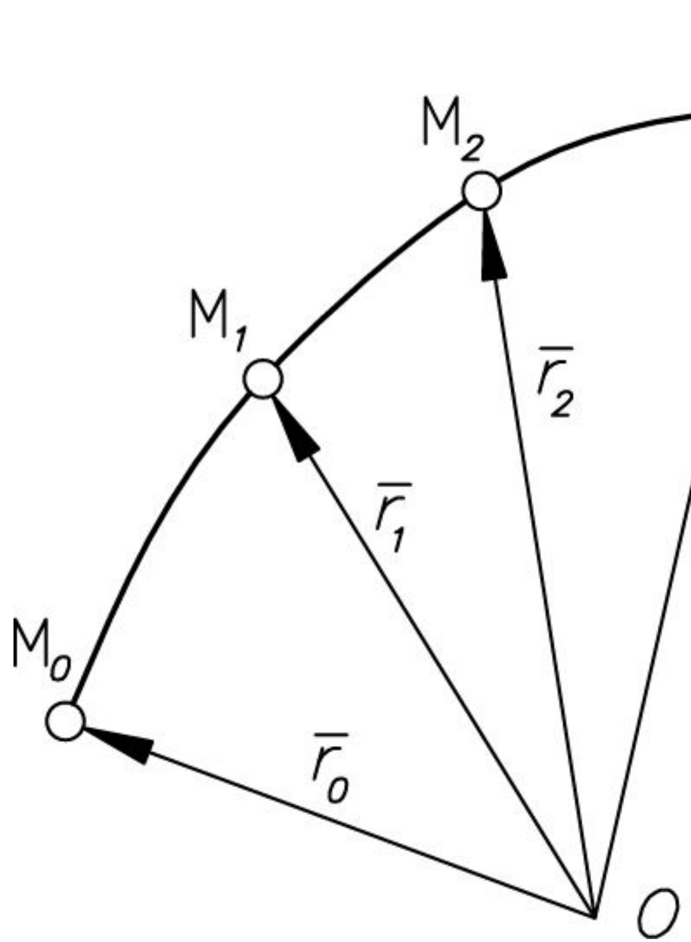
1) траектория точки;

2) начало и направление отсчета дуговой координаты;

3) уравнение движения

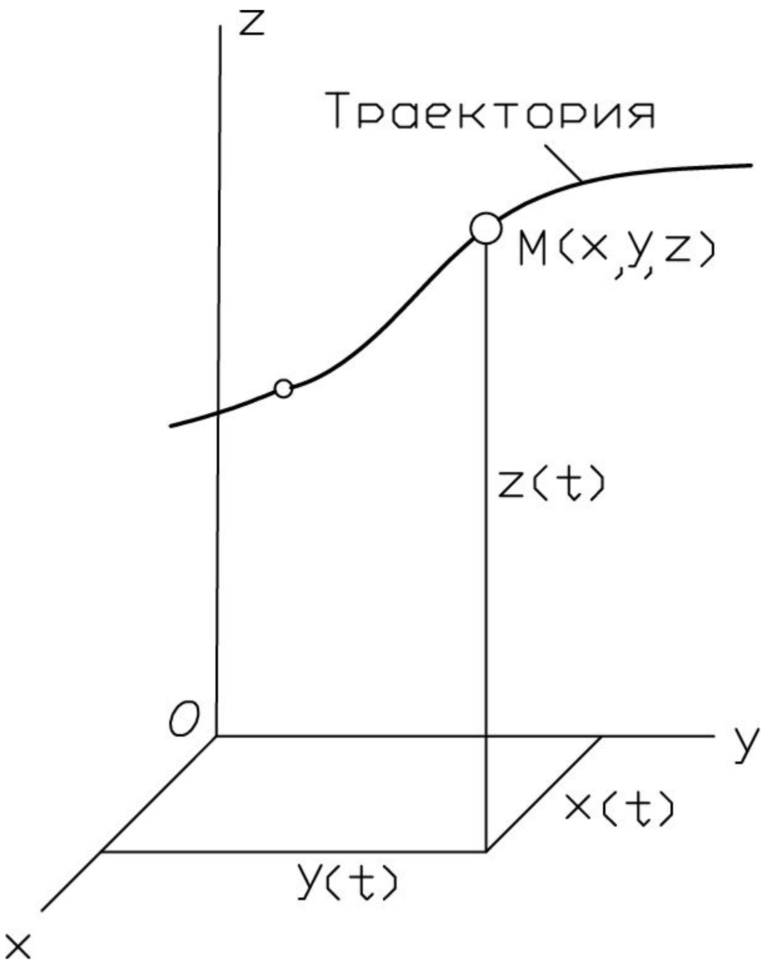
$$s = f(t).$$

Векторный способ задания движения точки



Траектория точки является геометрическим местом концов радиуса-вектора ***r***(*t*) *движущейся точки*

Координатный способ задания движения точки

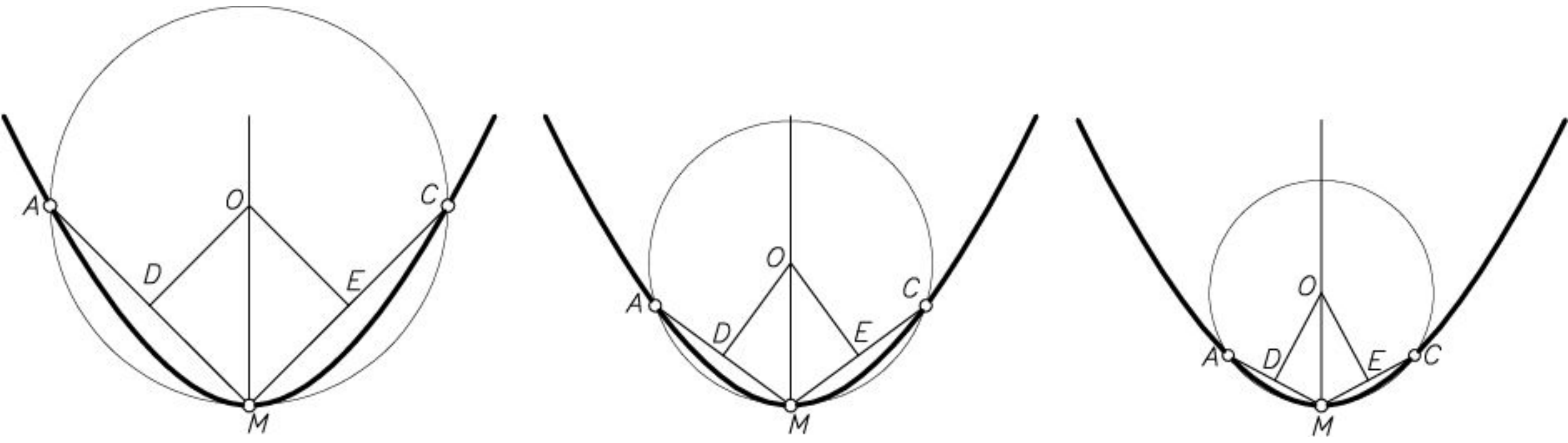


Уравнения движения точки в декартовых координатах

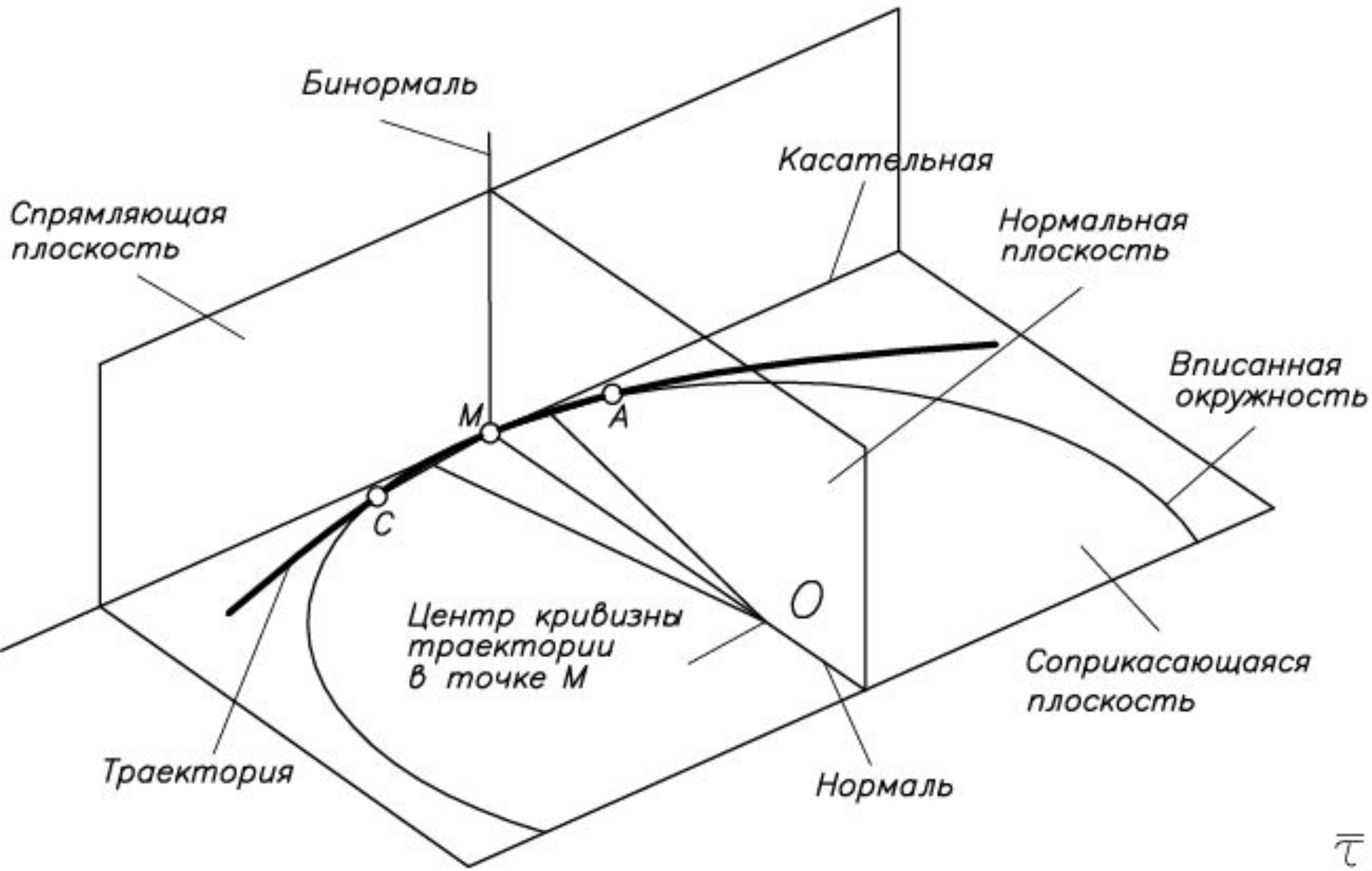
$$x = f_1(t);$$
$$y = f_2(t);$$
$$z = f_3(t).$$

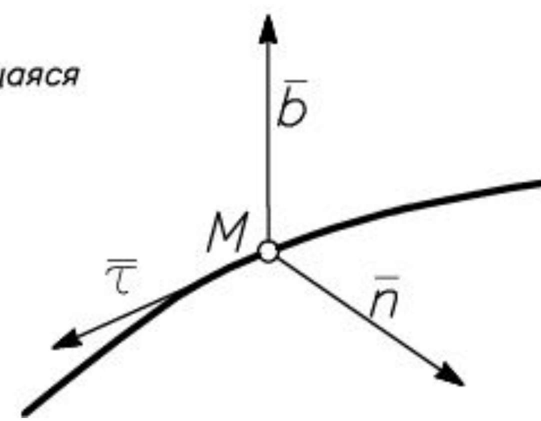
Уравнения траектории в параметрической форме

Радиус кривизны траектории



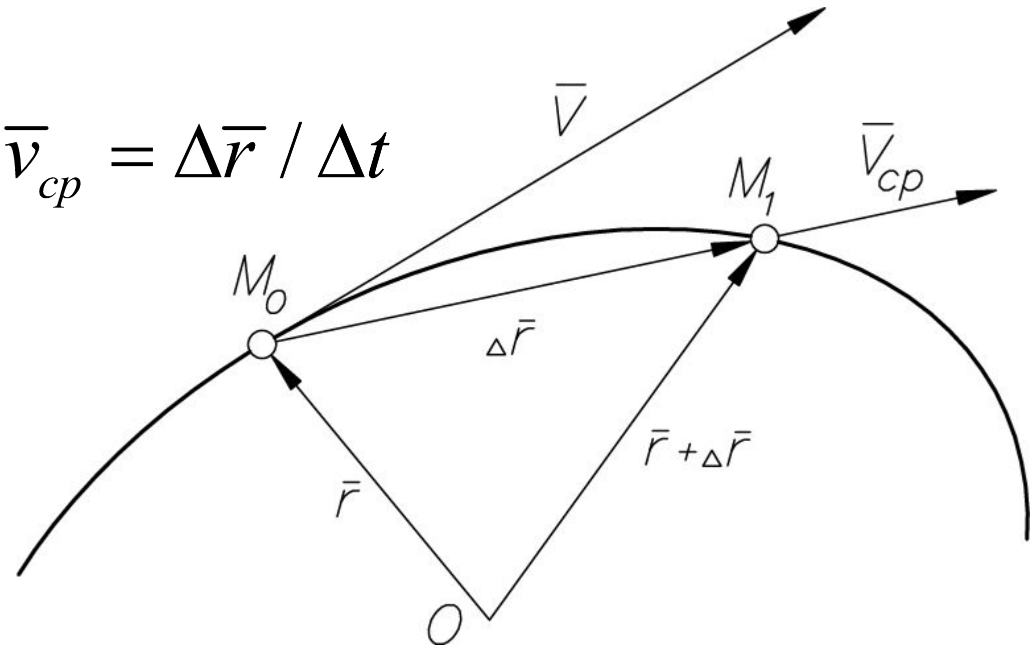
Естественная система координат





Скорость — векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки

$$\overline{v}_{cp} = \Delta\overline{r} \,/\, \Delta t$$



$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\overline{r} \,/\, \Delta t = d\overline{r} \,/\, dt$$

*Вектор скорости точки в данный момент равен **производной** от радиуса-вектора точки по времени и направлен **по касательной** к траектории*

Определение скорости точки при задании ее движения естественным способом.
Проекции скорости на касательную к траектории

$$\bar{v} = d\bar{r}(s,t)/dt = (d\bar{r}/ds)(ds/dt);$$

$$d\bar{r}/ds = \lim_{\Delta s \to 0} \Delta\bar{r}/\Delta s = d\bar{r}/dt;$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1;$$

$$\bar{\tau} = d\bar{r}/ds;$$

$$\bar{v} = \bar{\tau} \cdot ds/dt$$

Модуль скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени

Определение скорости точки при задании ее движения координатным способом. Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат

Пусть заданы уравнения движения точки

$$x = f_1(t); \qquad y = f_2(t); \qquad z = f_3(t)$$

$$\overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z$$

$$\overline{v} = d\overline{r} / dt = \overline{i} \cdot dx / dt + \overline{j} \cdot dy / dt + \overline{k} \cdot dz / dt$$

$$\overline{v} = \overline{i} \cdot v_x + \overline{j} \cdot v_y + \overline{k} \cdot v_z$$

Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени

$$v_x = dx / dt;$$

$$v_y = dy / dt;$$

$$v_z = dz / dt.$$

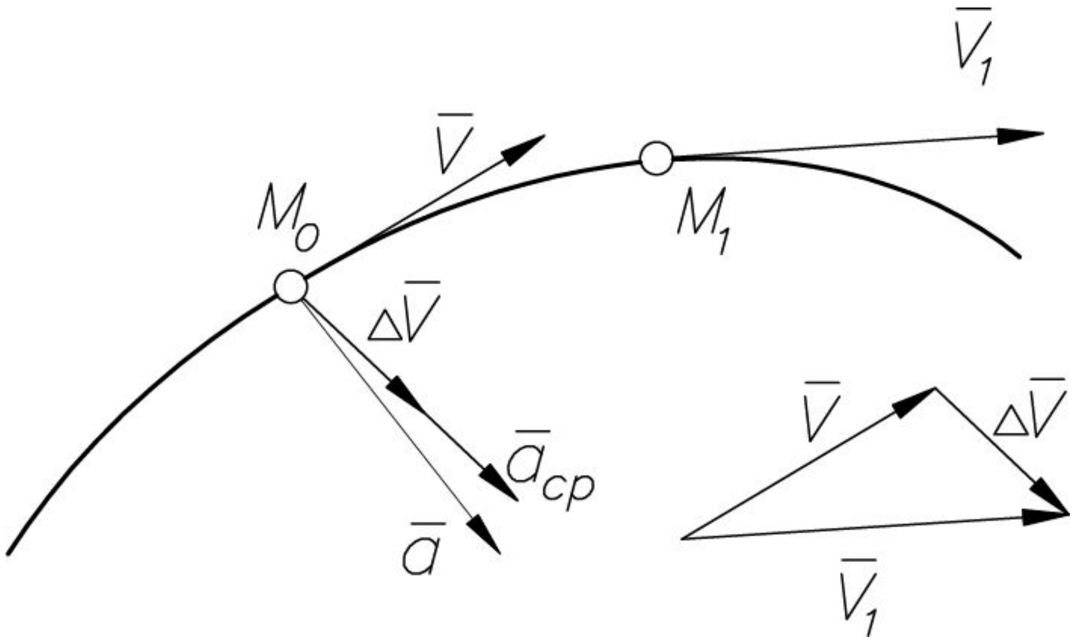
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

При неравномерном криволинейном движении точки изменяются модуль и направление ее скорости.

Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки.

Определение ускорения точки при задании векторным способом



$$\overline{a}_{cp} = \Delta\overline{v} / \Delta t$$

$$\overline{a} = d\overline{v} / dt = d^2\overline{r} / dt^2$$

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени

Определение ускорения точки при задании ее движения координатным способом

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (1)$$

$$\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{i} \cdot d^2x/dt^2 + \vec{j} \cdot d^2y/dt^2 + \vec{k} \cdot d^2z/dt^2 \qquad (2)$$

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z \qquad (3)$$

$$a_x = d^2x/dt^2; \quad a_y = d^2y/dt^2; \quad a_z = d^2z/dt^2 \qquad (4)$$

$$a_x = dv_x/dt; \quad a_y = dv_y/dt; \quad a_z = dv_z/dt \qquad (5)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

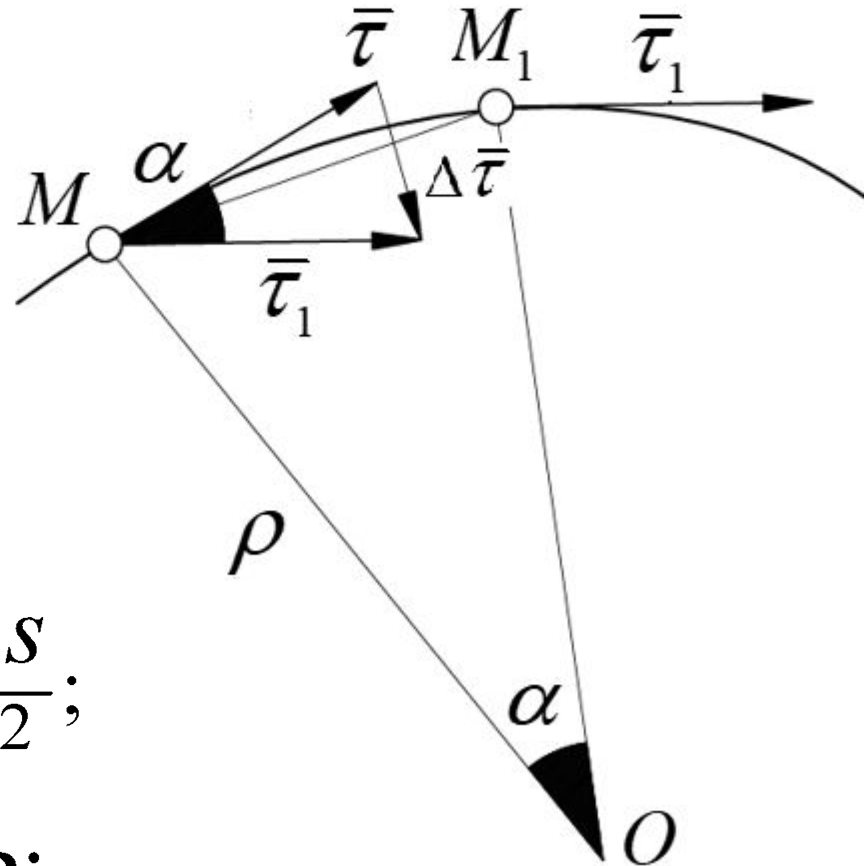
Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения точки

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot ds / dt \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} =$$

$$= \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \qquad (2)$$

$$= \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot v^2 + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot v^2 + \vec{\tau}\cdot\frac{d^2 s}{dt^2};$$

$$\alpha = \Delta\tau / \tau = \Delta s / \rho;$$

$$\Delta\tau / \Delta s = \tau / \rho = 1 / \rho;$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau}$$

Ускорение точки равно

геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется

нормальным ускорением,

а другой направлен по касательной и называется

касательным ускорением точки

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

где нормальное ускорение точки

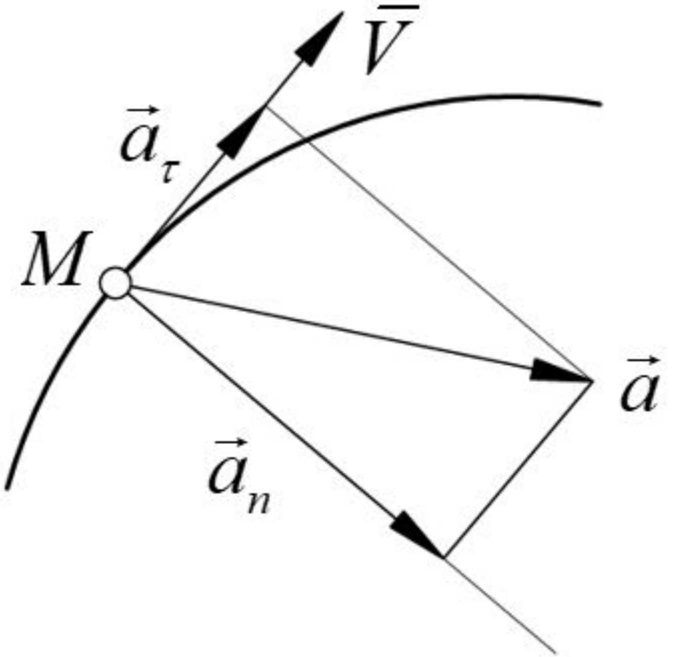
$$\vec{a}_n = \vec{n} \cdot v^2 / \rho,$$

а касательное ускорение

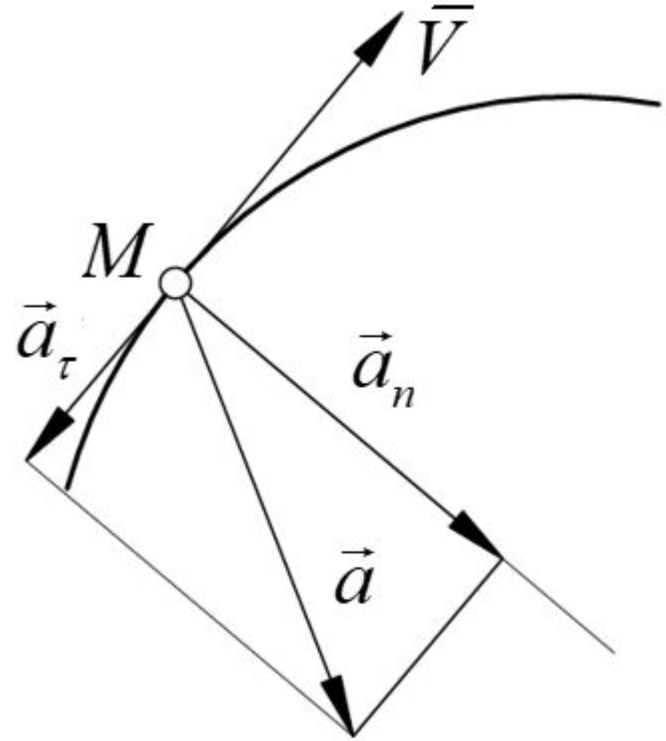
$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot d^2 s / dt^2$$

Нормальное ускорение *существует лишь при* ***криволинейном движении*** *точки и характеризует* ***изменение направления*** *скорости*.

Касательное ускорение *точки существует лишь при* ***неравномерном*** *движении точки и характеризует* ***изменение модуля*** *скорости*



а) скорость возрастает



б) скорость уменьшается

Определение касательного и нормального ускорения точки,

движение которой задано координатным способом

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

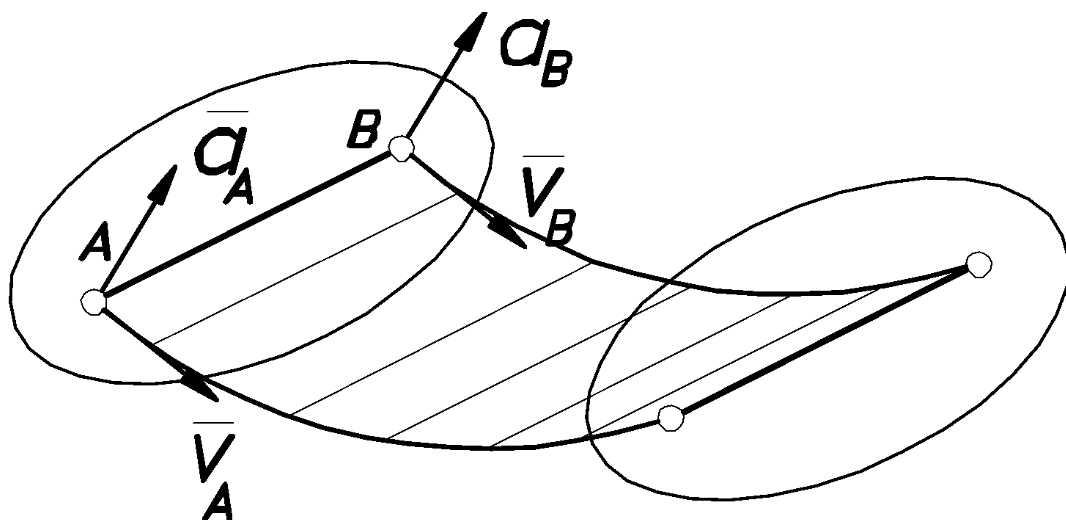
$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right| = \left|\frac{v_x \dfrac{dv_x}{dt} + v_y \dfrac{dv_y}{dt} + v_z \dfrac{dv_z}{dt}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\right|$$

или $$a_\tau = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}\right|. \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

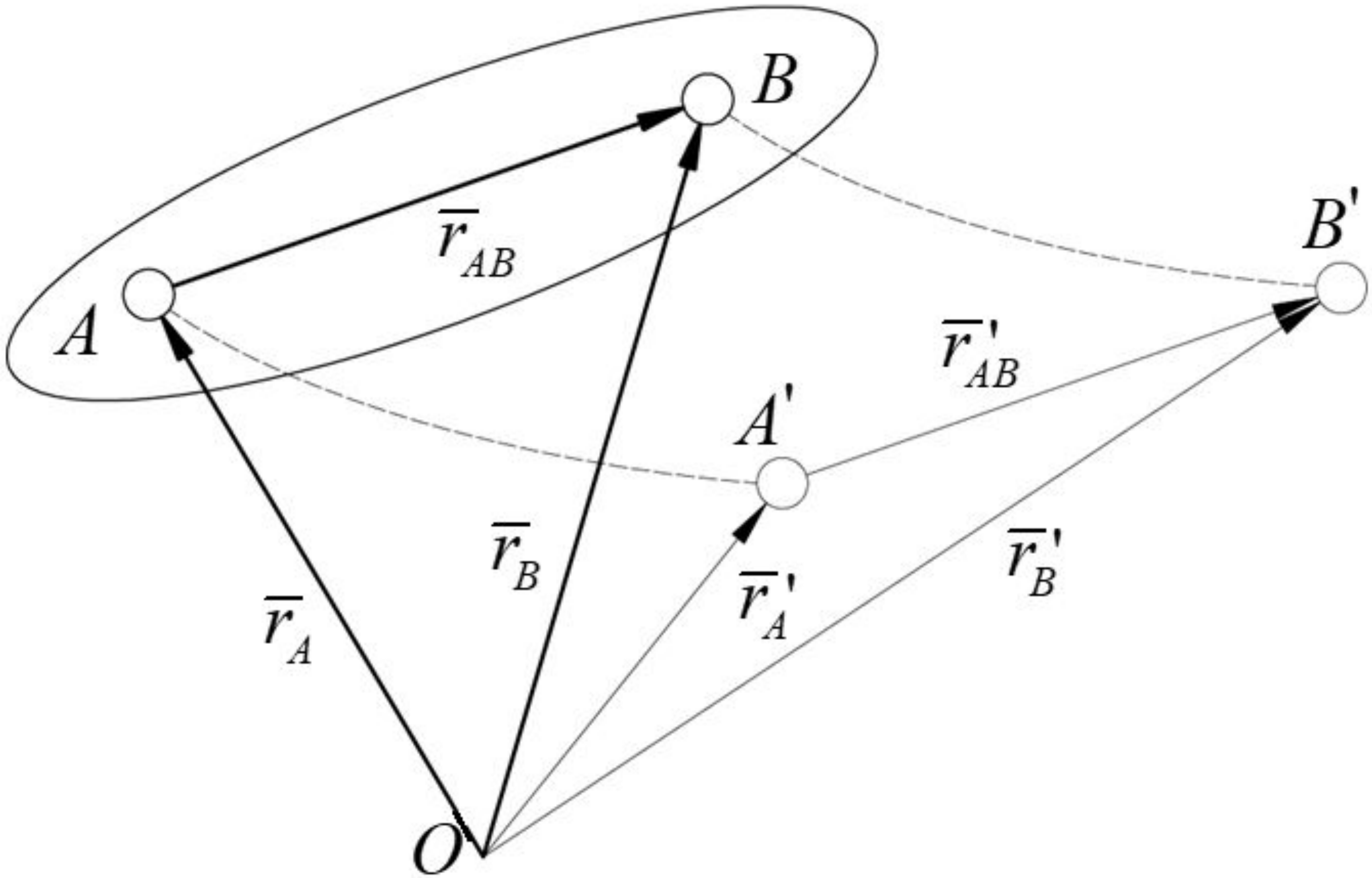
Радиус кривизны траектории находим по формуле $$\rho = v^2 / a_n$$

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА –

движение твердого тела, при котором любая прямая *AB*, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.



При поступательном движении
все точки тела описывают
одинаковые (при наложении
совпадающие) траектории
и имеют в каждый момент времени
одинаковые
по модулю и направлению
скорости
и ускорения



$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{r}_{AB},\ \text{где}\ \overline{r}_{AB} = const$$

$$\overline{v}_B = d\overline{r}_B / dt = d\overline{r}_A / dt + d\overline{r}_{AB} / dt = d\overline{r}_A / dt = \overline{v}_A;$$

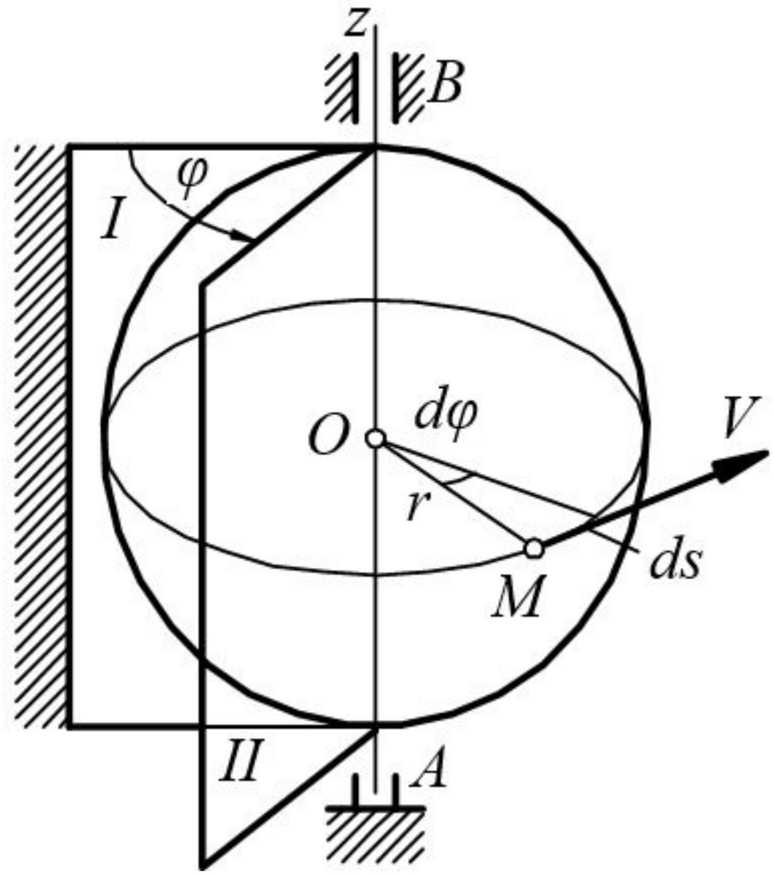
$$\overline{a}_B = d\overline{v}_B / dt = d\overline{v}_A / dt = \overline{a}_A$$

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА –

движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными

***Ось вращения** – прямая, проходящая через неподвижные точки A и B*

Положение тела в любой момент времени однозначно определяется взятым с соответствующим знаком углом поворота тела между полуплоскостями *I* и *II*



Измеряется угол φ в ***радианах***

Угловая скорость - быстрота изменения угла поворота:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad [сек^{-1}]$$

Угловое ускорение - быстрота изменения угловой скорости :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad [сек^{-2}]$$

Линейная скорость точки $$v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega;$$

Нормальное ускорение $$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r;$$

Тангенциальное ускорение $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Вращение равномерное – вращение тела с постоянной угловой скоростью.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const$$

$$d\varphi = \omega \cdot dt; \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_{0}^{t} dt;$$

откуда

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

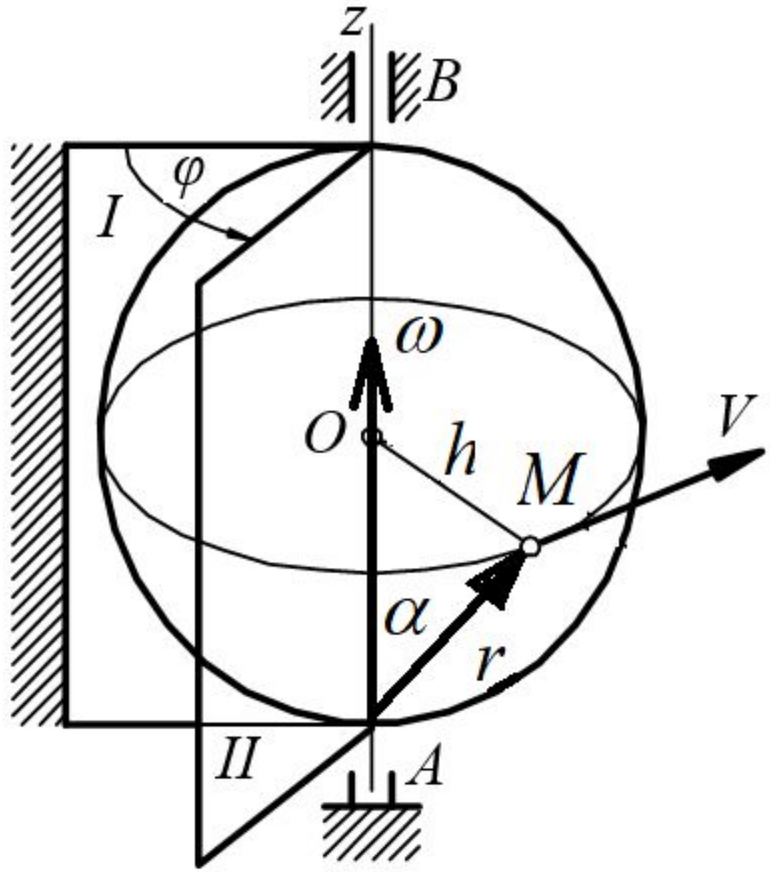
Вращение равнопеременное – вращение тела с постоянным угловым ускорением

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const; \qquad d\omega = \varepsilon \cdot dt; \ \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt;$$

$$\omega = d\varphi / dt = \varepsilon t + \omega_0; \qquad d\varphi = (\varepsilon t + \omega_0) dt;$$

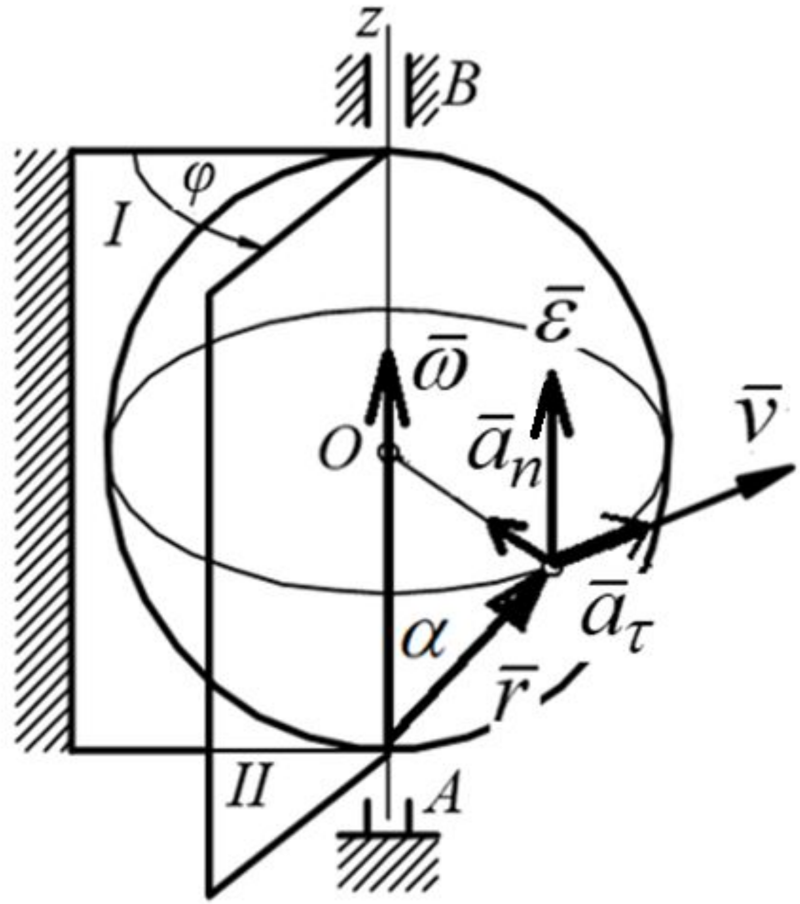
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \varepsilon \int_0^t t \cdot dt + \omega_0 \int_0^t dt;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega;$$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r};\ v = \omega \cdot r \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = \omega \cdot h$$

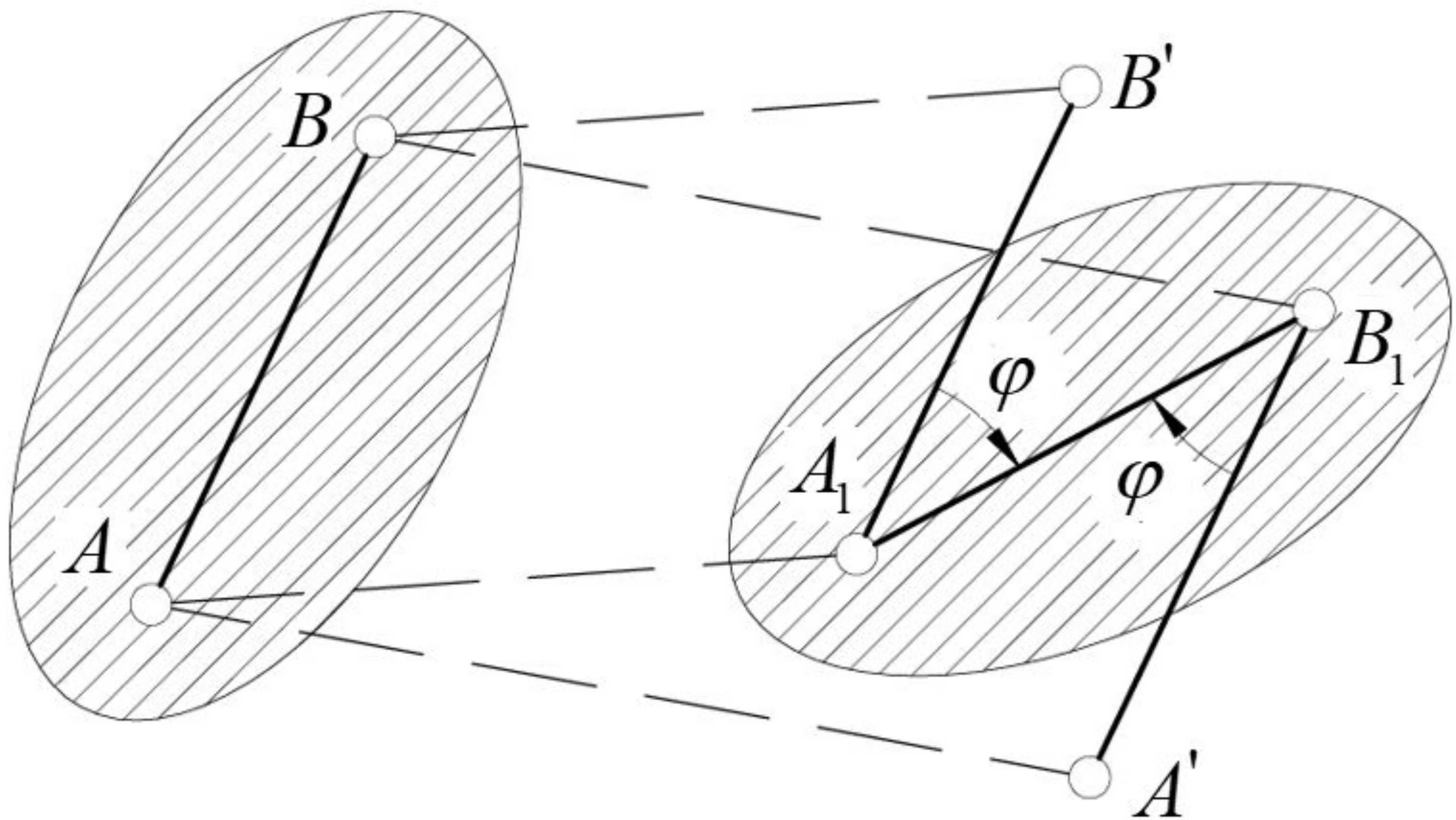


$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r};$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} =$$

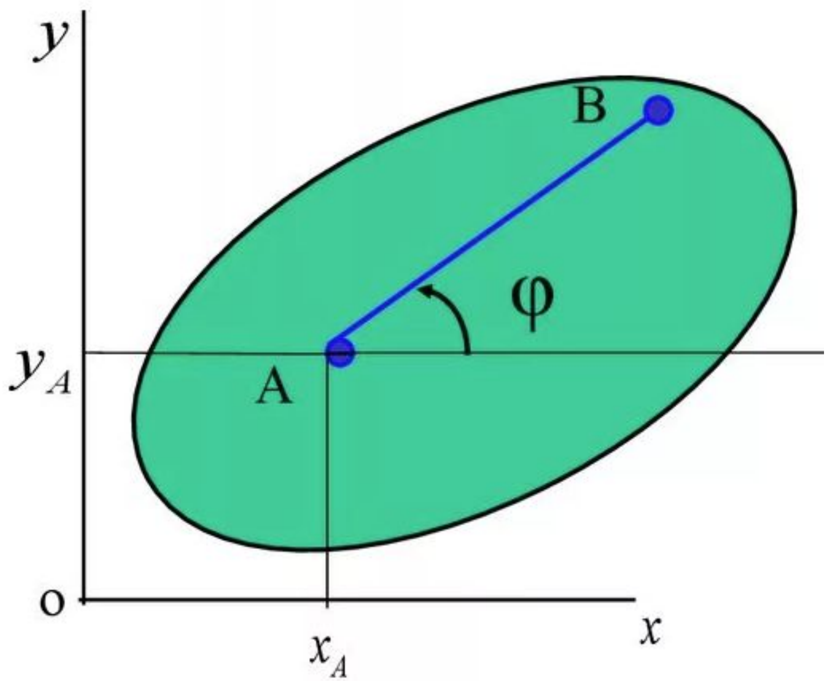
$$= \varepsilon \cdot r \,\mathrm{Sin}\, \alpha \cdot \bar{\tau} + \omega \cdot v \cdot \bar{n} = \varepsilon \cdot h \cdot \bar{\tau} + \frac{v^2}{h} \cdot \bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела – движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости



B
A
B'
B1
φ
φ
A1
A'

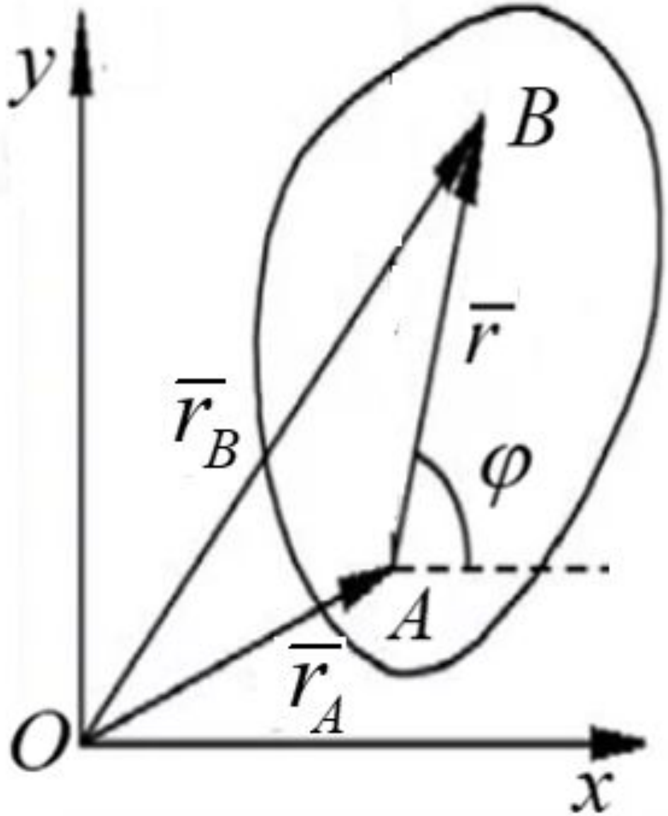
Уравнения плоскопараллельного движения



$$x_A = f_1(t); \;\; y_A = f_2(t); \;\; \varphi = f_3(t)$$

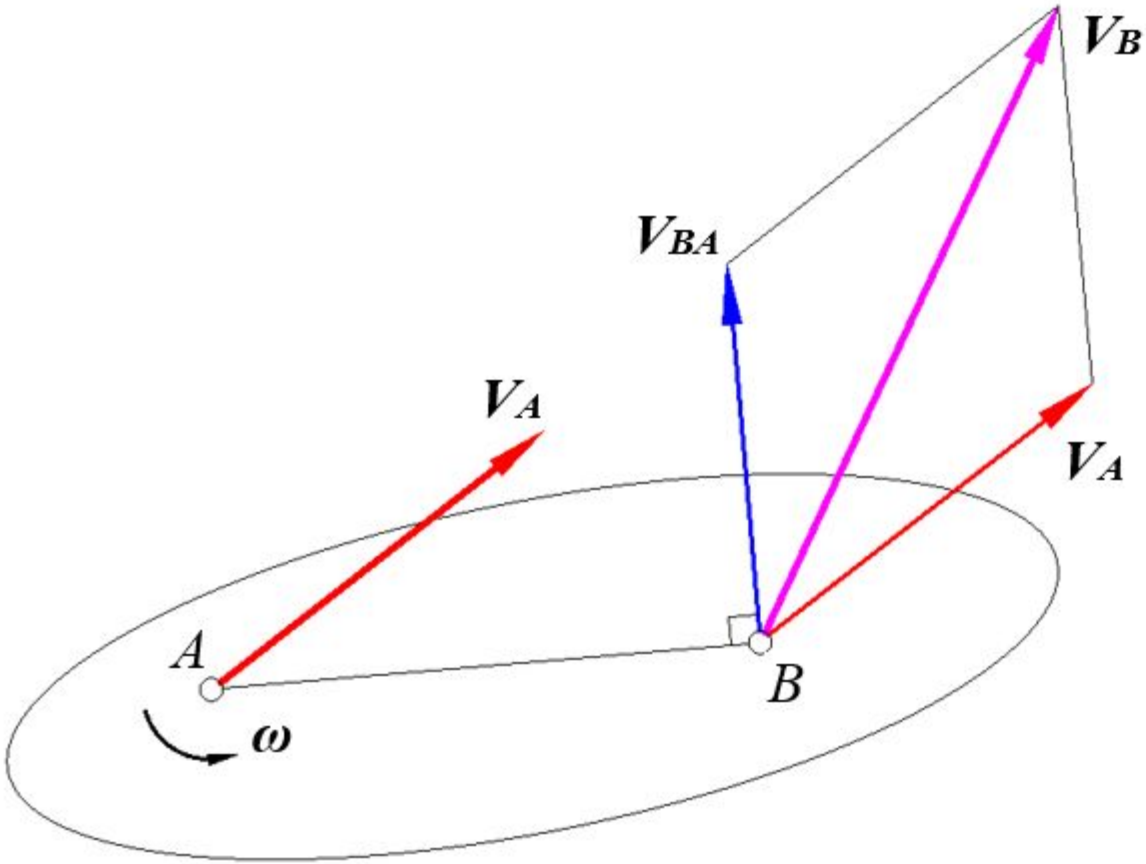
*Плоскопараллельное движение твердого тела слагается из **поступательного движения**, при котором все точки тела движутся так же, как полюс А, и из **вращательного движения** вокруг этого полюса*

Определение скоростей точек тела



$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{r};$$

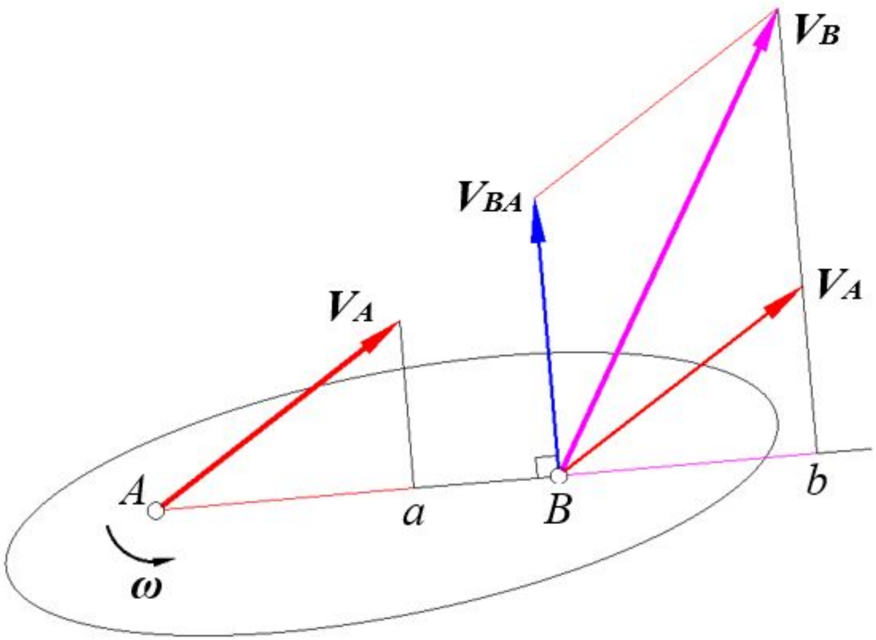
$$\overline{v}_B = \frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$



Скорость любой точки B тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости точки B в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

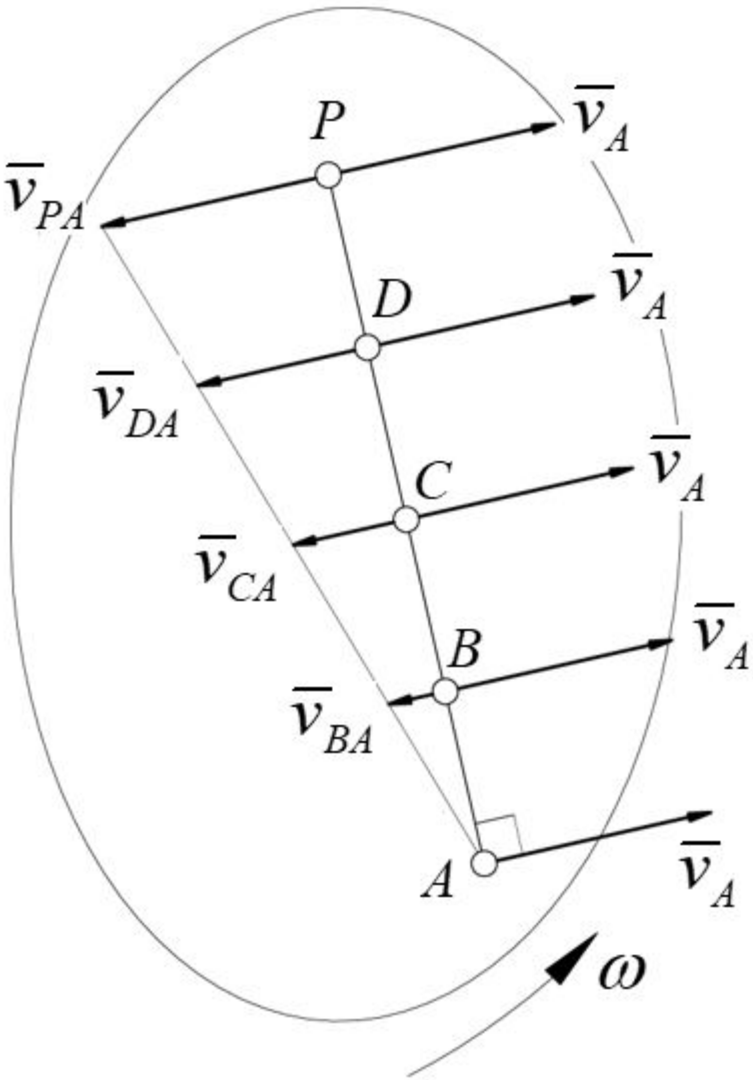
Теорема о проекциях скоростей двух точек тела



$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

$$\text{Так как } \overline{v}_{BA} \text{ перпендикулярен } AB,$$

$$\text{то } \ \text{Пр}_{AB}\overline{v}_B = \text{Пр}_{AB}\overline{v}_A$$



Мгновенным центром скоростей

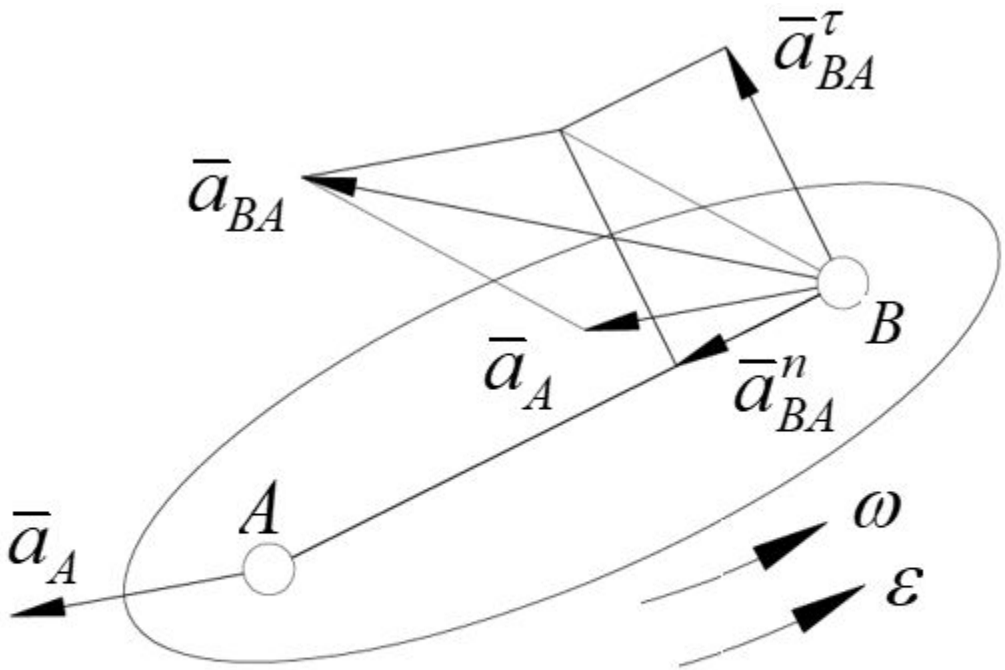
называется точка Р сечения S тела,

скорость которой в данный момент времени равна нулю

Определение ускорений точек тела

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA};$$

$$\overline{a}_B = {d\overline{v}_B}/{dt} = {d\overline{v}_A}/{dt} + {d\overline{v}_{BA}}/{dt}$$



$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau$$

$$\left|\overline{a}_{BA}^\tau\right| = \varepsilon \cdot BA \qquad \overline{a}_{BA}^\tau \perp BA$$

$$\left|\overline{a}_{BA}^n\right| = \omega^2 \cdot BA$$

$\overline{a}_{BA}^n \parallel BA$ *Направлен от B к A*

Сферическим называют движение тела относительно некоторой неподвижной точки

Сложное движение –
движение материальной точки
относительно какой-либо системы
отсчёта,
а та, в свою очередь,
движется относительно другой системы
отсчёта (СО)

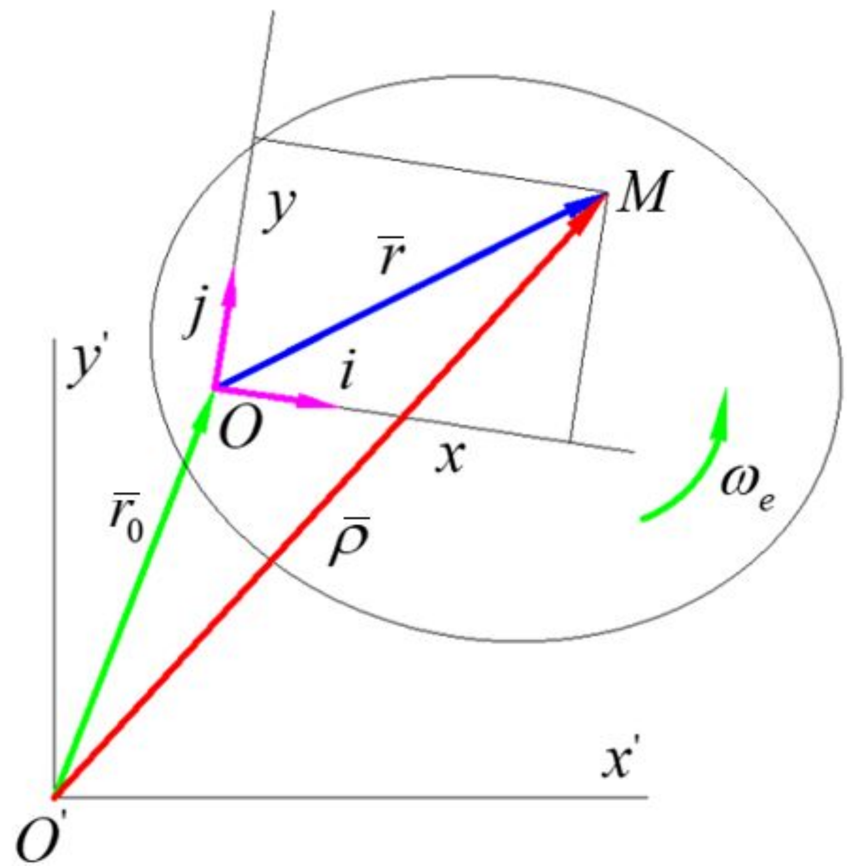
Одну из СО принимают за **базовую**
(«абсолютную», «лабораторную», «неподвижную»,
«СО неподвижного наблюдателя»),

другую называют «**подвижной**»
(«*СО подвижного наблюдателя*»,«*второй*»)

Абсолютное движение -
движение материальной точки/тела
в базовой системе отсчёта

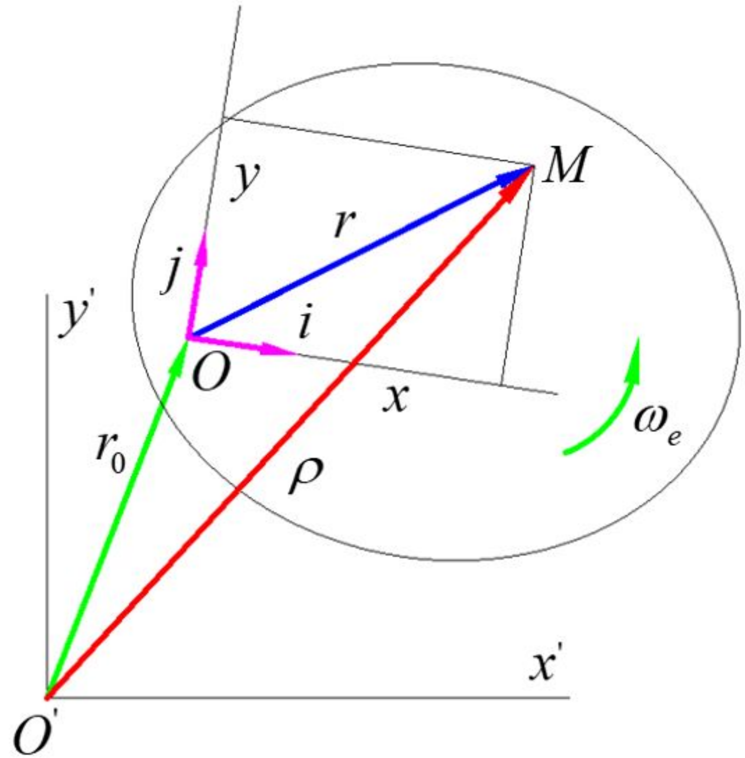
Относительное движение - движение материальной точки/тела относительно подвижной системы отсчёта

Переносное движение -
движение подвижной системы отсчета и
всех постоянно связанных с нею
точек пространства
относительно базовой системы отсчета



$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0 + \left(x\bar{i} + y\bar{j}\right); \ \bar{v}_M = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt};$$

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j}\right) + \left(\frac{d\bar{i}}{dt}x + \frac{d\bar{j}}{dt}y\right)$$



$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}x+\frac{d\bar{j}}{dt}y\right)=\left(\bar{\omega}_e\times\bar{i}\right)x+\left(\bar{\omega}_e\times\bar{j}\right)y=\bar{\omega}_e\times\left(\bar{i}x+\bar{j}y\right)=\bar{\omega}_e\times\bar{r};$$

$$\bar{v}_M=\frac{d\bar{r}_0}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\bar{i}+\frac{dy}{dt}\bar{j}\right)+\bar{\omega}_e\times\bar{r}=\bar{v}_O+\bar{v}_r+\bar{v}_e$$

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}x+\frac{d\bar{j}}{dt}y\right)=\left(\bar{\omega}_e\times\bar{i}\right)x+\left(\bar{\omega}_e\times\bar{j}\right)y=\bar{\omega}_e\times\left(\bar{i}x+\bar{j}y\right)=\bar{\omega}_e\times\bar{r};$$

$$\bar{v}_M=\frac{d\bar{r}_0}{dt}+\left(v_x\bar{i}+v_y\bar{j}\right)+\bar{\omega}_e\times\left(x\bar{i}+y\bar{j}\right);$$

$$\bar{a}_M=\frac{d\bar{v}_M}{dt}=\frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2}+\left(\frac{dv_x}{dt}\bar{i}+\frac{dv_y}{dt}\bar{j}\right)+\left(v_x\frac{d\bar{i}}{dt}+v_y\frac{d\bar{j}}{dt}\right)+\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times\frac{d\left(x\bar{i}+y\bar{j}\right)}{dt};$$

$$\left(v_x\frac{d\bar{i}}{dt}+v_y\frac{d\bar{j}}{dt}\right)=\left(v_x\left(\bar{\omega}_e\times\bar{i}\right)+v_y\left(\bar{\omega}_e\times\bar{j}\right)\right)=\bar{\omega}_e\times\left(v_x\bar{i}+v_y\bar{j}\right)=\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r$$

$$\bar{\omega}_e\times\frac{d\left(x\bar{i}+y\bar{j}\right)}{dt}=\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r+\bar{\omega}_e\times\left(\bar{\omega}_e\times\bar{r}\right);$$

$$\bar{a}_M=\frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2}+\left(\frac{dv_x}{dt}\bar{i}+\frac{dv_y}{dt}\bar{j}\right)+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times\left(\bar{\omega}_e\times\bar{r}\right)+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r=$$

$$=\frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2}+\left(\frac{dv_x}{dt}\bar{i}+\frac{dv_y}{dt}\bar{j}\right)+\left(\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times\left(\bar{\omega}_e\times\bar{r}\right)\right)+2\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r;$$

$$\bar{a}_{M} = \bar{a}_{Отн} + \bar{a}_{Пер} + \bar{a}_{Кор};$$

$$\bar{a}_{Отн} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j};$$

$$\bar{a}_{Пер} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{r}\right);$$

$$\bar{a}_{Кор} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$