ЛЕКЦИЯ 6

Переходные процессы в линейных электрических цепях

В электрических цепях возможны включения и отключения отдельных ветвей, короткие замыкания участков цепи, различного рода переключения. Любые изменения в электрических цепях можно представить в виде переключений или коммутаций. Характер коммутации указывается в схеме с помощью рубильника со стрелкой. По направлению стрелки можно судить, замыкается или размыкается рубильник.

При коммутации в цепи возникают переходные процессы, т.е. процессы перехода токов и напряжений от одного установившегося значения к другому.

Изменения токов и напряжений вызывают одновременное изменение энергии электрического и магнитного полей, связанных с элементами цепи - емкостями и индуктивностями.

Однако энергия электрического поля и энергия магнитного поля могут изменяться только непрерывно, так как скачкообразное изменение потребовало бы от источника бесконечно большой мощности. На этом рассуждении основаны законы коммутации.

Первый закон. В любой ветви с индуктивностью ток не может изменяться скачком и в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед моментом коммутации

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где $i_L(0_+)$ - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации, сразу после коммутации. Знак "+" в формуле обычно не записывается. Время переходного процесса отсчитывается от момента коммутации;

$i_L(0_-)$- ток в индуктивности непосредственно перед коммутацией.

Второй закон. Напряжение на емкости сразу после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно перед моментом коммутации.

$$u_L(0_+) = u_L(0_-),$$

где $u_C(0_+)$ - напряжение на емкости в момент коммутации;

$u_C(0_-)$ - напряжение на емкости непосредственно перед моментом коммутации.

Допущения, применяемые при анализе переходных процессов:

1. Полагают, что переходный процесс длится бесконечно большое время.

2. Считают, что замыкание и размыкание рубильника происходит мгновенно, без образования электрической дуги.

3. Принимают, что к моменту коммутации предыдущие переходные процессы в цепи закончились.

- Свободный ток определяют по формуле:

$$i_{CB}(t) = A_1 e^{P1t} + A_2 e^{P2t} + \ldots$$

Количество слагаемых в формуле равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме.

P_1, P_2 - корни характеристического уравнения.

A_1, A_2 - постоянные интегрирования, определяются с помощью начальных условий.

Начальные условия - это переходные токи и напряжения в момент коммутации, в момент времени t, равный нулю.

Начальные условия могут быть ***независимыми*** или ***зависимыми***.

В соответствии с ***классическим методом расчета***, переходный ток в ветви схемы представляют в виде суммы принужденного и свободного токов.

$$i(t) = i_{ПР}(t) + i_{СВ}(t)$$

где $i_{ПР}(t)$ - принужденный ток, определяется в установившемся режиме после коммутации. Этот ток создается внешним источником питания.

Если в цепь включен источник постоянной ЭДС, принужденный ток будет постоянным, если в цепи действует источник синусоидальной ЭДС, принужденный ток изменяется по периодическому, синусоидальному закону;

$i_{СВ}(t)$ - свободный ток, определяется в схеме после коммутации, из которой исключен внешний источник питания.

Свободный ток создается внутренними источниками питания: ЭДС самоиндукции индуктивности или напряжением заряженной емкости.

Независимыми называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, законам постепенного, непрерывного изменения.

Это напряжение на емкости $u_C(0)$ и ток в ветви с индуктивностью $i_C(0)$ в момент коммутации.

Остальные начальные условия: напряжение и ток в ветви с сопротивлением $u_R(0)$ и $i_R(0)$, напряжение на индуктивности $u_C(0)$, ток в ветви с емкостью $i_C(0)$ - это ***зависимые начальные условия***.

Они не подчиняются законам коммутации и могут изменяться скачком.

Переходные процессы в цепях одним реактивным элементом

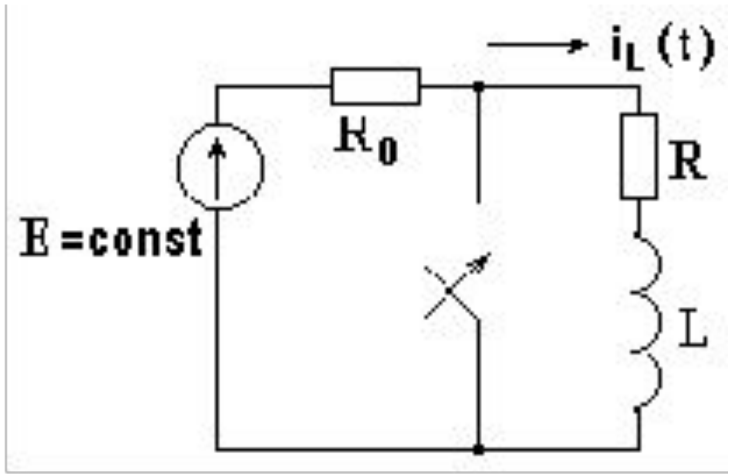
Короткое замыкание в R-L цепи

На рисунке 1 изображена электрическая цепь, в которой включен источник постоянной ЭДС.

В результате коммутации рубильник замыкается и образуется замкнутый на себя контур.

До коммутации по индуктивности протекал ток .

Этот ток создавал постоянное магнитное поле в индуктивной катушке.



- Определим закон изменения тока в индуктивности после коммутации.

В соответствии с классическим методом:

$$i(t) = i_{L\,ПР}(t) + i_{L\,СВ}(t) = i_{L\,ПР}(t) + Ae^{Pt}$$

Принужденный ток после коммутации замыкается через рубильник, имеющий нулевое сопротивление, и через индуктивность не протекает.

Индуктивный ток имеет только свободную составляющую:

$$i_{L\,ПР} = 0, \quad i_L(t) = 0 + i_{L\,СВ}(t) = i_{L\,СВ}(t)$$

Магнитное поле, исчезая, индуктирует в индуктивной катушке ЭДС самоиндукции.

Свободный ток в $R - L$ контуре существует за счет этой электродвижущей силы.

Запишем уравнение для свободного тока в контуре, используя второй закон Кирхгофа:

$$i_{L\,CB} \cdot R + L\frac{di_{L\,CB}}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Ищем решение этого уравнения в виде экспоненты:

$$i_{L\,CB} = Ae^{Pt}$$

Производная:

$$\frac{di_{L\,CB}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt} \quad .$$

- Подставим значения свободного тока и производной тока в уравнение (1):

$$A \cdot R \cdot e^{Pt} + L \cdot A \cdot P \cdot e^{Pt} = Ae^{Pt}(R + P \cdot L) = R + L \cdot P = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2), полученное из уравнения (1), называется ***характеристическим.***

$P = -R / L$ - корень характеристического уравнения;

$\tau = -\dfrac{1}{P} = \dfrac{L}{R}$ - постоянная времени переходного процесса, измеряется в секундах.

Постоянная времени τ - это интервал времени, за который переходный ток уменьшается в e раз.

$$i_{L\,CB} = A \cdot e^{-R/Lt} = A \cdot e^{-t/\tau}$$

.

Постоянную интегрирования А определяем с помощью начального условия.

В соответствии с первым законом коммутации,

$$i_L(0) = i_{L\,CB}(0) = A = i_L(0\_) = \frac{E}{R_0 + R}$$.

Получим: $i_L(t) = i_{L\,CB}(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-R/Lt}$.

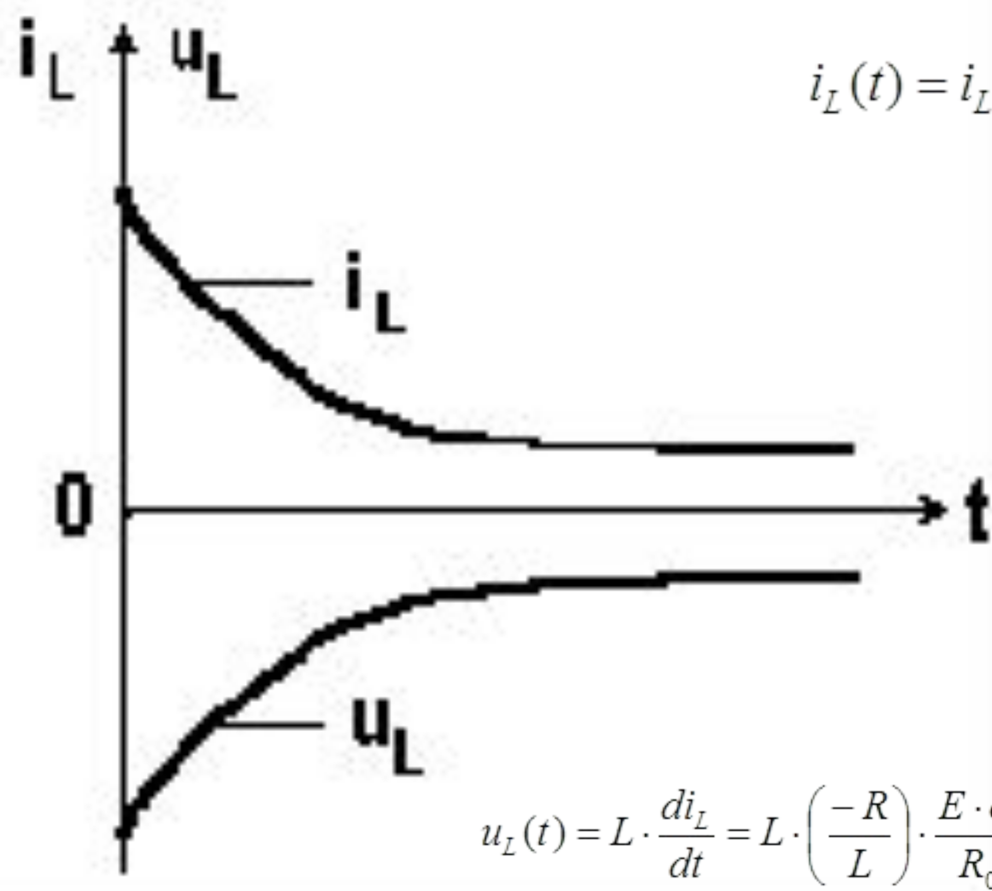
Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left(\frac{-R}{L} \right) \cdot \frac{E \cdot e^{-R/Lt}}{R_0 + R} = -\frac{R}{R_0 + R} \cdot E \cdot e^{-R/Lt}$$

На рисунке изображены кривые переходного тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения на индуктивности.

Переходный ток и напряжение по экспоненте стремятся к нулю.

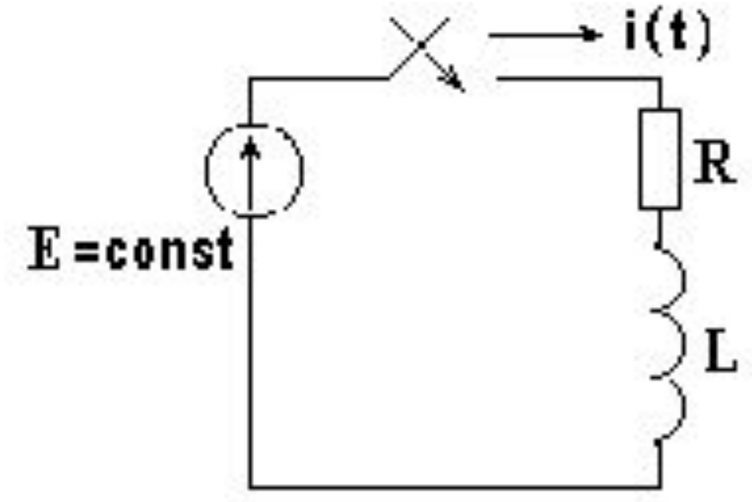
В инженерных расчетах полагают, что через интервал времени, равный (4 ÷ 5) τ, переходный процесс заканчивается.



$$i_L(t) = i_{L\,CB}(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-R/Lt}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left(\frac{-R}{L}\right) \cdot \frac{E \cdot e^{-R/Lt}}{R_0 + R} = -\frac{R}{R_0 + R} \cdot E \cdot e^{-R/Lt}$$

Подключение R-L цепи к источнику постоянной ЭДС



В схеме на рисунке 2 до коммутации рубильник разомкнут. В результате коммутации рубильник замыкается и подключает $R-L$ цепь к источнику постоянной ЭДС. Определим закон изменения тока $i(t)$.

$$i(t) = i_{ПР} + i_{СВ}(t) = i_{ПР} + Ae^{Pt}$$

Принужденный ток в установившемся режиме после коммутации:

$$i_{ПР} = \frac{E}{R} .$$

В свободном режиме из схемы исключен внешний источник питания. Схема на рис. 2 без источника ЭДС ничем не отличается от схемы на рис.1.

- Свободный ток определяется по формуле:

$$i_{L\,CB} = A \cdot e^{-R/Lt} \;.$$

Запишем значение переходного тока для момента коммутации, $(t = 0)$.

$$i(0) = i_{\Pi P} + i_{CB}(0) = i_{\Pi P} + A \;,$$

откуда

$$A = i(0) - i_{\Pi P} \;.$$

До коммутации рубильник был разомкнут, и ток в схеме отсутствовал. Сразу после коммутации ток в индуктивности остается равным нулю.

$$i(0) = i(0\_) = 0 \; .$$

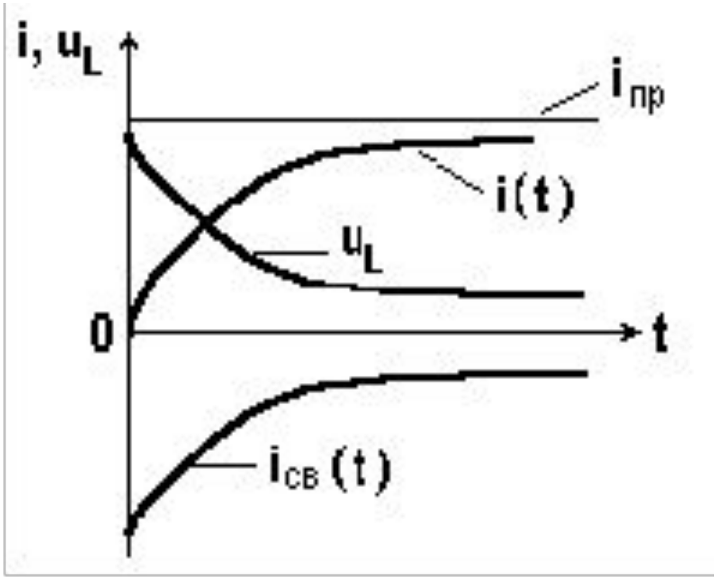
$$A = 0 - i_{ПР} = -i_{ПР} = -\frac{E}{R} \; .$$

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-R/Lt} = \frac{E}{R}(1 - e^{-R/Lt}) \; .$$

Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -L\left(-\frac{R}{L}\right)\frac{E}{R} e^{-R/Lt} = E \cdot e^{-R/Lt} \; .$$

На рисунке 3 изображены кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности.



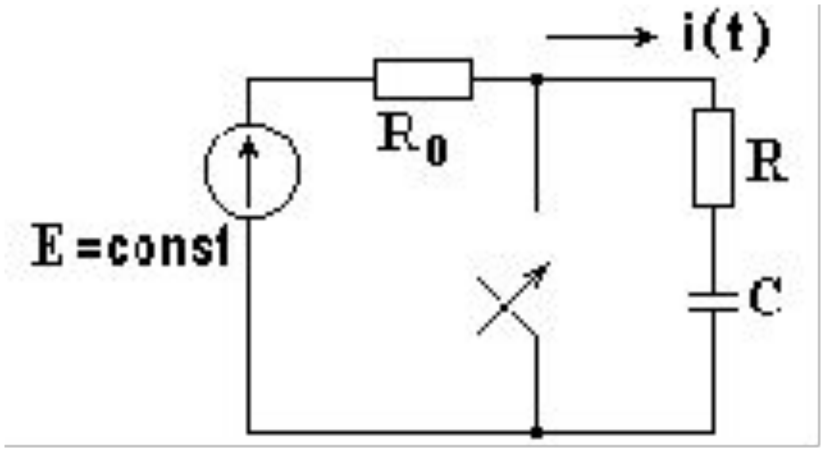
Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля.

В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине.

Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

Переходные процессы в цепях одним реактивным элементом

- ***Короткое замыкание в R-C цепи***



В схеме в результате коммутации рубильник замыкается, и образуется замкнутый на себя $R - C$ контур.

До коммутации емкость полностью зарядилась до напряжения, равного ЭДС источника питания, то есть $u_C(0_-) = E$

После коммутации емкость полностью разряжается, следовательно, принужденный ток в $R - C$ цепи и принужденное напряжение на конденсаторе равны нулю.

В цепи существует только свободный ток за счет напряжения заряженного конденсатора.

- Запишем для $R - C$ контура уравнение по второму закону Кирхгофа: $u_{C\,CB} + R \cdot i_{CB} = 0$

Ток через конденсатор: $i_{CB} = C\dfrac{du_{C\,CB}}{dt}$

Получим дифференциальное уравнение

$$u_{C\,CB} + R \cdot C\frac{du_{C\,CB}}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Решение этого уравнения:

$$u_{C\,CB} = Ae^{Pt}$$

Подставим значение свободного напряжения и производной от напряжения $\frac{du_{C\,CB}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}$ в уравнение (1).

$$A \cdot e^{Pt} + R \cdot C \cdot P \cdot A \cdot e^{Pt} = Ae^{Pt}(1 + R \cdot C \cdot P) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + RCP = 0$$

Уравнение $1 + RCP = 0$ называется ***характеристическим***.

$P = -\frac{1}{RC}$ - корень характеристического уравнения;

$\tau = -\frac{1}{P} = RC$ - постоянная времени переходного процесса;

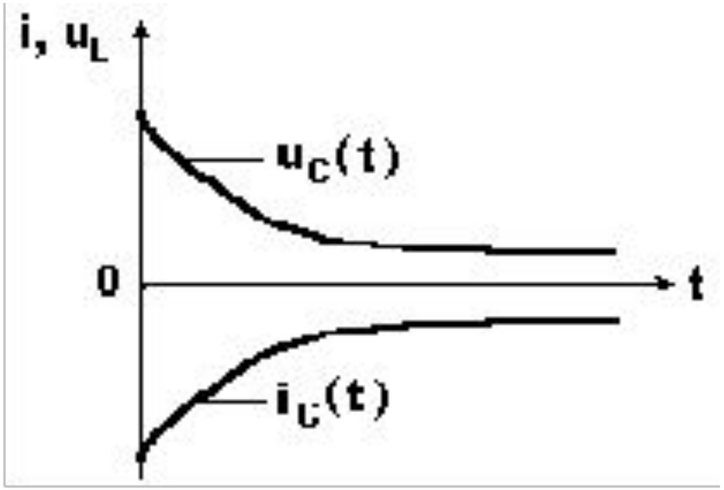
$$u_{C\,CB} = A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0) = u_{C\,CB}(0) = A = u_c(0-) = E$$

$$A = E$$

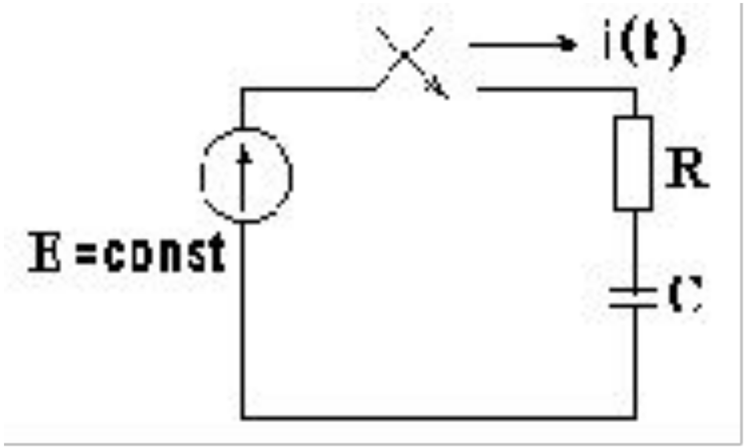
$$u_C = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Переходный ток и переходное напряжение на конденсаторе по показательному закону уменьшаются до нуля

Подключение R-C цепи к источнику постоянной ЭДС



Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем $u_C(0_-) = 0$.

В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается.

Принужденное напряжение на емкости равно ЭДС источника питания:

$$u_{C\,ПР} = E$$

Переходное напряжение:

$$u_C(t) = u_{C\,ПР} + u_{C\,СВ} = u_{C\,ПР} + A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

В момент коммутации $u_C(0) = u_{C\,ПР} + A$

Постоянная интегрирования $A = u_C(0) - u_{C\,ПР}$

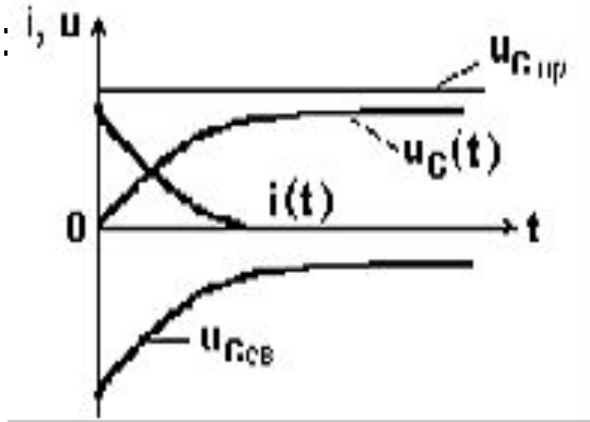
В соответствии со вторым законом коммутации $u_C(0) = u_C(0-) = 0$

$$A = 0 - u_{C\,ПР} = -u_{C\,ПР} = -E$$

Переходное напряжение: $u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

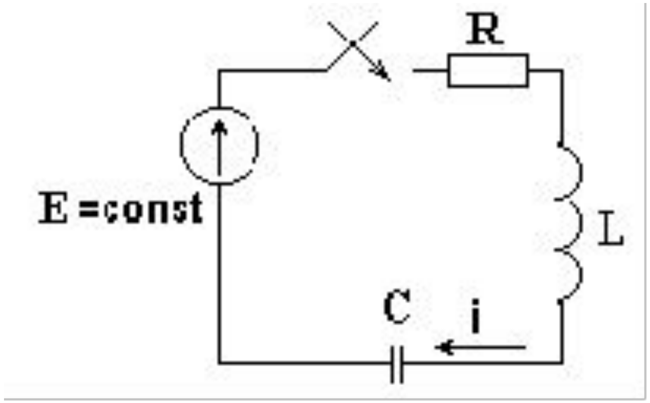
Переходный ток: $i = C \cdot \dfrac{du_C}{dt} = C \cdot \left(-\dfrac{1}{RC}\right) \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

Кривые напряжений и тока изображены на рисунке:



Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами

- При последовательном соединении сопротивления R , катушки индуктивности L и конденсатора C образуется электрический $R - L - C$ контур.



Дифференциальное уравнение для тока в контуре:

$$R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = E$$

- После дифференцирования по t и деления на L получим:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) равно сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{ПР} + i_{СВ}$$

В нашем случае принужденная составляющая переходного тока равна нулю, так как в схеме имеется емкость, являющаяся разрывом цепи для постоянного тока.

Свободная составляющая является общим решением уравнения:

$$\frac{d^2 i_{СВ}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di_{СВ}}{dt} + \frac{1}{LC} i_{СВ} = 0 \qquad (3)$$

Пусть $$i_{CB} = Ae^{Pt}, \frac{dt_{CB}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}, \frac{d^2 i_{CB}}{dt^2} = A \cdot P^2 \cdot e^{Pt}$$

После подстановки этих выражений в уравнение (3) получим характеристическое уравнение:

$$P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} = 0$$

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - угловая резонансная частота контура без потерь.

Получим: $i = i_{CB} = A_1 \cdot e^{P1t} + A_2 \cdot e^{P2t}$

Вид корней зависит от отношения

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q}$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое или волновое сопротивление контура;

$Q = \rho / R$ - добротность контура.

Спасибо
за внимание!