Неопределенный и определенный интеграл

Разработано преподавателем математики Проскуряковой И.С.

Цели и задачи урока:

1. Дать понятие неопределенного интеграла
2. Изучить основные свойства неопределенного интеграла
3. Научить находить неопределенный интеграл
4. Дать понятие определенного интеграла
5. Формула Ньютона-Лейбница
6. Изучить основные свойства определенного интеграла
7. Геометрический смысл определённого интеграла

Определение:

Функция ***F(x)*** **называется** **первообразной** **для функции** ***f(x)*** **на некотором промежутке, если для всех** ***x*** **из этого промежутка**

$$F'(x) = f(x)$$

Основное свойство первообразных

- Если F(x) – первообразная функции f(x), то и функция F(x)+C, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где C – произвольная постоянная

- Символ $\int$ - знак неопределенного интеграла, означает операцию интегрирования заданной функции, которая называется подынтегральной функцией
- $f(x)dx$ - подынтегральное выражение
- x - переменная интегрирования

Немного истории

- «Интеграл» - латинское слово integro «восстанавливать» или integer – «целый».

Одно из основных понятий математического анализа,

возникшее в связи потребностью измерять площади, объемы, отыскивать функции по их производным.

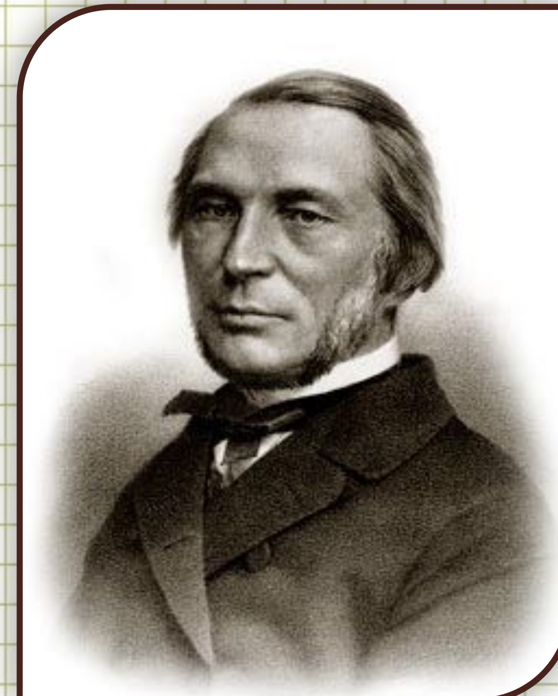
Впервые это слово употребил в печати шведский ученый Якоб Бернулли (1690 г.).

- Символ $\int$ был введен Лейбницем (1675г.).
- $\int$ Этот знак является изменением латинской буквы **S** – первой буквы слова **summa**.

В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики:

В.Я. Буняковский
(1804 – 1889)

М.В. Остроградский
(1801 – 1862)



П.Л. Чебышев
(1821 – 1894)

- Операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны и последовательное выполнение над некоторой функцией интегрирования и дифференцирования восстанавливает исходную функцию.

Свойства неопределенного интеграла

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = arctgx + C$.

Примеры:

1. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

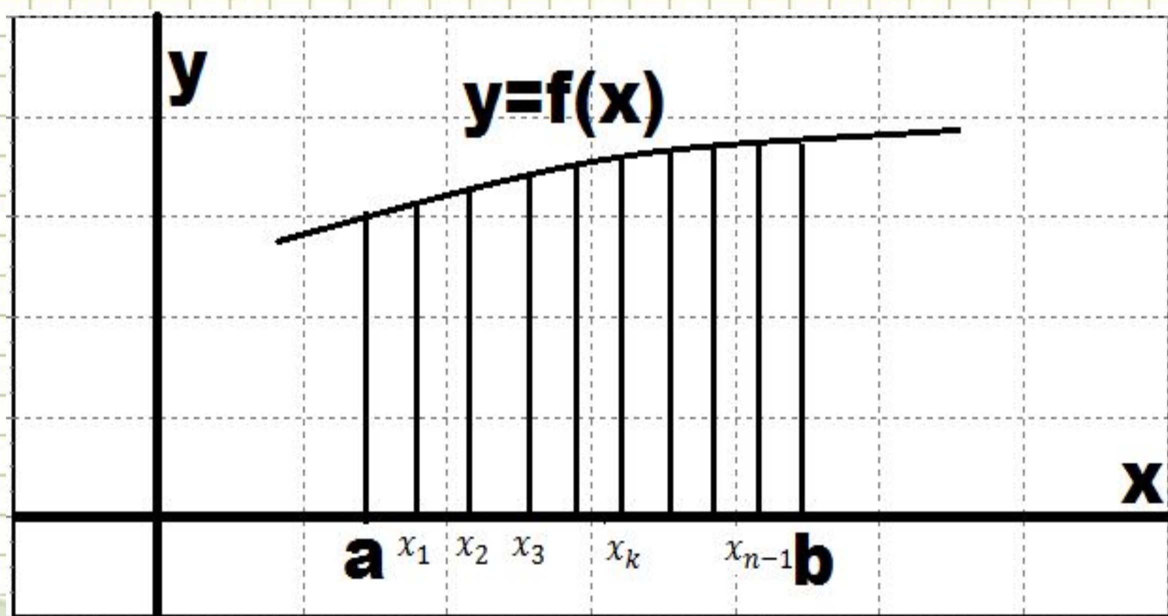
$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

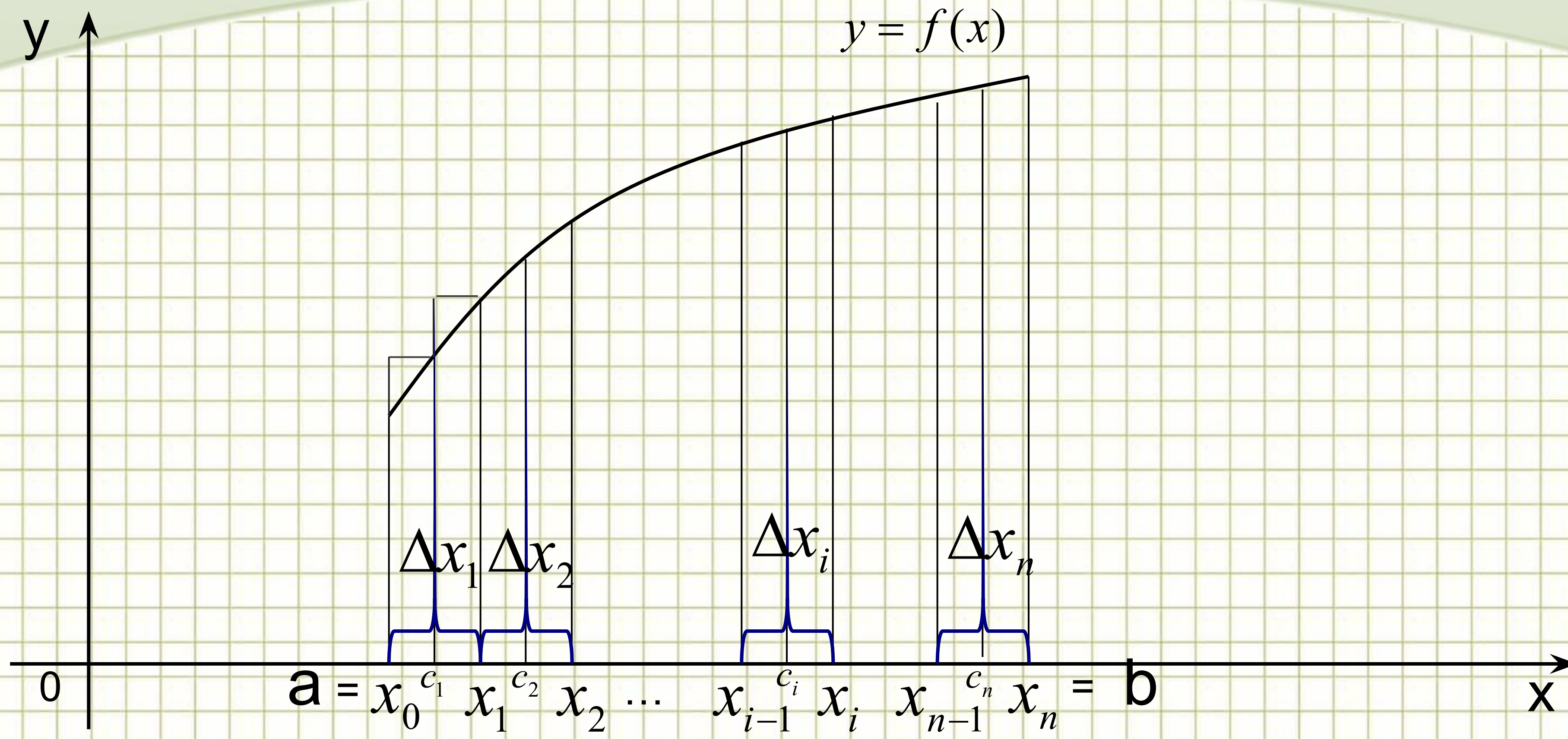
$$2.\int\frac{-5}{cos^2x}dx=-5\int\frac{1}{\cos^2x}dx=-5tgx+C$$

$$3.\int(2+3x)^5dx=\frac{1}{3}\frac{(2+3x)^6}{6}+C.$$

Определенный интеграл.

1. Давайте разобьем наш отрезок на n равных частей, отметим внутри отрезка [a;b] точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и через каждую точку проведем прямую параллельную оси ординат. Тогда наша фигура разобьется на n столбиков. Площадь трапеции будет равна сумме площадей столбиков.





В результате получим промежутки: $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$

2. На каждом Δx_i выберем произвольную точку c_i

3. Найдем $$\boxed{f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$$

формула интегральной суммы

__Опр__: Если при любом разбиении отрезка [a, b] на части и при любом выборе точек c_i на каждой части интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то его называют **__определенным интегралом__** и обозначают:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\Delta x_i}$$

Определенный интеграл.

Такой предел на самом деле существует, и для него было введено специальное обозначение и название – определенный интеграл. Важно! Определенный интеграл существует только в случае непрерывной или кусочно-непрерывной функции.

Определенный интеграл от непрерывной функции y=f(x) на отрезке [a;b] обозначается как

$$\int_a^b f(x)dx$$

Читается как определенный интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс.

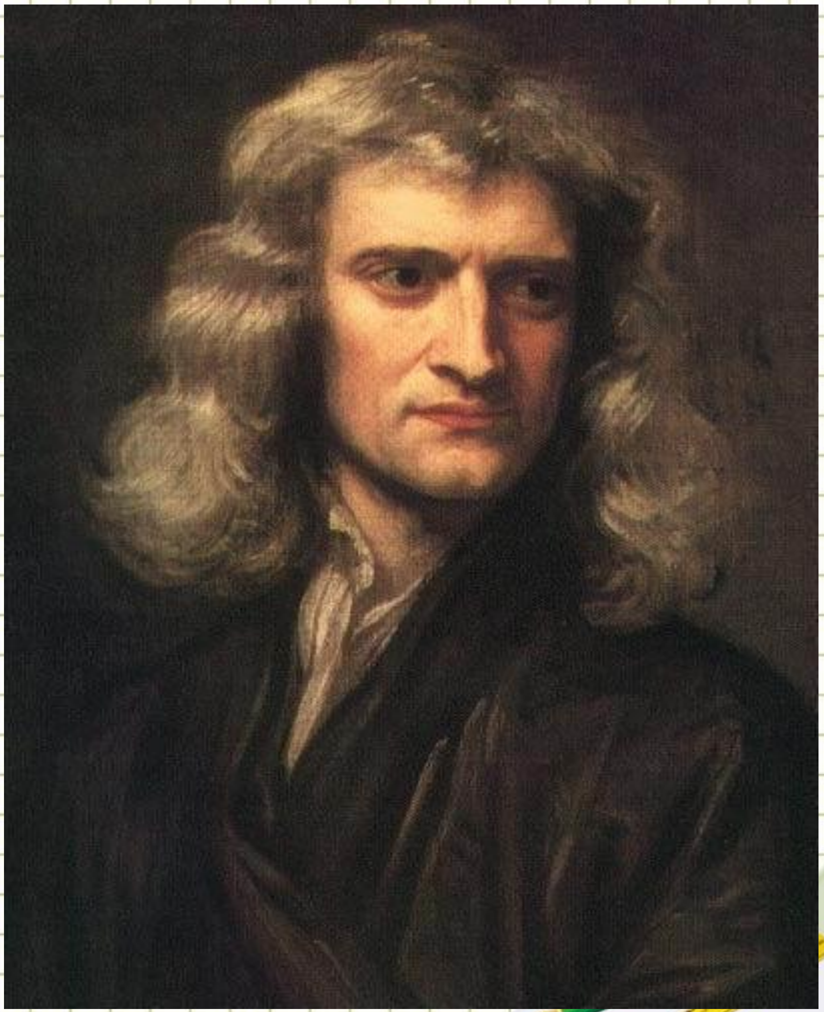
Числа a и b – пределы интегрирования. (Нижний и верхний пределы).

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], а функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

формула Ньютона-Лейбница

Немецкий философ и математик
1646-1716 гг.
Готфрид Лейбниц



Английский физик и математик
1643-1727 гг.
Исаак Ньютон

Основные свойства определенного интеграла

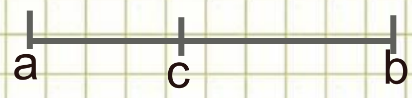
$$1.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2.\int_a^b dx = b - a$$

$$3.\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

$$4.\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



$$5.\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$6.\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Определенный интеграл.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^4 dx$$

Решение. Первообразной для x^4 служит $\frac{x^5}{5}$

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

Ответ: 31/5

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

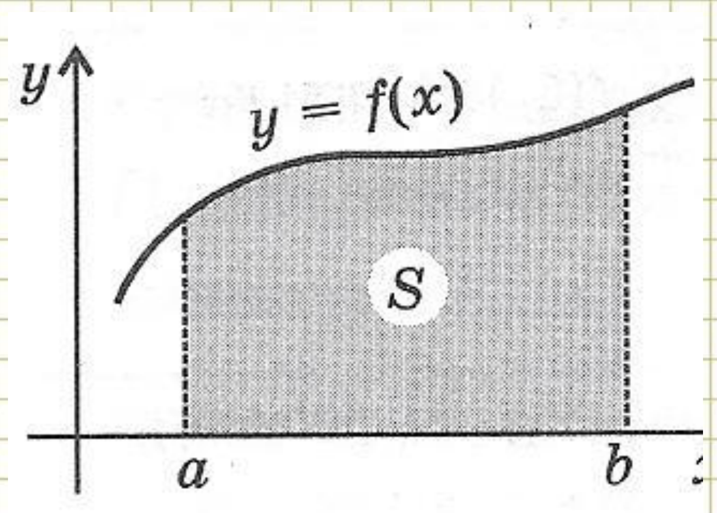
Пример:

$$\int_1^4 (x^3 + 2x)dx = \int_1^4 x^3 dx + \int_1^4 2x dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^4 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^4 + x^2\Big|_1^4 =$$

$$= (\frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4}) + (4^2 - 1^2) = (\frac{256}{4} - \frac{1}{4}) + (16 - 1) = \frac{255}{4} + 15 = 78{,}75$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



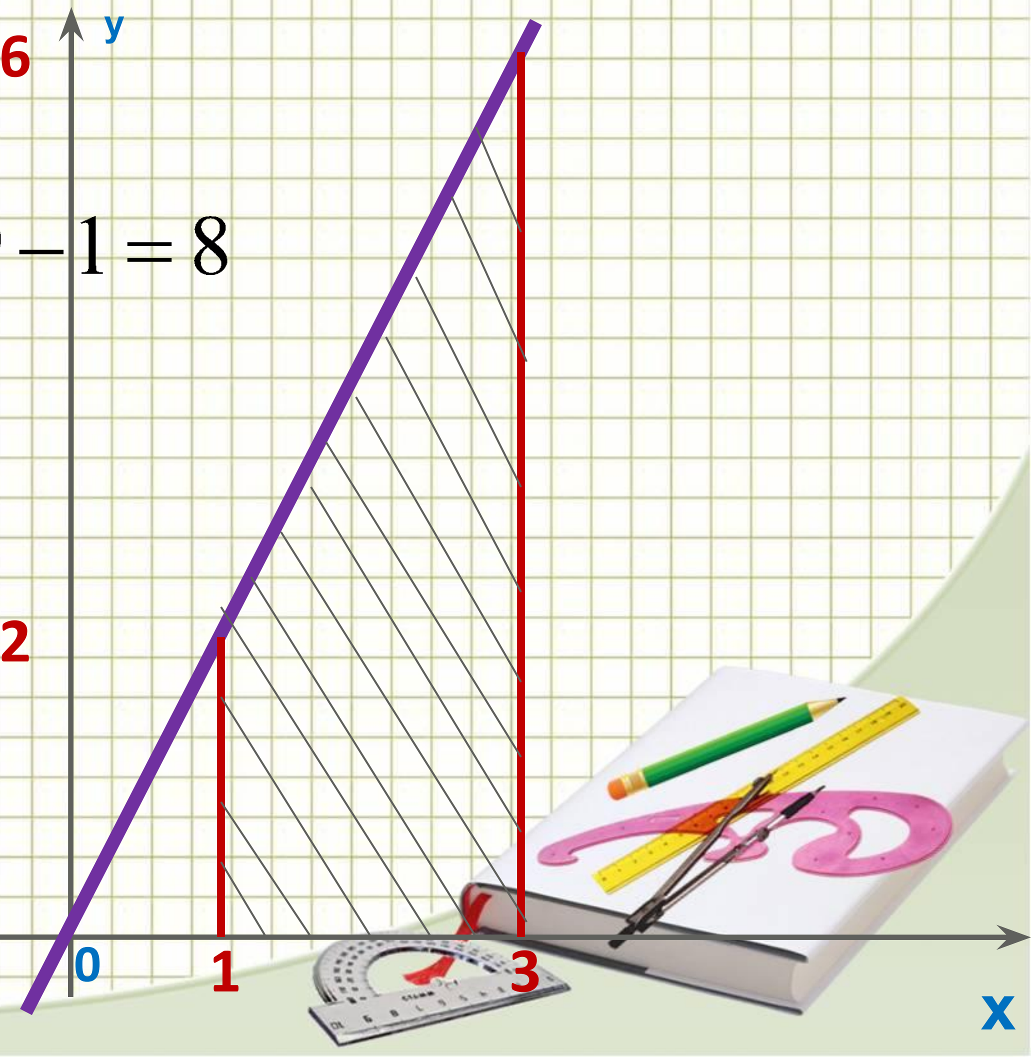
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Вычисление площадей

Пример. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x$, $x=1$, $x=3$.*

Решение.

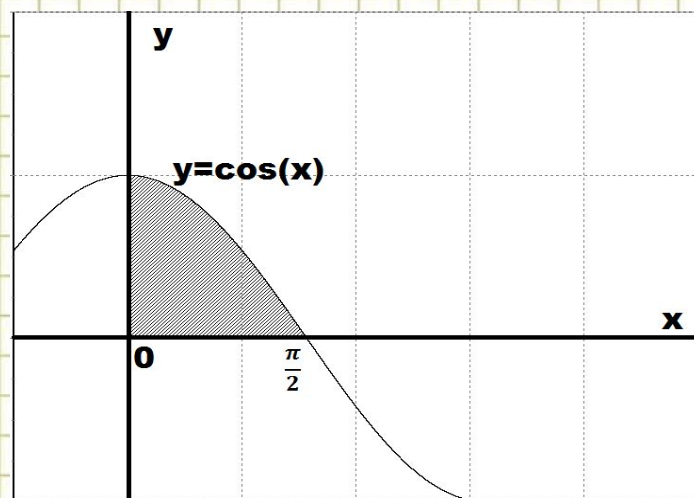
$$\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$



Ответ: 8 кв.ед.

Пример. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=cos(x) на отрезке [0;π/2].*

Решение. Давайте построим график косинуса на нашем отрезке



Площадь полученной фигуры вычисляется с помощью определенного интеграла, где a=0, b= π/2, f(x)=cos(x)

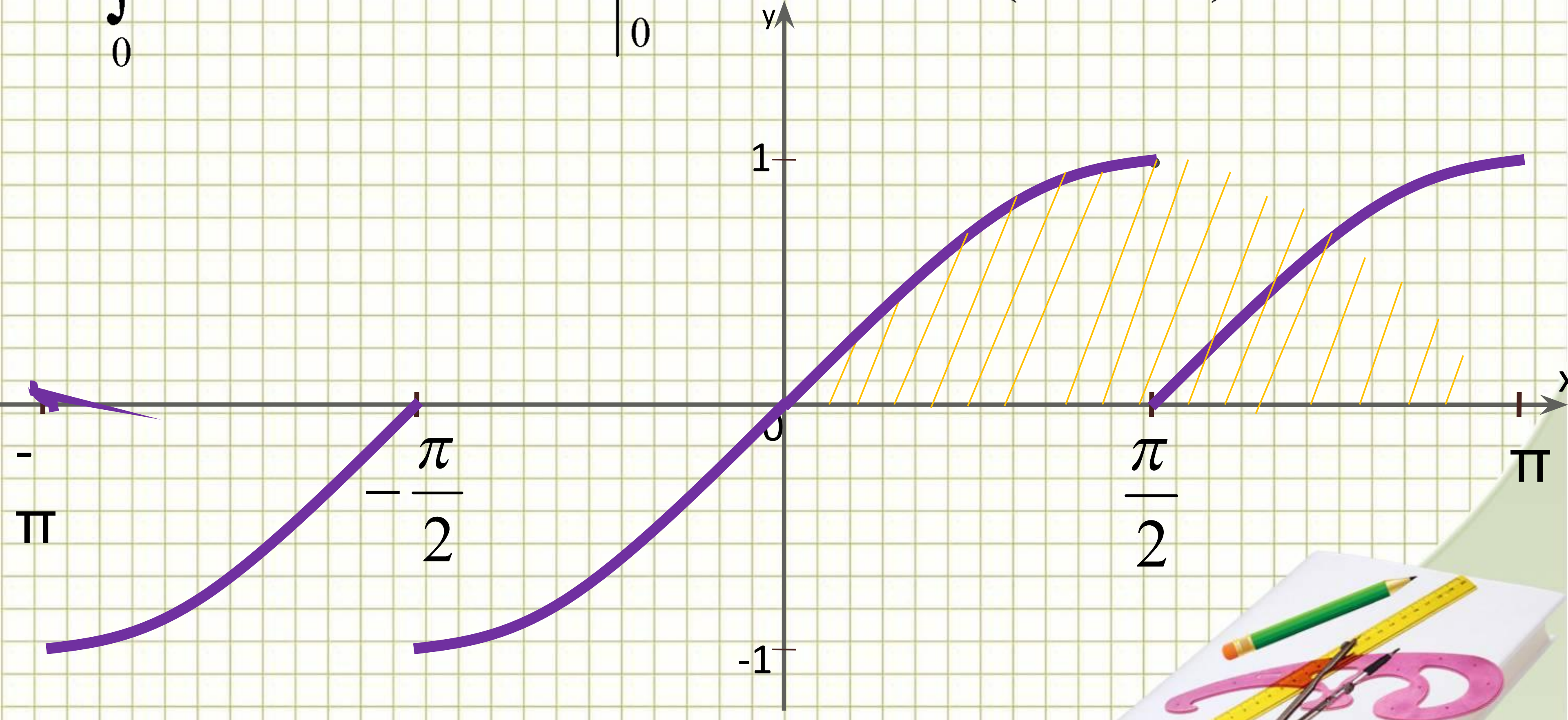
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)d(x) = \sin(x)\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

Ответ: 1

Пример. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=$\sin x$ на отрезке [0;π].*

Решение.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$



Ответ: 2 кв.ед

Домашнее задание:

1. $\int 5x\,dx$
2. $\int (4-x^5)dx$
3. $\int x^7 dx$
4. $\int (3x^{-4}+8x^{-5})dx.$
5. $\int (3^x-e^x-1)dx$
6. $\int \frac{(2+x)}{x}dx$
7. $\int \frac{x-4}{x^3}dx$
8. $\int (6-3\sin x)dx$
9. $\int (1+\cos x)dx$

10.Вычислить определенный интеграл

$$\int_{2}^{4} 8 \cdot x^3 \, dx$$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной функцией y=sin(x) на отрезке [2 π;3π].

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3; y = 0; x = 0; x = 2$$