Математика
Часть 1

УГТУ-УПИ

2006 г.

Лекция 7

Формула Тейлора

1. Теорема Тейлора.

2. Оценка остаточного члена.

3. Разложение по формуле Маклорена некоторых функций.

4. Приложения формул Тейлора и Маклорена.

1. **Теорема Тейлора .**

Если ***f(x)*** имеет в некоторой окрестности точки ***a*** производные до ***(n+1)*** порядка включительно, то существует окрестность этой точки, в которой ***f(x)*** можно представить в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad c\in(a,x)$$

$$c=a+\theta(x-a),\theta\in(0,1)$$

Таким образом, для всех ***x*** из окрестности точки ***a*** функцию ***f(x)*** можно представить так

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)}$$

где $P_n(x)$ – ***многочлен Тейлора,***

$R_{n+1}(x)$ – ***остаточный член.***

Частные случаи формулы Тейлора.

I. Формула Маклорена .

(Получается из формулы Тейлора при ***a = 0***)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0,1)$$

2. *Пусть $f(x)$ – многочлен степени n,*

то есть $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n$

Так как в этом случае

$$\forall x : f^{(n+1)}(x) \equiv 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(c) \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$R_{n+1}(x) \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) \equiv f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;}$$

2. Оценка остаточного члена.

Пусть ***f(x)*** такова, что

$$\forall n, \forall x : \left| f^{(n)}(x) \right| \le M$$

Рассмотрим

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

$$\Downarrow$$

$$\left| R_{n+1}(x) \right| = \frac{\left| f^{(n+1)}(c) \right|}{(n+1)!} \cdot \left| x-a \right|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!} \cdot \left| x-a \right|^{n+1}$$

Так как

$$\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \forall |x-a|$$

Остаточный член может быть сделан сколь угодно малым, путём увеличения n.

Формулу Тейлора можно использовать для приближённых вычислений ***с любой степенью точности.***

3. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций.

1. $\boxed{f(x)=e^x}$

$f(0)=1$

$f'(x)=e^x;$

$f'(0)=1;$

$f''(x)=e^x;$

$f''(0)=1;$

$f^{(n)}(x)=e^x;$

$f^{(n)}(0)=1;$

Формула Маклорена примет вид

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Рассмотрим $(-r, r)-$ окрестность точки $x = 0$.

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < e^r, \forall n, \forall x \in (-r, r) \Rightarrow$$

$$\boxed{\left| R_{n+1}(x) \right| < \frac{e^r}{(n+1)!} \cdot r^{n+1}}$$

2. $\boxed{f(x) = \sin x}$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \; f(0) = 0.$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, n - \text{÷¸òíîå.} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, n - \text{íå÷¸òíîå.} \end{cases}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + R_{n+1}(x)}$$

(Нечётная функция sinx разлагается ***по нечётным степеням x)***

3. $\boxed{f(x) = \cos x}$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);\ f(0) = 1.$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, n - \text{í å÷¸ò í î å.} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, n - \text{÷¸ò í î å.} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + R_{n+1}(x)}$$

(Чётная функция cos x разлагается ***по чётным степеням x)***

4. $\boxed{f(x) = \ln(1+x)}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n};\ f(0) = 0.$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \\ &+R_{n+1}(x)\end{aligned}}$$

5. $\boxed{f(x)=(1+x)^{\alpha},\ \alpha - \qquad .}$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};\ f(0)=1.$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^{\alpha}&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_{n+1}(x)\end{aligned}}$$

Частный случай $\boxed{\alpha = n}$

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n}$$

-формула бинома Ньютона.

4. Применение формул Тейлора и Маклорена.

1. ***Приближённые вычисления:***

$$f(x) = P_n(x,a) + \cancel{R_{n+1}}(x,a)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) \approx P_n(x,a)}$$

$|R_{n+1}(x,a)|$ – абсолютная погрешность приближённого равенства.

yyy

*Нужно уметь **<u>оценить</u>** абсолютную погрешность, т.е. решать неравенство*

$$\left|R_{n+1}(x,a)\right| \le \varepsilon$$

ε – *степень точности приближенного равенства*

Абсолютная погрешность не превосходит ε

Пример.

Вычислить значение e с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

Разложим её по формуле Маклорена :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

Положим $x = 1 \Rightarrow$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),$$

$$R_{n+1}(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},0<\theta<1$$

$$R_{n+1}(1)<\frac{e}{(n+1)!},\quad e<3\quad\Rightarrow$$

$$R_{n+1}(1)<\frac{3}{(n+1)!}$$

Далее ищем ***наименьшее n***, удовлетворяющее неравенству

$$\boxed{\frac{3}{(n+1)!}\le\varepsilon}\longrightarrow\boxed{n=6}$$

Окончательно

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}$$

Ответ: $e \approx \frac{1957}{720} = 2,718$

2. *Приближение функции многочленом.*

$$\boxed{f(x) \approx P_n(x,a)}$$

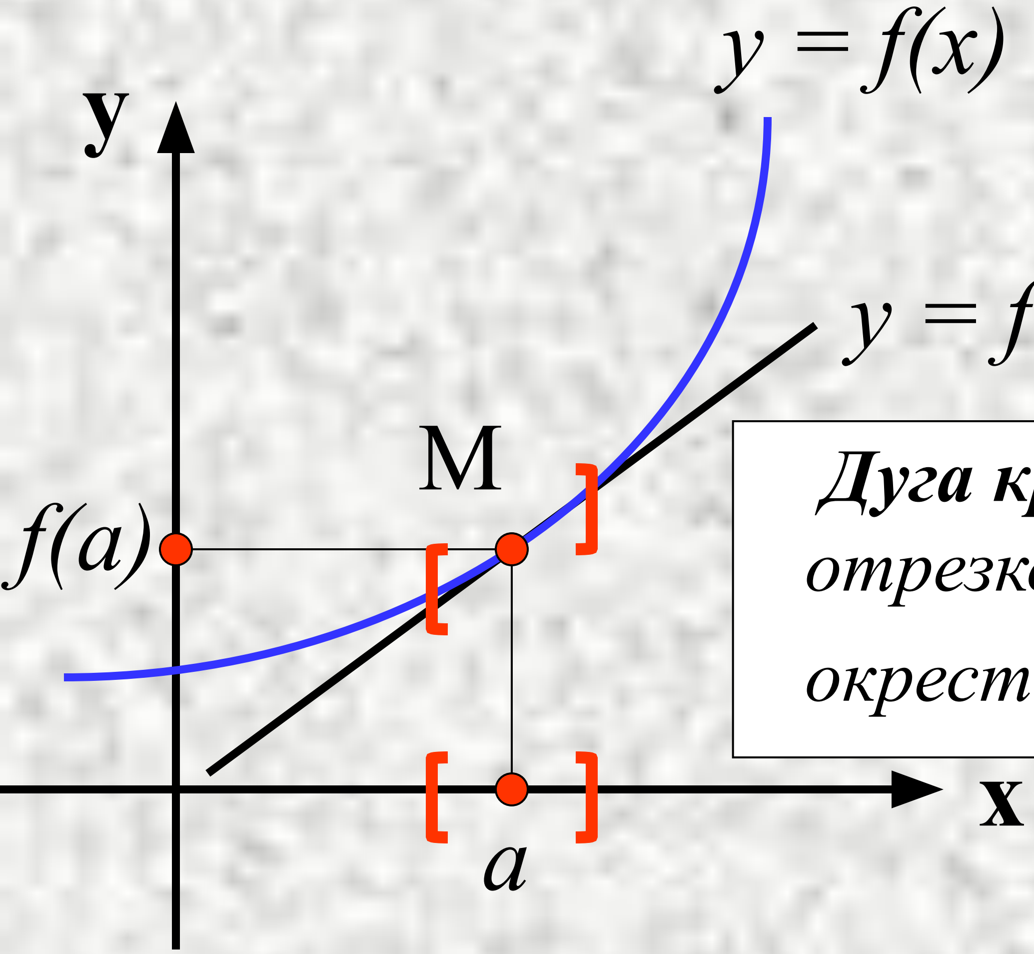
Частный случай $n = 1$

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Справа **- линейная функция** $\Longrightarrow$

Такая замена называется ***линеаризацией функции*** .

Геометрический смысл линеаризации



Дуга кривой *заменяется отрезком* ***касательной*** *в окрестности точки* a.

3. *Вычисление пределов.*

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = ?$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$