Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
«Громыкская средняя общеобразовательная школа»

Алгебра и начала анализа *10 класс*

Решение одного тригонометрического уравнения несколькими способами

Человеку, изучающему алгебру часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три – четыре различные задачи. Решая одну задачу различными способами , можно путем сравнивания выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. У. Сойер

/**английский математик и педагог XX века**/

Восемь способов решения одного тригонометрического уравнения.

1.Приведение уравнения к однородному.

2.Разложение левой части уравнения на множители.

3.Введение вспомогательного угла.

4.Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

5.Приведение к квадратному уравнению.

6.Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

7.Универсальная подстановка.

8.Графическое решение.

Задача. ***Решите уравнение различными способами:*** **$\sin x - \cos x = 1$.**

?

Способ первый. *Приведение уравнения к однородному.*

$\sin x - \cos x = 1$

$\sin x = 2\sin x/2 \cos x/2$,
$\cos x = \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2$,
$1 = \sin^2 x/2 + \cos^2 x/2$.

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$ или 2) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

1) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$

$x = \pi + 2\pi k$

Это однородное уравнение первой степени. Делим обе части этого уравнения на

$\cos\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ т.к., если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то $\sin\frac{x}{2} - 0 = 0$,

что противоречит тождеству $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$.

Получим: $tg\frac{x}{2} - 1 = 0$

$tg\frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Способ второй. *Разложение левой части уравнения на множители:* **Sin x – cos x = 1**

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2};\qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) = 0$$

Далее так, как в первом способе.

Способ третий. *Введение вспомогательного угла.* $\sin x - \cos x = 1$

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\sin x\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

В левой части вынесем $\sqrt{2}$ - корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при **sin x** и **cos x**.

$$\sin x\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \pi/4 = \cos \pi/4$$

$$\sin x\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha - \beta)$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \qquad k \in Z.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\quad k \in Z.$

Внимание! Эквивалентны ли результаты , полученные в рассмотренных способах решений данного уравнения **$\sin x - \cos x = 1$?**

Покажем однозначность ответов.

1 –й способ

$x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

x: $\pi/2$; $5\pi/2$; $9\pi/2$; $-3\pi/2$; $-7\pi/2$;…

$x = \pi + 2$ n, b Z

x = π; 3π; 5π; $-\pi$; -3π;…

2-й способ

$x = \pi/4 + (-1)\ \pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

x: $\pi/2$; π; $5\pi/2$; 3π; $9\pi/2$; $-\pi$; $-3\pi/2$; -3π; $-7\pi/2$…

Способ четвертый. ***Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.*** ***$\sin x - \cos x = 1$***

$\cos x = \sin(\pi / 2 - x)$

Запишем уравнение в виде:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Применим формулу разности двух синусов.

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Далее так, как в третьем способе.

Способ пятый. ***Приведение к квадратному уравнению относительно одной функции*.**

sin x - cos x = 1

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x = 1$$

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x$$

Возведем в квадрат: $1-\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\cos x = 0,\qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или

$\cos x + 1 = 0, \cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Внимание! При решении уравнения обе части уравнения возводились в квадрат, что могло привести к появлению посторонних решений, поэтому необходима проверка.

Сделаем проверку.

Полученные решения эквивалентны объединению трёх решений

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z \\ x=\pi+2\pi n, n\in Z \\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \end{array}\right.$$

Первое и второе решение совпадают с ранее полученными, поэтому не являются посторонними. Проверять не будем.

Проверим: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$.

Левая часть: $\sin(-\frac{\pi}{2}+2\pi m)-\cos(-\frac{\pi}{2}+2\pi m)=\sin(-\frac{\pi}{2})-\cos(-\frac{\pi}{2})=-1-0=-1$,

а правая часть уравнения равна **1**, следовательно это решение является посторонним.

Ответ: $x=\pi+2\pi k, \quad k\in Z$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in Z$

Способ шестой.*Возведение обеих частей уравнения в квадрат.* **$\sin x - \cos x = 1$**

$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1,$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 - 2\sin x \cos x = 1,$

$2\sin x \cos x = 0,$

$\sin x = 0$ или $\cos x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$ $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z,\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ седьмой. *Универсальная подстановка (выражение sin x и cos x через tg x/2).*

sin x – cos x =1

Выражение всех функций через tg x (универсальная подстановка) по формулам:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

Sin x –cosx = 1

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

$1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0$, т.к. $tg^2\frac{x}{2} \geq 0$.

Умножим обе части уравнения на $1+tg^2\frac{x}{2}$.

Внимание! Могли потерять корни.Необходима проверка!

Область допустимых значений первоначального уравнения - всё множество R . При переходе к tg x/2 из рассмотрения выпали значения x, при которых tg x/2 не имеет смысла, т.е.$x = \pi + \pi n$, где $n \in Z$.

Следует проверить , не является ли

$x = \pi + \pi n$, где $n \in Z$ решением данного уравнения.

Левая часть $\sin(\pi - 2\pi k) - \cos(\pi + 2\pi k) = \sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1$ и правая часть равна единице. Значит, $x = \pi + \pi n$,где $n \in Z$ является решением данного уравнения.

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z,\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ восьмой. ***Графический способ решения.***

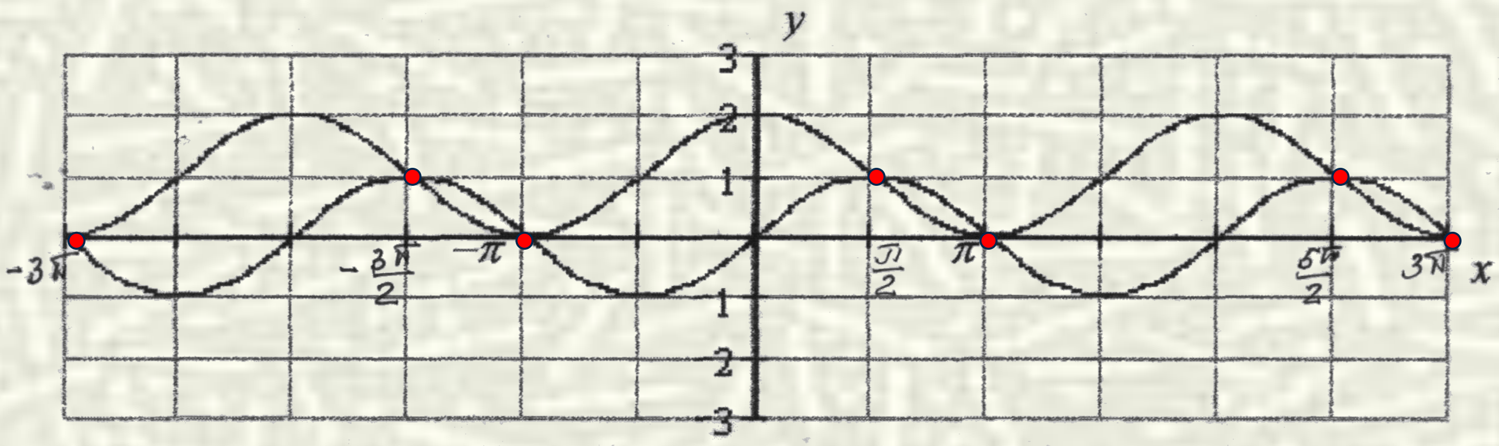
$\sin x - \cos x = 1$

$\sin x = \cos x + 1$

На одном и том же чертеже построим графики функций, соответствующих левой и правой части уравнения. Абсциссы точек пересечения графиков являются решением данного уравнения,

$y = \sin x$ - график синусоида.

$y = \cos x + 1$ – синусоида, смещённая на единицу вверх.



Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Проверь себя !

Решите самостоятельно, применяя разные способы решения одного и того же тригонометрического уравнения:

1. $\sin 2x + \cos x = 0$;
2. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$
3. $\sin 6x + \sin 3x = 0$;
4. $\sin 2x + \cos 2x = 1$;
5. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$.

$\sin 2x + \cos x = 0$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, тогда $2\sin x\cos x + \cos x = 0$,

$\cos x(\ 2\sin x + 1\ ) = 0$,

$\cos x = 0$ или $2\sin x + 1 = 0$,

$x = \pi/2 + \pi n;\ n \in Z$; $\sin x = -1/2$

$x = (-1)^{k+1}\ \pi/6 + k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n$, ; $x = (-1)^{k+1}\ \pi/6 + \pi k$, где $n \in Z$, $k \in Z$.

Способ: **разложение левой части уравнения на множители** (2-й способ).

$\sin 2x + \cos x = 0$

$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, *тогда :*

$\sin 2x + \sin(\pi/2 - x) = 0,$

$2\sin(x/2 + \pi/4)\cos(3x/2 - \pi/4) = 0.$

$\sin(x/2 + \pi/4) = 0$ *или* $\cos(3x/2 - \pi/4) = 0,$

$x/2 + \pi/4 = \pi n$ $\quad$ $3x/2 - \pi/4 = \pi/2 + \pi n$

$x = -\pi/2 + 2\pi n$ $\quad$ $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, $n \quad Z$

Ответ : $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, $n \quad Z$.

Способ : ***преобразование суммы тригонометрических функций в произведение*** **(4 –й способ) .**

Сравним результаты двух способов решения уравнения $\sin 2x + \cos x = 0$

2 –й способ:

1) $x = \pi/2 + \pi n;\ n \in Z,$

$n = 0,\ x = \pi/2$ (т. A),

$n = 1,\ x = 3\pi/2$ (т. B),

$n = -1,\ x = -\pi/2$ (т. B),

$n = 2,\ x = \pi/2 + 2\pi$ (т.A)

2) $x = (-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k;\ k \in Z,$

$k = 0,\ x = -\pi/6$ (т.C),

$k = 1,\ x = \pi/6 + \pi$ (т.D),

$k = -1,\ x = \pi/6 - \pi$ (т .D),

$k = 2,\ x = -\pi/6 + 2\pi$ (т.C)

4-способ:

1) $x = -\pi/2 + \pi n,\ n \in Z,$

$n = 0,\ x = -\pi/2$, (т .B),

$n = 1,\ x = -\pi/2 + 2\pi$, (т .B),

$n = -1,\ x = -\pi/2 - 2\pi$, (т. B),

$n = 2,\ x = -\pi/2 + 4\pi$, (т .B).

2) $x = \pi/2 + 2\pi n/3,\ n\ \ Z.$

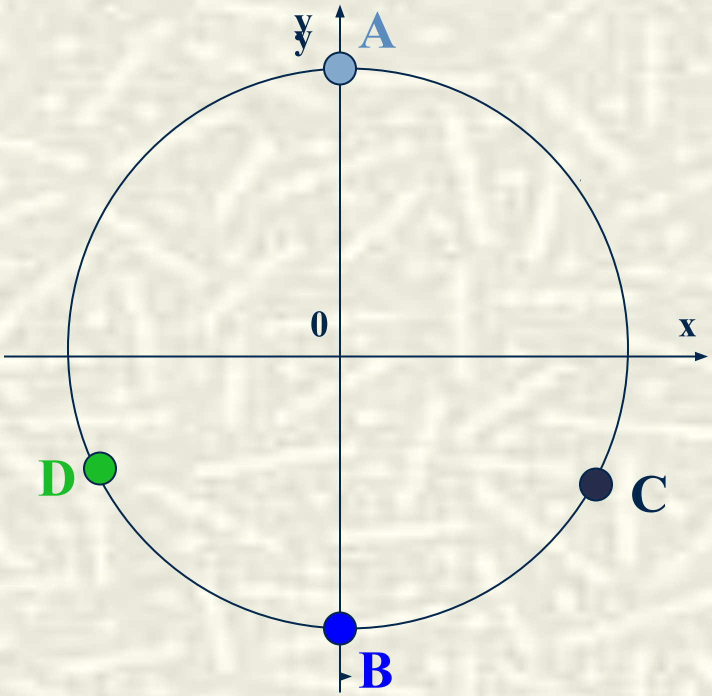
$n = 0,\ x = \pi/2$ (т.A),

$n = 1,\ x = 7\pi/6$ (т. D),

$n = -1,\ x = -\pi/6$ (т. A),

$n = 2,\ x = 11/6$ (т.C),…

Графическая иллюстрация этих решений на тригонометрическом круге



Вывод : при обоих способах решений данного уравнения результаты одни и те же.

$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$

$\cos x \neq 0$ в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Разделим обе части уравнения на $\cos x$.

$\sqrt{3}\, tg\, x = 1, \quad tg\, x = 1/\sqrt{3}$,

$x = \pi/6 + n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$.

Способ :решение однородного уравнения (1-й способ).

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$, *разделим обе части уравнения на 2.*

$\sqrt{3}/2 \sin x - ½\cos x = 0$,

$\sin x \cos \pi/6 - \cos x \sin \pi/6 = 0$,

$\sin(x - \pi/6) = 0$,

$x - \pi/6 = \pi n,\ n \in Z$,

$x = \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ : $x = \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.

Способ: ***введение вспомогательного угла*** *(3 –й способ).*

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$, *возведем обе части уравнения в квадрат.*

$3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$, *разделим обе части уравнения на* $\cos^2 x \neq 0$.

$3\,tg^2 x - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 1 = 0$

$D = 0, \quad tg\,x = \sqrt{3}/3;$

$x = \pi/6 + \pi n, \; n \in Z.$

Ответ $: x = \pi/6 + \pi n, \; n \in Z.$

Способ :*возведение обеих частей уравнения в квадрат* (6-й способ).

$\sqrt{3}\ \sin x - \cos x = 0$

$\sqrt{3}\ \sin x - \cos x = 0,$

$\sin x = \dfrac{2\,tg\, x/2}{1 + tg^2\, x/2}$, $\cos x = \dfrac{1 - tg^2\, x/2}{1 + tg^2\, x/2}$,

$$\frac{\sqrt{3}\ 2\,tg\, x/2}{1 + tg^2\, x/2} - \frac{1 - tg^2\, x/2}{1 + tg^2\, x/2} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}\ 2\,tg\, x/2 - 1 + tg^2\, x/2}{1 + tg^2\, x/2} = 0, \quad 1 + tg^2\, x/2 \neq 0,$$

$tg^2\, x/2 + 2\sqrt{3}\ tg\, x/2 - 1 = 0, \quad tg\, x/2 = m$

$m^2 + 2\sqrt{3}\ m - 1 = 0,\ D = 0,\ m_1 = -\sqrt{3} - 2,\ m_2 = -\sqrt{3} + 2,$

1) $tg\, x = -\sqrt{3} - 2,$

$$\sin x = \frac{2(-\sqrt{3} - 2)}{1 + (-\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{-2(\sqrt{3} + 2)}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{-2(\sqrt{3} + 2)}{4(2 + \sqrt{3})} = -\frac{1}{2},$$

$\sin x = -1/2,$ $x = (-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k,\ k \in Z;$

2) $tg\, x = -\sqrt{3} + 2,$

$$\sin x = \frac{2(-\sqrt{3} + 2)}{1 + (-\sqrt{3} + 2)^2} = \frac{-2(\sqrt{3} - 2)}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{-2(\sqrt{3} - 2)}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2},$$

$\sin x = 1/2,$ $x = (-1)^{k}\pi/6 + \pi k,\ k \in Z.$

Примечание:решения можно объединить: $x = (-1)^{k}\pi/6 + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^{k}\pi/6 + \pi k,\ k \in Z.$

Способ: ***универсальная подстановка*** ***(7 –й способ).***

$\sin 6x + \sin 3x = 0$

$\sin 6x + \sin 3x = 0$,

$2 \sin 3x \cos 3x + \sin 3x = 0$,

$\sin 3x\,(2 \cos 3x + 1) = 0$,

$\sin 3x = 0$, $2 \cos 3x + 1 = 0$,

$3x = \pi n,\ n \in Z$, $\cos 3x = -½$,

$x = \pi n/3,\ n \in Z$, $x = \pm 2\pi/9 + 2\pi n/3,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \pi n/3,\ n \in Z$; $x = \pm 2\pi/9 + 2\pi n/3,\ n \in Z$.

Способ: ***разложение левой части уравнения на множители*** **(2 способ).**

$\sin 6x + \sin 3x = 0$

$\sin 6x + \sin 3x = 0,$

$2\sin 9x/2 \cos 3x/2 = 0\ ,$

$\sin 9x/2=0\ ,$ $\cos 3x\ /2 = 0,$

$9x/2 = \pi\ n,\ n \notin Z,$ $3x\ /2 = \pi\ /2 + \pi\ n,\ n \notin\ Z,$

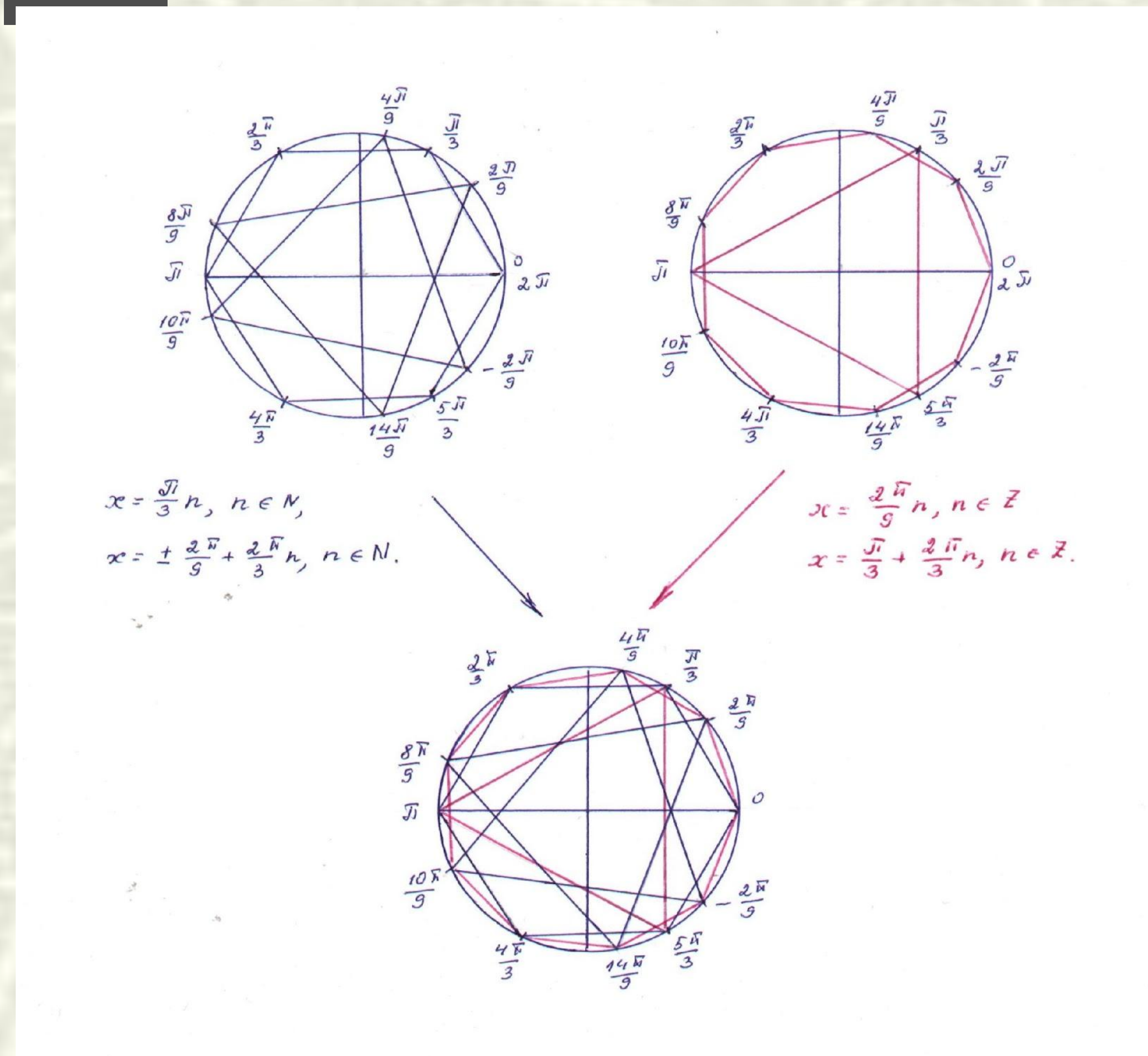
$x = 2\ \pi\ n/9,\ n \notin Z;$ $x = \pi\ /3 + 2\ \pi\ n/3,\ n \notin Z\ .$

Ответ: $x = 2\ \pi\ n/9,\ n \notin Z;$

$x = \pi\ /3 + 2\ \pi\ n/3,\ n \notin Z.$

Способ: ***преобразование тригонометрических функций в произведение*** ***(4-й способ).***

Сравним решения уравнения ***sin6x+ sin3x =0****,* *полученные разными способами.*



Вывод: результаты решения данного уравнения разными способами совпадают

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$

$2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0,$

$2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0,$

$\sin x = 0,$ $\qquad$ $\cos x - \sin x = 0,$

$x = \pi n,\ n \in Z,$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x = 1,$

$x = \pi /4 + n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pi n,\ n \in Z,\ x = \pi /4 + n,\ n \in Z.$

Способ: **Приведение уравнения к однородному**.(1-й способ).

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\sin 2x + \cos 2x = 1,$

$\sin 2x - (1 - \cos 2x) = 1,$

$2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x/2 = 0,$

Далее так, как первым способом (кадр № 27).

Способ: ***разложение левой части уравнения на множители*** *(2 – й способ).*

$\sin 2x + \cos\ 2x = 1$

$\sin 2x + \cos\ 2x = 1,$

$\sin 2x + \sin(\pi/2 - 2x) = 1,$

$2\sin \pi/4 \cos(2x - \pi/4) = 1,$ $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2},$

$\sqrt{2} \cos(2x - \pi/4) = 1$ $\text{arksin}\,(1/\sqrt{2}) = \pi/4.$

$\cos(2x - \pi/4) = 1/\sqrt{2},$

$2x - \pi/4 = \pm\text{arkcos}\,(1/\sqrt{2}) + 2\pi n,\ n \in Z,$

$2x = \pi/4 \pm \text{arkcos}(1/\sqrt{2}) + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \pi/8 \pm \pi/8 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi/8 \pm \pi/8 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ: преобразование суммы тригонометрических функций в произведение (4 –й способ).

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\sin 2x + \cos 2x = 1$, *разделим обе части уравнения на* $\sqrt{2}$,

$1/\sqrt{2} \sin 2x + 1/\sqrt{2} \cos 2x = 1/\sqrt{2}$,

$\cos \pi/4 \sin 2x + \sin \pi/4 \cos 2x = 1/\sqrt{2}$,

$\sin (2x + \pi/4) = 1/\sqrt{2}$,

$2x + \pi/4 = (-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in Z$,

$2x = -\pi/4 + (-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in Z$,

$x = -\pi/8 + (-1)^k \pi/8 + \pi k/2, k \in Z$.

Ответ: $x = -\pi/8 + (-1)^k \pi/8 + \pi k/2, k \in Z$.

Способ: **Введение вспомогательного угла** (3й – способ).

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\sin 2x + \cos 2x = 1,$ $\qquad$ $\cos 2x = \pm\sqrt{(1 - \sin^2 2x)}$

$\sin 2x \pm \sqrt{(1 - \sin^2 2x)} = 1,$

$\pm\sqrt{(1 - \sin^2 2x)} = 1 - \sin 2x$, возведем обе части уравнения в квадрат, тогда $1 - \sin^2 2x = 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x$,

$2\sin^2 2x - 2\sin 2x = 0,$

$2\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0,$

$\sin 2x = 0,$ $\qquad$ $\sin 2x - 1 = 0,$

$2x = \pi n,$ $\qquad$ $\sin 2x = 1,$

$x = \pi n/2,\ n \in Z;$ $\qquad$ $2x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi n/2,\ n \in Z;\ x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ: приведение к квадратному уравнению относительно $\sin 2x$ (5 –й способ).

$\sin 2x + \cos\ 2x = 1$

$\sin 2x + \cos\ 2x = 1,$

$\underline{\sin^2 2x} + 2\sin 2x \cos 2x + \underline{\cos}\,^2 x = 1,$

$2\sin 2x \cos 2x + 1 = 1,$

$2\sin 2x \cos 2x = 0,$

$\sin 2x = 0,$ $\cos 2x = 0\ ,$

$2x = \pi n,\ n \in Z\ ;$ $2x = \pi / 2 + 2\pi n\ ,\ n \in Z,$

$x = \pi n/2,\ n \in Z\ ;$ $x = \pi / 4 + \pi n\ ,\ n \in Z.$

Ответ: $\pi / 2 + 2\pi n\ ,\ n \in Z;\ x = \pi / 4 + \pi n\ ,\ n \in Z.$

Способ : возведение обеих частей уравнения в квадрат

(6 – й способ).

$\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\sin 2x + \cos 2x = 0,$

$\sin 2x = \dfrac{2\, tg\, x}{1 + tg^2 x}$, $\cos 2x = \dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$,

$$\frac{2\, tg\, x}{1 + tg^2 x} + \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = 0$$

$2\, tg\, x + 1 - tg^2 x - 1 - tg^2 x - 0, \quad 1 + tg^2 x/2 \neq 0,$

$2tg^2 x - 2\, tg\, x = 0,$

$2tg\, x\, (tg\, x - 1) = 0,$

$tg\, x = 0, \qquad tg\, x - 1 = 0,$

$\sin 2x = 0, \qquad \sin 2x = 1,$

$x = \pi n/2,\ n \in Z, \qquad 2x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi n/2,\ n \in Z;\ x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ: универсальная подстановка (7 –й способ).

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1,$

$\sqrt{3}/2 \sin x + 1/2 \cos x = 1/2,$

$\cos \pi/6 \ \sin x + \sin \pi/6 \cos x = 1/2 \ ,$

$\sin (x + \pi/6) = 1/2 \ ,$

$x + \pi/6 = (-1)^k \pi/6 + \pi k, \ k \in Z,$

$x = -\pi/6 + (-1)^k \pi/6 + \pi k, \ k \in Z,$

Ответ : $x = -\pi/6 + (-1)^k \pi/6 + \pi k, \ k \in Z.$

Способ: введение вспомогательного угла

(3-й способ).

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1,$

$2\sqrt{3}\sin x/2 \cos x/2 + \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \cos^2 x/2 + \sin^2 x/2,$

$2\sqrt{3}\sin x/2 \cos x/2 - 2\sin^2 x/2 = 0,$

$2\sin x/2 (\sqrt{3}\cos x/2 - \sin x/2) = 0,$

$\sin x/2 = 0,$ $\sqrt{3}\cos x/2 - \sin x/2 = 0,$ $\sin x/2 = \sqrt{3}\cos x/2,$

$x/2 = \pi n, n \in Z,$ $tg\, x/2 = \sqrt{3},$

$x = 2\pi n, n \in Z,$ $x/2 = \pi/3 + \pi n, n \in Z,$

$x = 2\pi/3 + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z, x = 2\pi n, n \in Z.$

Способ : приведение к однородному (1 –й способ).

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1,$

$2\sqrt{3}\sin x/2\cos x/2 = 1 - \cos x,$ $1 - \cos x = 2\cos^2 x/2$

$2\sqrt{3}\sin x/2\cos x/2 = 2\cos^2 x/2,$

$2\sqrt{3}\sin x/2\cos x/2 - 2\cos^2 x/2 = 0,$

$2\cos x/2\,(\sqrt{3}\sin x/2 - \cos x/2) = 0,$

Далее решать так как в первом способе.

Способ: разложение левой части уравнения на множители (2 –й способ).

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1,$

$3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 1,$

$2\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1,$

$2\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0,$

$2\sin x\,(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0,$

$\sin x = 0,$ $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0,$

$x = \pi n,\ n \in Z,$ $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$

$x = -\pi/3 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ : $x = \pi n,\ n \in Z,\ x = -\pi/3 + \pi n,\ n \in Z.$

Способ : **возведение обеих частей уравнения в квадрат** **(6 – й способ).**

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0,$

$\sin x = \dfrac{2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2}$, $\quad \cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2}$,

$$\frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2} + \frac{1-\mathrm{tg}^2 x/2}{1+\mathrm{tg}^2 x/2} = 1,$$

$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x/2 + 1 - \mathrm{tg}^2 x/2 = 1 + \mathrm{tg}^2 x/2$, так как $1 + \mathrm{tg}^2 x/2 \neq 0,$

$2\,\mathrm{tg}^2 x/2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x/2 = 1,$

$2\,\mathrm{tg}\,x/2\,(\mathrm{tg}\,x/2 + \sqrt{3}) = 0,$

$\mathrm{tg}\,x/2 = 0$, $\quad \mathrm{tg}\,x/2 = -\sqrt{3}$,

$x/2 = \pi n,\ n \in Z,\quad x/2 = -\pi/3 + \pi n,\ n \in Z,$

$x = 2\pi n,\ n \in Z,\quad x = -2\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi n,\ n \in Z,\ x = -2\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z.$

Способ : универсальная подстановка (7 – й способ).

Подведем итоги

	1	2	3	4	5	6	7	8
1 $\sin 2x + \cos x = 0$								
2 $\sin 6x + \sin 3x = 0$								
3 $\sin 6x + \sin 3x = 0$								
4 $\sin 2x + \cos 2x = 1$								
5 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$								

1.Приведение уравнения к однородному.

2.Разложение левой части уравнения на множители.

3.Введение вспомогательного угла.

4.Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

5.Приведение к квадратному уравнению.

6.Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

7.Универсальная подстановка.

8.Графическое решение.

Оцени себя сам

Реши уравнения :

6. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2,$
7. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2},$
8. $\sin x + \cos x = \sqrt{2},$
9. $\cos 2x - \cos 4x = 0,$
10. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$

Ответы:

1. $x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z;$
2. $x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z;$
3. $x = \pi/6 + (-1)^k \pi/4 + \pi k,\ \in Z;$
4. $x = \pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z;$
5. $x = \pi n/3,\ n \in Z;\ x = \pi n,\ n \in Z.$

Ключ к ответам:

Номер уравнения	6	7	8	9	10
Номер ответа	4	3	1	5	2

Предлагаем уравнения для тренировки и самоконтроля

1) $\sin 2x + \cos x = 0$
2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
3) $\sin 6x + \sin 3x = 0$
4) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

1) $\sin 4x - \sin 2x = 0$
2) $\cos 2x - \cos 4x = 0$
3) $\sin x + \cos x = 1$
4) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$

Желаем успеха!