# Законы алгебры логики

# Законы алгебры высказываний

- В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования формул.
- Законы алгебры высказываний – это тавтологии. Иногда эти законы называются теоремами.

# Закон тождества:

***в процессе определенного рассуждения всякое понятие и суждение должны быть тождественны самим себе.***

$$A = A$$

# Закон тождества:

- **Всякая мысль тождественна самой себе.**
- **Данный закон означает, что в процессе рассуждения нельзя подменять одну мысль другой, одно понятие другим. При нарушении этого закона возможны логические ошибки.**

# Закон непротиворечия:

Одновременно не могут быть истинными суждение и его отрицание.

$$A \,\&\, \bar{A} = 0$$

# Закон исключения третьего:

***из двух противоречащих суждений одно истинно, другое ложно, а третьего не дано.***

$$A + \bar{A} = 1$$

# Закон исключения третьего:

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано.

Примеры выполнения закона исключения третьего:

1. Число 2598 либо чётное, либо нечётное.
2. Эта жидкость является или не является кислотой.

Закон исключённого третьего не является законом, признаваемым всеми логиками в качестве универсального закона логики. Этот закон применяется там, где познание имеет дело с жёстко ситуацией: «либо – либо», «истина – ложь». Там же, где встречается неопределённость (например, в рассуждениях о будущем), закон исключённого третьего часто не может быть применён.

Рассмотрим следующее высказывание:

*Это предложение ложно.*

Оно не может быть истинным, потому что в нём утверждается, что оно ложно. Но оно не может быть и ложным, потому что тогда оно было бы истинным. Это высказывание не истинно и не ложно, а потому нарушается закон исключённого третьего.

Парадокс (с греч. paradoxos – неожиданный, странный) в этом примере возникает из-за того, что предложение ссылается само на себя.

# Закон двойного отрицания:

***если отрицать дважды некоторое высказывание, то в результате получается исходное высказывание.***

$$\overline{\overline{A}} = A$$

# Свойства констант:

*отрицание лжи есть истина.*

*отрицание истины есть ложь.*

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$

$A \vee 0 = A$

$A \vee 1 = 1$

$A \& 0 = 0$

$A \& 1 = A$

# Закон идемпотентности:

$$A \vee A = A$$

$$A \,\&\, A = A$$

Например, сколько бы раз мы ни повторяли: *телевизор включен или телевизор включен или телевизор включен*….значение высказывания не изменится.

# Законы коммутативности (сочетательные законы):

***операнды А и В в операциях дизъюнкции и конъюнкции можно менять местами.***

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \& B = B \& A$$

# Законы ассоциативности (распределительные законы):

***если в выражении используется только операция дизъюнкции или только операция конъюнкции, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять.***

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$$

# Законы дистрибутивности:

**A v (B & C) = (A v B) & (A v C)**

**A & (B v C) = (A & B) v (A & C)**

# Внимание:

! **Закон ассоциативности** аналогичен закону алгебры чисел, а закон **дистрибутивности** справедлив только в алгебре логики.

# Законы поглощения:

$$A \mathbin{\&} (B \vee \overline{B}) = A$$ *или*

$$A \mathbin{\&} (A \vee B) = A$$ *или*

$$(A \vee B) \mathbin{\&} \overline{B} = A \mathbin{\&} \overline{B}$$

$$A \vee B \mathbin{\&} \overline{B} = A$$ *или*

$$A \vee (A \mathbin{\&} B) = A$$ *или*

$$(A \mathbin{\&} B) \vee \overline{B} = A \vee \overline{B}$$

# Законы де Моргана:

***отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний. Отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний.***

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$$ *или*

$$A \vee B = \overline{\overline{A} \,\&\, \overline{B}}$$

$$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$ *или*

$$A \,\&\, B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

# Правило замены операции импликации:

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

# Правило замены операции эквивалентности:

$$A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \vee \overline{B}) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A)$$

# Доказательство логических законов

- построить таблицу истинности для правой и левой частей равенства;
- выполнить эквивалентные преобразования над правой и левой частями равенства для приведения их к одному виду;
- с помощью диаграмм Эйлера - Венна;
- путем правильных логических рассуждений.

# Упрощение сложных высказываний

# Пример 1

Требуется упростить: $\mathbf{A \mathbin{\&} B \lor A \mathbin{\&} \overline{B}}$

По <u>закону дистрибутивности </u>вынесем А за скобки:

$$A \mathbin{\&} B \lor A \mathbin{\&} \overline{B} = A \mathbin{\&} (B \lor \overline{B}) = A \mathbin{\&} 1 = A$$

# Пример 2

Требуется упростить: $\mathbf{(A \lor B) \,\&\, (A \lor \overline{B})}$

<u>*Способ 1.*</u> Применим <u>закон дистрибутивности</u>:

$$(A \lor B) \,\&\, (A \lor \overline{B}) = A \lor (B \,\&\, \overline{B}) = A \lor 0 = A$$

<u>*Способ 2.*</u> Перемножим скобки на основании того же закона дистрибутивности:

$$(A \lor B) \,\&\, (A \lor \overline{B}) = A \,\&\, A \lor A \,\&\, \overline{B} \lor B \,\&\, A \lor B \,\&\, \overline{B} =$$

$$= A \lor A \,\&\, (B \lor \overline{B}) \lor 0 = A \lor A \,\&\, 1 = A \lor A = A$$

# Пример 6

Требуется упростить: $\mathbf{A \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B}$

Добавим к последнему слагаемому C. Это делается стандартным способом: умножим A & B на 1, а 1 распишем как $C \vee \overline{C}$:

$A \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B = A \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B \,\&\, 1 = A \,\&\, C \vee$
$\vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B \,\&\, (C \vee \overline{C}) = A \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&$
$\& B \,\&\, \overline{C} = A \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = \qquad =$
$A \,\&\, C \,\&\, (1 \vee B) \vee B \,\&\, \overline{C} \,\&\, (1 \vee A) = A \,\&\, C \vee B \,\&\, \overline{C}$

# Пример 7

Требуется упростить: $\overline{\overline{\mathbf{X}} \vee \overline{\mathbf{Y}}}$

Применим закон де Моргана:

$$\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{\overline{Y}} = X \,\&\, Y$$