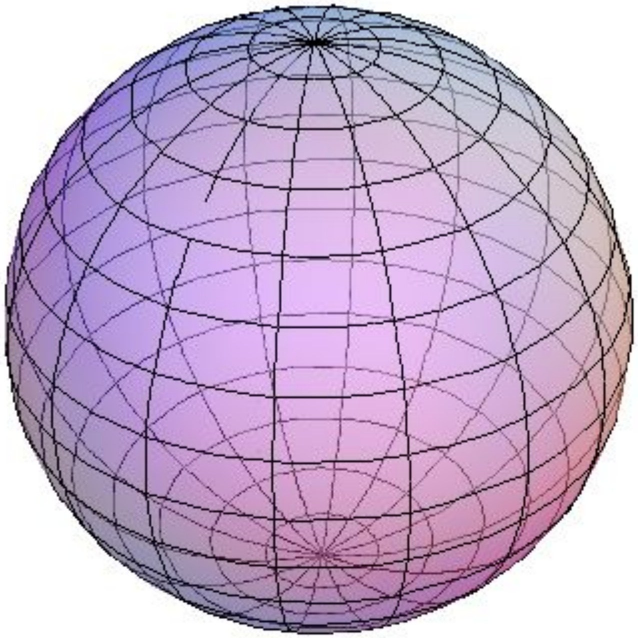
# Сфера и шар

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом.

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на расстояние, не превосходящее данное, называемое радиусом.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется поверхностью шара.

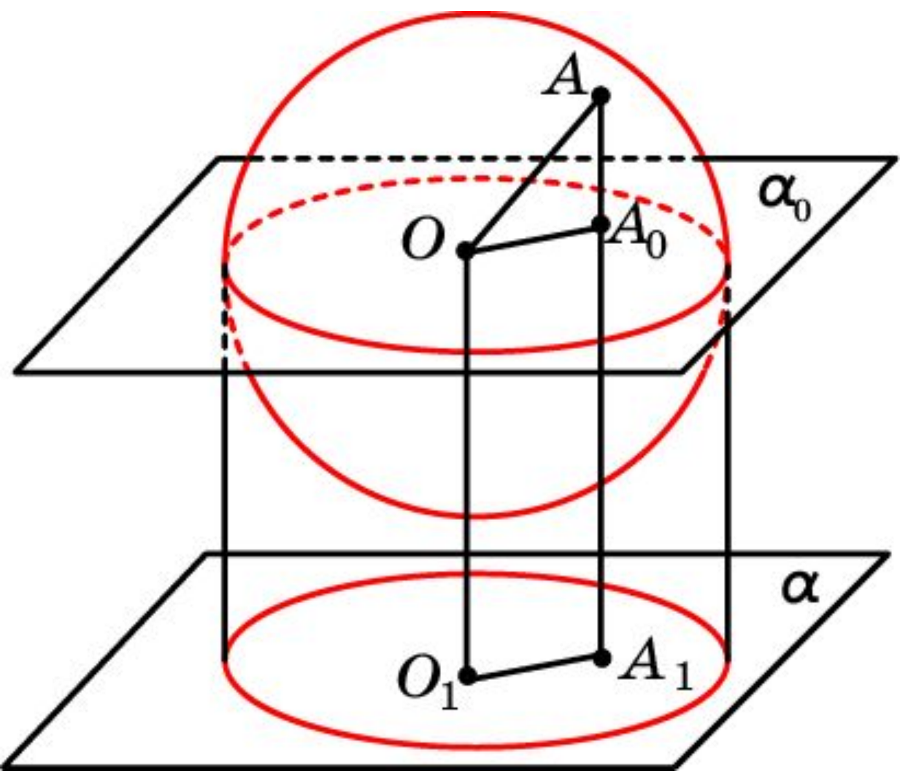


# Изображение сферы

Для изображения шара и сферы на плоскости используют ортогональную проекцию.

**Теорема.** Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

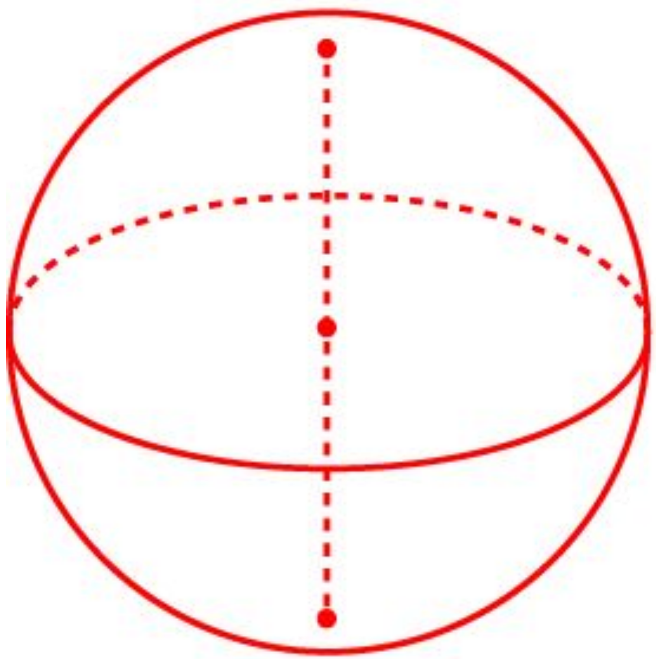
**Доказательство.** Проведем плоскость $\alpha_0$, проходящую через центр сферы $O$ и параллельную плоскости проектирования $\alpha$. Поскольку плоскости $\alpha$ и $\alpha_0$ параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны.

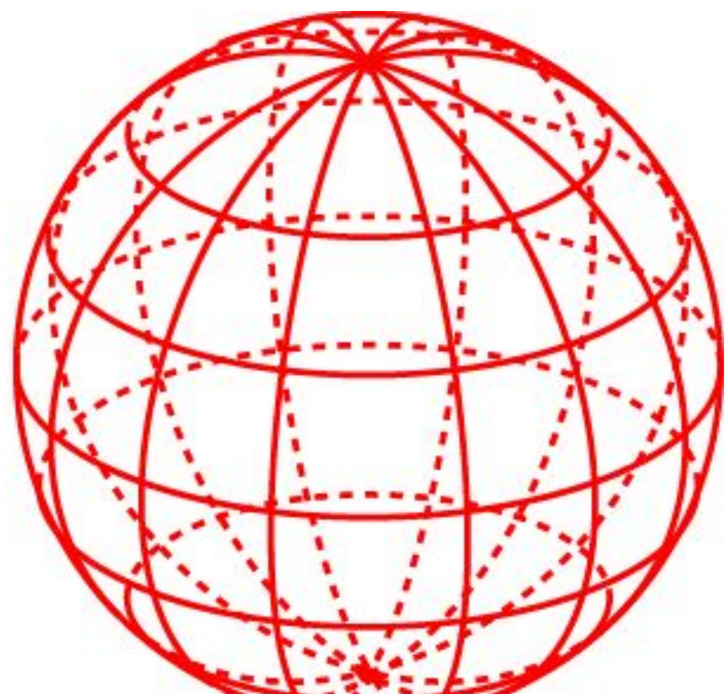



Сечением сферы плоскостью $\alpha_0$ является окружность радиуса $R$, равного радиусу сферы. Если $A$ точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и $A_0$ ее ортогональная проекция на плоскость $\alpha_0$, то $OA_0 < OA \;\; R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость $\alpha_0$ точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса.

# Изображение сферы

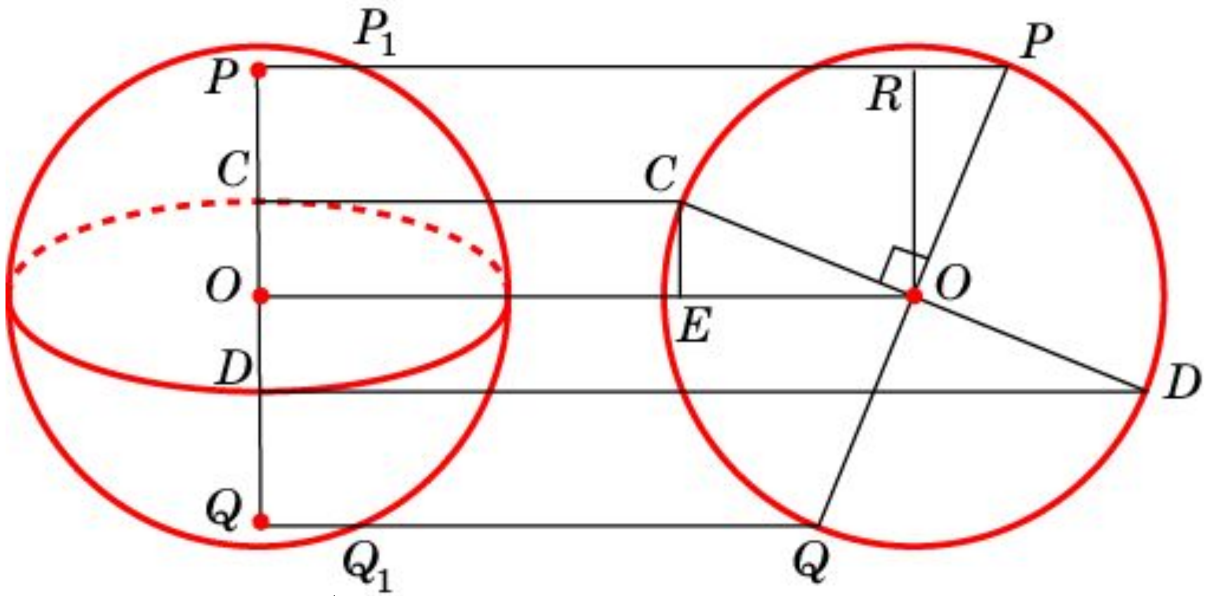
Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют большую окружность (экватор) – сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр и образующей острый угол с направлением проектирования. Изображением экватора будет эллипс. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости экватора называются параллелями. Они также изображаются эллипсами. Диаметр, перпендикулярный плоскости экватора называется осью, концы этого диаметра называются полюсами. Большие окружности, проходящие через полюсы называются меридианами. На рисунке изображена сфера с параллелями, меридианами и полюсами.





# Изображение сферы

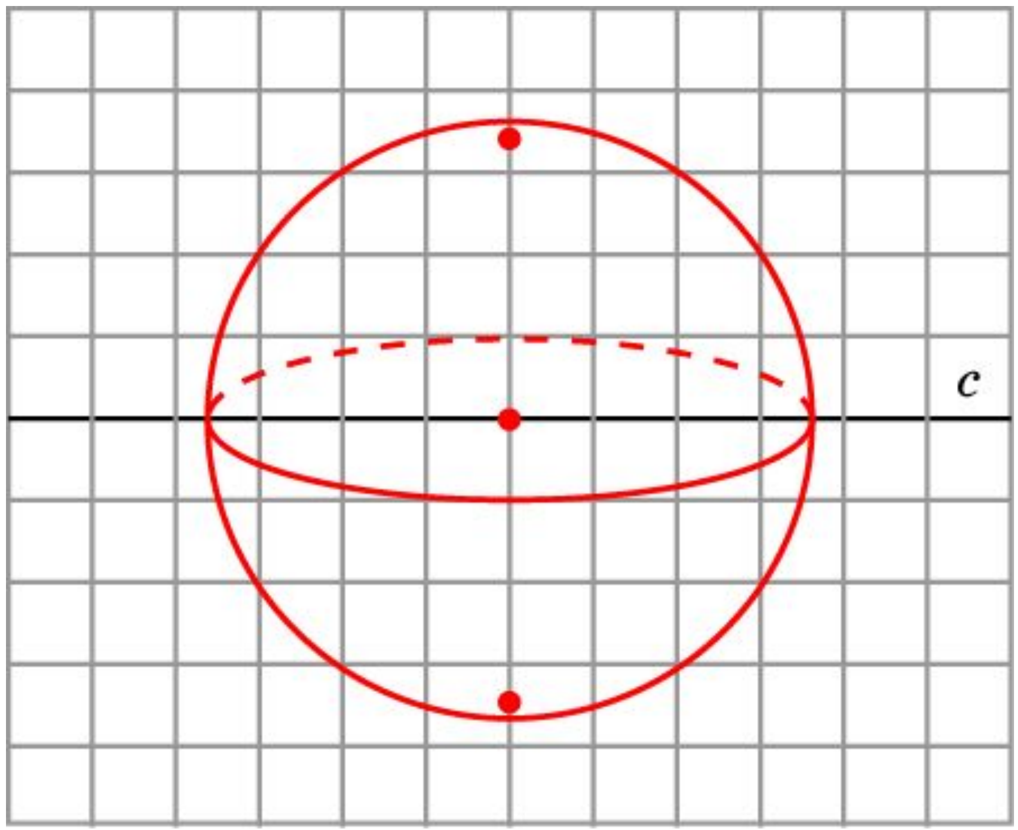
Для нахождения положения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди, и построим вид сферы слева, т.е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Экватор и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами $PQ$ и $CD$. Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.




На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов $P$ и $Q$ достаточно заметить, что прямоугольные треугольники $OPR$ и $OCE$ равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Но $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки $P$ и $Q$ выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

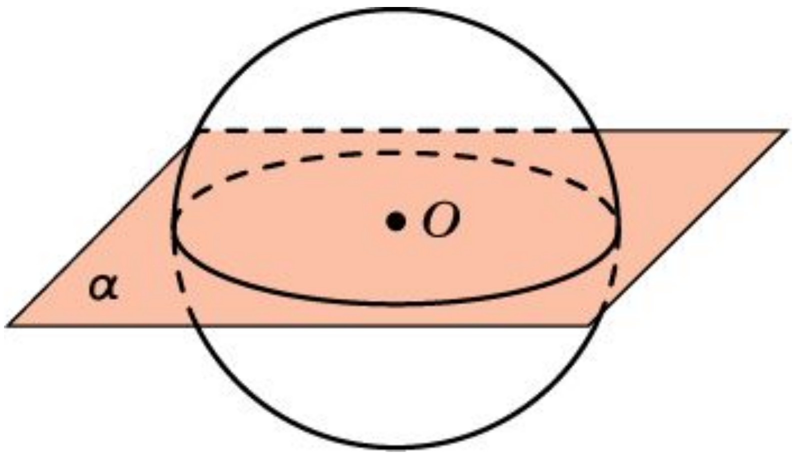
# Упражнение

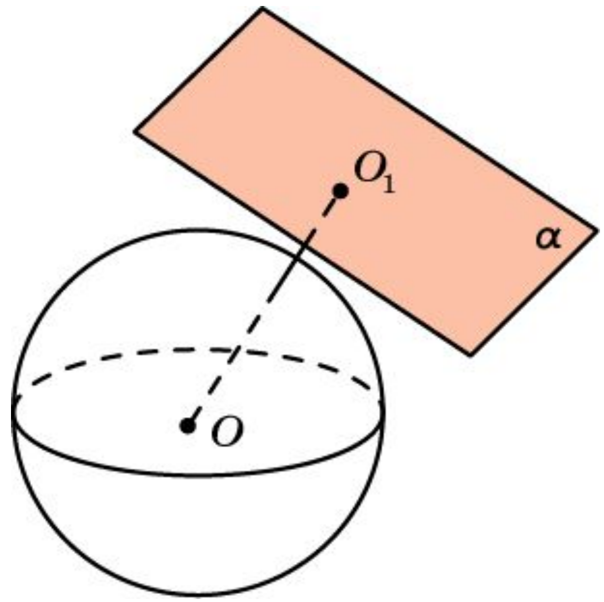
Нарисуйте экватор, полученный сжатием изображенной окружности в четыре раза в направлении, перпендикулярном прямой $c$. Отметьте полюса у полученного изображения сферы.



# Взаимное расположение сферы и плоскости

Если плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от точки $O$ на расстояние $R$, т.е. окружность радиуса $R$.

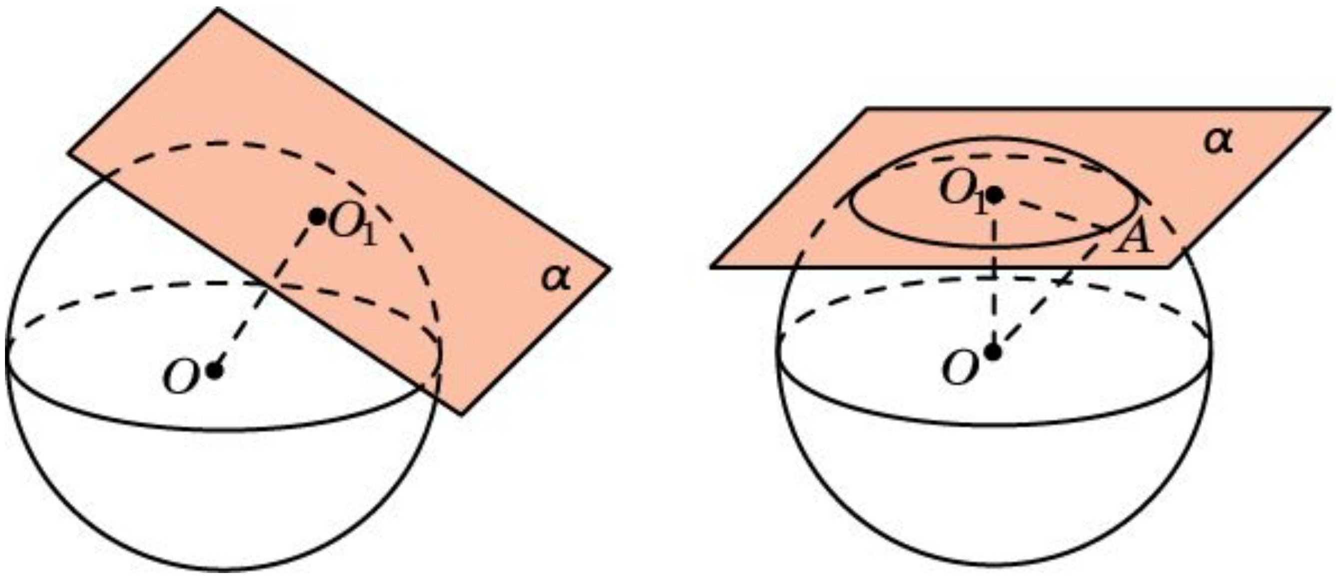



Если плоскость не проходит через центр $O$ сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр $OO_1$. При этом, если длина этого перпендикуляра больше $R$, то расстояние от точки $O$ до любой другой точки плоскости α и подавно больше $R$ и, следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек.

# Взаимное расположение сферы и плоскости

Если расстояние от точки $O$ до плоскости α равно $R$, то сфера и плоскость имеют единственную общую точку – $O_1$. В этом случае α является касательной плоскостью.

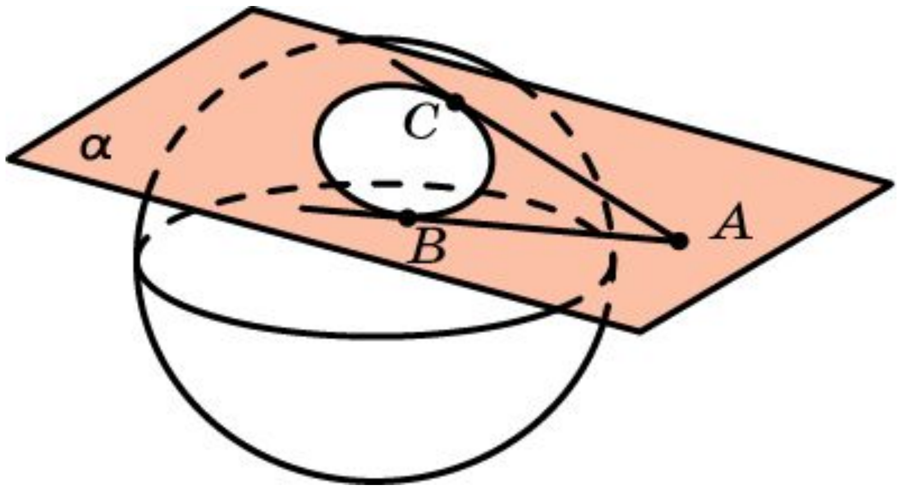



Если расстояние $d$ от точки $O$ до плоскости α меньше $R$, то в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром в точке $O_1$ и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

# Прямая касательная к сфере

Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной прямой.

Теорема. Все отрезки касательных прямых, проведенных из одной точки к данной сфере, равны между собой.




Доказательство. Пусть $AB$ и $AC$ – отрезки касательных к сфере, проведенных из точки $A$. Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки $A$, $B$ и $C$. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых $AB$ и $AC$ в точках $B$ и $C$ соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$.

# Упражнение 1

Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую ее плоскости?

Ответ: а) Бесконечно много; б) одну.

# Упражнение 2

Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?

Ответ: а) Бесконечно много; б) бесконечно много;

в) ни одной.

# Упражнение 3

Верно ли, что через любые две точки сферы проходит один большой круг?

Ответ: Нет.

# Упражнение 4

Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

Ответ: Диаметрально противоположные.

# Упражнение 5

Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

Ответ: Иметь общий центр.

# Упражнение 6

Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

Ответ: а) Если расстояние между центрами сфер больше суммы или меньше разностей их радиусов, то сферы не имеют общих точек;

б) если расстояние между центрами сфер равно сумме или разности их радиусов, то сферы касаются;

в) если расстояние между центрами сфер меньше суммы и больше разностей их радиусов, то сферы пересекаются.

# Упражнение 7

Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

Ответ: Окружностью.

# Упражнение 8

Радиусы двух сфер равны 5. Расстояние между их центрами равно 8. Найдите радиус окружности, по которой пересекаются эти сферы.

Ответ: 3.

# Упражнение 9

Шар радиуса 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Вычислите радиус круга, получившегося в сечении.

Ответ: 4 см.

# Упражнение 10

Через середину радиуса шара проведена плоскость перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении?

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

# Упражнение 11

Радиус шара $R$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\dfrac{\pi R^2}{4}$.

# Упражнение 12

Плоскость проходит через точку $A$ и касается сферы с центром $O$ и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

Ответ: 4 см.

# Упражнение 13

Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.

Ответ: 30 см.

# Упражнение 14

Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, принадлежащую сфере; в) через точку, лежащую вне сферы?

Ответ: а) Две; б) одну; в) бесконечно много

# Упражнение 15

Можно ли провести общую касательную плоскость к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?

Ответ: Да.

# Упражнение 16

Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух: а) параллельных плоскостей; б) пересекающихся плоскостей.

Ответ: а) Плоскость, параллельная данным;
б) две биссектральные плоскости без линии их пересечения.

# Упражнение 17

Сфера радиуса $R$ касается граней двугранного угла величиной φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.

Ответ: $\dfrac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

# Упражнение 18

Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

Ответ: а) Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса, то сфера и прямая не имеют общих точек;
б) если расстояние от центра сферы до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы;
в) если расстояние от центра сферы до прямой меньше радиуса, то сфера и прямая пересекаются.

# Упражнение 19

Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку: а) на сфере; б) вне сферы?

Ответ: а) Бесконечно много; б) бесконечно много.

# Упражнение 20

Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса $R$, которые касаются данной: а) прямой; б) плоскости; в) сферы?

Ответ: а) Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая;
б) две плоскости, параллельные данной плоскости;
в) две сферы или одна сфера, концентрические с данной сферой.